О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В L^∞

Г. М. Айрапетян, А. С. Асатрян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

Пусть A – класс аналитических функций вне единичной окружности $T = \{z: |z| = 1\}$, имеющих конечный порядок на бесконечности. Пусть $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – сужения функции $\Phi \in A$ на $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $D^- = \{z: |z| > 1\}$ соответственно. Рассмотрим следующую задачу : найти функцию $\Phi \in A$, удовлетворяющую граничному условию $\lim\limits_{r\to 1-0} \left(\Phi^+(rt) - a(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)\right) = f(t)$, где $f(t) \in L^\infty(T)$ и $a(t) \not\equiv 0$ – кусочно непрерывная в смысле Гельдера функция на T. Предел понимается в смысле слабой сходимости. В статье найдено общее решение задачи и получены необходимые и достаточные условия для нормальной разрешимости и нетеровости задачи.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A – класс аналитических функций вне множества $T = \{z: |z| = 1\}$, имеющих конечный порядок на бесконечности, и пусть A_0 – множество функций из A, обращающихся в нуль на бесконечности. Для заданной $\Phi \in A$ обозначим через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ сужения функции Φ на $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $D^- = \{z: |z| > 1\}$, соответственно :

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{при} \quad z \in D^+ \\ \Phi^-(z), & \text{при} \quad z \in D^- \end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу : найти функцию $\Phi \in A$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r\to 1-0} \left(\Phi^+(rt) - a(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)\right) = f(t), \tag{1}$$

где $f(t) \in L^\infty(T)$, а $a(t)$ – отличная от нуля кусочно непрерывная в смысле Гельдера функция на T. Предел в (1) понимается в смысле слабой сходимости, т.е. для каждой функции $g(t) \in L^1(T)$

$$\lim_{r\to 1-0} \int_T \left(\Phi^+(rt) - a(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)\right)\, g(t)\,dt = \int_T f(t)\,g(t)\,dt.$$

В статье найдено общее решение задачи (1) и получены необходимые и достаточные условия для нормальной разрешимости и нетеровости этой задачи. Граничные задачи в смысле L^p-сходимости, $p > 1$, исследованы в [1] и [2].

§1. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)

1. Пусть $t_k \in T$, $k \in 1, 2, ..., n$ суть точки разрыва функции $a(t)$. Обозначим

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}\left(\ln(t_k - 0) - \ln(t_k + 0)\right),$$

где $\ln a(t)$ – некоторая фиксированная ветвь логарифма, непрерывно меняющаяся на каждой дуге $(t_k, t_{k+1}) \subset T$ (полагаем, что $t_{k+1} = t_1$).

Положим

$$S(z) = S_1(z) \prod_{k=1}^{n} (z - t_k)^{\lambda_k}, \tag{2}$$

где целые числа λ_k удовлетворяют неравенствам $0 \le \alpha_k + \lambda_k < 1$, а

$$S_1(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\ln a(t)\,dt}{t - z}\right], \qquad z \in D^+ \bigcup D^-.$$

Обозначим через $\aleph = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)$. Мы будем использовать следующие свойства :

а) $S^+(t) - a(t)S^-(t) = 0, \quad t \in T, \quad t \ne t_k, \quad k = 1, 2, ..., n$;

б) $(S^+(t))^{-1}, (S^-(t))^{-1} \in L^1(T)$;

в) в некоторой окрестности V точки t_k функции $S^+(z)$ и $S^-(z)$ представимы в виде

$$S^\pm(z) = (z - t_k)^{\delta_k}\,\Omega^\pm(z),$$

где $\delta_k = \alpha_k + \lambda_k$, $\Omega^+(z)$ и $\Omega^-(z)$ суть отличные от нуля аналитические функции на $V \bigcap D^+$ и $V \bigcap D^-$, соответственно;

г) порядок функции $S^-(z)$ на бесконечности равен $-\aleph$;

д) $\left|S^+(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)\right| \le \text{const}\,|S^+(rt)|\left(\frac{1-r}{|1-rt|} + O(1-r)^\delta\right)$, где $\delta < 1$.

Свойства а) — г) следуют из определения функции $S(z)$ и формулы Сохоцкого–Племеля. Доказательство утверждения д) имеется в [3].

Теорема 1. Если функция $\Phi(z) \in A$ удовлетворяет условию (1), то ее можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_T \frac{f(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t - z} + S(z)\,P(z), \tag{3}$$

где $P(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi(z)\,(S(z))^{-1}$ на бесконечности.

Доказательство : В силу (1) и б) имеем

$$\lim\left(\frac{\Phi^+(rt)}{S^+(t)}-\frac{\Phi^-(r^{-1}t)}{S^-(t)}\right)=f(t),\qquad r\to 1-0,$$

где предел понимается в смысле слабой сходимости в L^∞. Пусть $\Phi_r^+(z)=\Phi^+(rz)(S^+(z))^{-1}$ и $\Phi_r^-(z)=\Phi^-(r^{-1}z)(S^-(z))^{-1}$. Положим

$$\Phi_r^+(t)-\Phi_r^-(t)=f_r(t),\qquad t\in T. \tag{4}$$

Так как $f_r(t)$ принадлежит классу Гельдера, а функция $\Phi_r^-(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности, то из (4) получаем

$$\Phi_r(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\frac{f_r(t)}{t-z}\,dt+P_r(z), \tag{5}$$

где $P_r(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi^-(r^{-1}z)\,(S^-(z))^{-1}$ на бесконечности. Учитывая, что $f_r(t)$ стремится к $f(t)\,(S^+(t))^{-1}$ (при $r\to 1-0$) в смысле слабой сходимости в L^∞, из (5) получим (3). Теорема 1 доказана.

2. Нам необходимы следующие две леммы.

Лемма 1. Для $f(t)\in L^\infty(T)$ и $t_0\in T$ положим

$$A(f;r,t)=\frac{(t_0-rt)}{2\pi i}\int_T\frac{f(\tau)}{(t_0-\tau)}\frac{1-r^2}{|\tau-rt|^2}\,d\tau,\quad t\in T,\quad r<1,\quad \delta<1.$$

Существует постоянная C не зависящая от f, такая что

$$\sup\|A(f;r,t)\|_\infty<C\|f\|_\infty,\quad r\in(0,1),\quad t\in T.$$

Доказательство : Имеем $\left||t_0-rt|^\delta-|t_0-\tau|^\delta\right|<\mathrm{Const}\,|\tau-rt|^\delta$. Следовательно, обозначая $T_r=\{\tau\colon |t_0-\tau|<1-r\}$, будем иметь $|A(f;r,t)|<\mathrm{const}\,(I_1(r,t)+I_2(r,t))$, где

$$I_1(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_1}\frac{(1-r^2)\,|d\tau|}{|t_0-\tau|^\delta\,|\tau-rt|^{2-\delta}}\,\|f\|_\infty,$$

$$I_2(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T\setminus T_1}\frac{(1-r^2)\,|d\tau|}{|t_0-\tau|^\delta\,|\tau-rt|^{2-\delta}}\,\|f\|_\infty.$$

Для $\tau\in T\setminus T_1$ имеем $|t_0-\tau|>2^{-1}\,|\tau-rt|$. Следовательно

$$I_2(r,t)\le C_1\int_T\frac{(1-r^2)\,|d\tau|}{|\tau-rt_0|^\delta\,|\tau-rt|^{2-\delta}}\le$$

$$\le C_1\left(\int_T\frac{(1-r^2)\,|d\tau|}{|\tau-rt_0|^2}+\int_T\frac{(1-r^2)\,|d\tau|}{|\tau-rt|^2}\right)=2C_1\|f\|_\infty,$$

где C_1 – постоянная, не зависящая от r. Для оценки $I_1(r,t)$ положим $\tau=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$ и заметим, что для $|\tau-rt|\ge 1-r$

$$I_1(r,t)\le C_2\,\frac{\|f\|_\infty}{(1-r)^{1-\delta}}\int_{|\theta|\le 1-r}\frac{d\theta}{\theta^\delta}=\frac{2\,C_2}{1-\delta}\,\|f\|_\infty,$$

где C_2 – постоянная, не зависящая от r. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для $f(t) \in L^\infty$ положим

$$B(f;r,t) = \frac{S^+(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)}{2\pi i} \int_T \frac{f(\tau)}{S^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - rt}.$$

Существует постоянная C, не зависящая от f, такая что

$$\sup \|B(f;r,t)\|_\infty < C\|f\|_\infty, \quad r \in (0,1), \quad t \in T.$$

Доказательство : В силу утверждения д) Леммы 1 достаточно доказать, что

$$\sup \frac{1-r}{|t_0 - rt|^{1-\delta}} \int_T \frac{|dt|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|} \le \infty, \quad r \in (0,1)$$

для каждой точки $t \in T$. Пусть T_1 – множество, определенное в доказательстве Леммы 1. Имеем

$$\frac{1-r}{|t_0 - rt|^{1-\delta}} \int_{T_1} \frac{|d\tau|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|} \le \int_{T_1} \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|} + \int_{T\setminus T_1} \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|}.$$

Тогда, учитывая неравенство $|t_0 - \tau| \ge 2^{-1}|t_0 - rt|$, для $\tau \in T \setminus T_1$ получим

$$\int_{T\setminus T_1} \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|} \le \int_T \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|t_0 - r\tau|^{1+\delta}} + \int_T \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|\tau - rt|^{1+\delta}} \le C_1,$$

где C_1 –постоянная, не зависящая от r и t. Полагая $\tau = e^{i\theta}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, получим

$$\int_{T_1} \frac{(1-r)^\delta\,|d\tau|}{|t_0 - \tau|^\delta\,|\tau - rt|} < C_2 \int_{|\theta|<1-r} \frac{d\theta}{\theta^\delta\,(1-r)^{1-\delta}} = \frac{2C_2}{1-\delta},$$

где C_2 – постоянная. Лемма 2 доказана.

3. Пусть $T_0 = \{t_k : \{\alpha_k\} = 0, k = 1, 2, ..., n\}$, где α_k определяется формулой (2), и $\{\alpha\}$ – дробная часть числа α.

Теорема 2. Пусть $T_0 = \emptyset$. Тогда

а) если $\aleph \ge 0$, то однородная задача (1) имеет $\aleph$ линейно независимых решений в A_0, а неоднородная задача разрешима для любой функции $f \in L^\infty(T)$. Общее решение задачи (1) представимо в виде (3), где $P(z)$ –произвольный полином порядка $\aleph$;

б) если $\aleph < 0$, то однородная задача (1) имеет только тривиальное решение в A_0, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_T \frac{f(t)}{S^+(t)}\, t^k\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, ... - \aleph - 1.$$

Доказательство : Пусть $\aleph \geq 0$. Имеем

$$\Phi^+(rt) - a(t)\,\Phi^-(r^{-1}t) = \frac{S^+(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)}{S^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - rt} +$$

$$+\frac{S^+(rt)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)}{S^+(\tau)}\,P_r(t,\tau)\,d\tau + S^+(rt)\,P(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t).$$

Поэтому утверждение Теоремы 2 следует из Лемм 1 и 2 и соотношения

$$\sup\left|S^+(rt)\,P(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)\,P(r^{-1}t)\right| < \infty, \quad \text{при} \quad r \in (0,1).$$

§2. НЕТЕРОВОСТЬ ЗАДАЧИ (1)

Будем говорить, что задача (1) нормально разрешима, если однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений в A_0, а неоднородная задача разрешима в A для любой функции $f \in \mathrm{L}^\infty$.

Задача (1) называется нетеровой, если однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений в A_0, а для разрешимости неоднородной задачи в A_0 необходимо и достаточно существование функций $g_k(t) \in \mathrm{L}^1(T)$, $(k = 1, 2, ..., n)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_T f\,g_k\,dt = 0, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Теорема 3. Для того чтобы задача (1) была разрешима, необходимо и достаточно условие

$$T_0 = \emptyset. \tag{6}$$

Доказательство : Если (6) выполняется, то задача (1) разрешима в A для каждой функции $f \in \mathrm{L}^\infty$, и общее решение представимо в виде (3). Число линейно независимых решений однородной задачи в A_0 равно $\aleph$ при условии $\aleph \geq 1$. Если $\aleph < 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение. Остается установить, что при $T_0 \neq \emptyset$, задача (1) не является нормально разрешимой. Пусть $t_1 \in T_0$ и $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Известно (см. [3]), что для $|\tau - rt| < \varepsilon(1-r)$

$$\left|S^+(rt) - a(rt)\,S^-(r^{-1}t)\right| > c_0\,\left|S^+(rt)\right|\left(\frac{1-r}{|t_1 - rt|} + o(1-r)\right),$$

где $c_0 > 0$ – постоянная. Следовательно, для некоторой $c_1 > 0$ будем иметь

$$\left|S^+(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)\right| > c_1, \quad r \in (0,1). \tag{7}$$

Принимая во внимание, что

$$f_0(t) = \begin{cases} S^+(t), & \text{если} \quad t \in (t_1, t_1') \subset T \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (t_1, t_1'), \end{cases}$$

где t_1' удовлетворяет условию $t_k \notin (t_1, t_1')$, $k = 1, 2, ..., n$, покажем, что для $f(t) = f_0(t)$ задача (1) не имеет решения в A. Действительно, согласно Теореме 1, если существует решение, то оно имеет представление (2). Так как для любого полинома $P(z)$

$$|S^+(rt)\,P(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)P(r^{-1}t)| < \infty, \quad r \in (0,1),$$

то достаточно рассмотреть функцию

$$\Phi_0(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_{T_1}\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Из (1) имеем

$$\Phi_0^+(rt) - a(t)\,\Phi_0^-(r^{-1}t) = \frac{S^+(rt) - a(t)\,S^-(r^{-1}t)}{2\pi i}\int_{T_1}\frac{d\tau}{\tau - z} +$$
$$+ \frac{S^+(rt)}{2\pi i}\int P_r(t,\tau)\,d\tau = I_1(r,t) + I_2(r,t),$$

где $P_r(t,\tau)$ – ядро Пуассона. Имеем

$$|I_1(r,t_0)| = |S^+(rt_0) - a(t_0)\,S^-(r^{-1}t_0)|\,|\ln(t_0 - rt)|.$$

Следовательно, учитывая (7), получим

$$\lim_{r\to 1-0}|I_1(r,t)| = \infty.$$

Для завершения доказательства осталось учесть, что $\sup|I_2(r,t)| < \infty$, $r \in (0,1)$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Если функция $f \in L^\infty(T)$ обращается в нуль в некоторой окрестности V множества T_0, то задача (1) разрешима в A.

Действительно, пусть V_1 – некоторая окрестность множества T_0, не содержащая точек t_k, $t_k \in T_0$. Легко заметить, что для $t \in V\bigcap V_1$, функция $\Phi(rt)$ из (2) равномерно ограничена при $r \in (0,1)$. Следовательно, разность $\Phi^+(rt) - a(t)\,\Phi^-(r^{-1}t)$ равномерно ограничена при $t \in V\bigcap V_1$ и $r \in (0,1)$. Для $t \notin V\bigcap V_1$ равномерная ограниченность этой разности установлена в ходе доказательства Теоремы 3.

Теорема 4. Для того чтобы задача (1) была нетерова, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6).

Доказательство : Пусть (6) выполняется. Тогда нетеровость задачи (1) следует из Теоремы 2. Докажем, что если $T_0 \neq \emptyset$, то задача (1) не нетерова. Предположим обратное, т.е. что существуют функции $g_1, ..., g_n \in \mathrm{L}^1$ такие, что если

$$\int_T f(t)\, g_k(t)\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, ..., n,$$

то задача (1) разрешима в A_0. Применяя теорему Хана–Банаха заключаем, что существуют функции $f_k \in \mathrm{L}^\infty$, $k = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{2\pi} \int_T f_j(t)\, g_k(t)\, dt = \delta_{j,k}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Выберем функции $f_j' \in \mathrm{L}^\infty$, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности точки t_1 и удовлетворяют оценкам

$$\frac{1}{2\pi} \int_T f_k'(t)\, g_k(t)\, dt > 1 - \varepsilon, \quad k = 1, 2, ..., n \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi} \int_T f_j'(t)\, g_k(t)\, dt < \varepsilon, \quad j \neq k.$$

Пусть $f_0(t) \in \mathrm{L}^\infty$ – функция, для которой задача (1) (согласно Теореме 2) не разрешима в A. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ комплексные числа m_k, $k = 1, 2, ..., n$ можно выбрать так, чтобы имели место равенства

$$\int_T \sum_{j=1}^n m_j f_j'(t)\, g_k(t)\, dt = \int_T f_0(t)\, g_k(t)\, dt, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Положив

$$f_0'(t) = f_0(t) - \sum_{k=1}^n m_k\, f_k'(t),$$

можем записать

$$\int_T f_0'(t)\, g_k(t)\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Следовательно, для функции $f_0'(t)$ задача (1) разрешима в A_0. В силу Замечания 1, задача (1) разрешима в A для

$$f(t) = \sum_{k=1}^n m_k\, f_k'(t).$$

Следовательно, она разрешима в A для $f_0(t)$. Это противоречие завершает доказательство Теоремы 4.

ABSTRACT. Let A be the class of functions analytic outside the unit circle $T = \{z\colon |z| = 1\}$, having finite order at infinity. Let $\Phi^+(z)$ and $\Phi^-(z)$ stand for the restrictions of $\Phi \in \mathrm{A}$ on $D^+ = \{z\colon |z| < 1\}$ and $D^- = \{z\colon |z| > 1\}$ respectively. We consider the following problem : to find a function $\Phi \in \mathrm{A}$ satisfying the boundary condition $\lim\limits_{r \to 1-0} \left(\Phi^+(rt) - a(t)\, \Phi^-(r^{-1}t)\right) = f(t)$, where $f(t) \in \mathrm{L}^\infty(T)$ and $a(t) \not\equiv 0$ is a piecewise continuous in Hölder sense function on T. The limit is in the sense of weak convergence. In this paper we find the general solution of the problem and obtain necessary and sufficient conditions for normal solvability and Noetherian property of this problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана–Привалова со смещением в классе L^1", Изв. АН Армении, Математика, том 25, № 1, стр. 3 — 20, 1990.
2. Г. М. Айрапетян, "О задаче Гильберта в смысле $L^p(p > 1)$–сходимости", ДАН России, том 328, № 5, стр. 421 — 423, 1993.
3. Г. М. Айрапетян, "Об одной задаче сопряжения со сдвигом в классе L^p", Изв. АН Армении, Математика, том 25, № 4, стр. 394 — 400, 1990.

15 декабря 1997

Армянский государственный инженерный университет