ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, № 5, 1998

В статье исследуются "внутренние" и "внешние" свойства сильно гипоэллиптических многочленов. Получены необходимые и достаточные условия сильной гипоэллиптичности для класса многочленов с постоянными коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], где найдены необходимые и достаточные алгебраические условия строгой гипоэллиптичности многочленов с постоянными коэффициентами. Здесь мы исследуем внутренние (весовые функции, весовые множества) и внешние (характеристические многогранники) свойства сильно гипоэллиптических многочленов. Будем использовать следующие стандартные обозначения. $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ – n-мерные вещественные и комплексные евклидовы пространства

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \ \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\},$$

$$\mathbb{R}^n_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_j \neq 0, j = 1, ..., n\},$$

$\mathbb{Z}^n_+$ – n-мерное пространство мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ обозначим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \ ||\xi|| = \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right]^{1/2}, \ |\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \cdots |\xi_n|^{\alpha_n},$$

$$(\nu, \xi) = \sum_{j=1}^n \nu_j \xi_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, ..., n.$$

Для данного многочлена P с постоянными коэффициентами обозначим $\mathcal{D}(P) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : P(\xi) = 0\}$, а через $d_P(\xi)$ – расстояние точки ξ от множества $\mathcal{D}(P)$. Известно (см. [2], Лемма 4.1.1), что для любого многочлена P с постоянными коэффициентами существует постоянная $\chi = \chi_p > 0$ такая, что

$$\chi \geq d_P(\xi) \sum_{|\beta|>0} \left| \frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\beta|} \geq \chi^{-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \tag{0.1}$$

Определение 1. Многочлен $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, где $(P) = \{\alpha^j\}_1^r \subset \mathbb{Z}_+^n$, называется **гипоэллиптическим**, если для $||\xi|| \to \infty$

$$\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \to 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\beta| \neq 0.$$

Такие понятия, как характеристический многогранник, правильный и вполне правильный многогранник, главная грань многогранника, P-регулярная грань регулярности многочлена, можно найти в работах [3] — [5]. Известно, что характеристический многогранник гипоэллиптического многочлена вполне правильный. Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ обозначим через $\Lambda^{n-1}(\mathcal{N})$ множество внешних (относительно $\mathcal{N}$) $(n-1)$-мерных некоординатных граней многогранника $\mathcal{N}$. Через $\Lambda(\mathcal{N})$ обозначим множество всех внешних нормалей λ некоординатных граней с $\min\limits_j \lambda_j = 1$. Для многочлена P с постоянными коэффициентами множество

$$\mathcal{M}(P) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \exists c_\nu, M_\nu, \quad |\xi|^\nu \leq c_\nu d_P(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad ||\xi|| \geq M_\nu\}$$

называется **множеством регулярного веса гипоэллиптичности.** Если $\mathcal{M}(P)$ – многогранник, то функция

$$h_P(\xi) = \sum_{\nu \in \overline{\mathcal{M}}(P)} |\xi|^\nu,$$

где $\overline{\mathcal{M}}$ – множество вершин многогранника $\mathcal{M}$, называется **регулярным весом гипоэллиптичности.** Известно (см. [3], Лемма 3.5 и [5], Лемма 1.3), что если P – гипоэллиптический многочлен, то множество $\mathcal{M}(P)$ вполне правильно и

$$\mathcal{M}(P) \subset \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda) \leq 1, \quad \lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))\}, \tag{0.2}$$

а если P регулярен и его характеристический многогранник $\mathcal{N}(P)$ вполне регулярен, то

$$\mathcal{M}(P) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : (\nu, \lambda) \le 1, \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))\}. \tag{0.3}$$

Определение 2. Многочлен P называется сильно гипоэллиптическим, если он гипоэллиптичен и существует некоторая постоянная $c > 0$ такая, что

$$|P(\xi)| \le c\,(d_P(\xi) + 1)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где m – порядок многочлена P, т.е. $m = ord\, P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|$.

Лемма 0.1. Если P – сильно гипоэллиптический многочлен, то для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$ имеем

$$d(\lambda) \equiv \max_{\nu \in \mathcal{N}(P)} (\nu, \lambda) = ord\, P = m.$$

Доказательство : Для $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$ утверждение доказано в [6]. Пусть $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$ – любой фиксированный вектор. Покажем, что $d(\lambda) = m$. Для определенности предположим, что $\lambda_1 = 1$. Так как λ – нормаль к некоторой некоординатной грани многогранника $\mathcal{N}$, то существует вершина β такая, что $(\lambda, \beta) = d(\lambda)$ и $\beta_1 \ne 0$. Пусть $a \in \mathbb{R}^n_0$ – вектор, удовлетворяющий условию

$$q \equiv \sum_{\alpha \in (P):(\lambda,\alpha)=d(\lambda),\alpha_1 \ne 0} \gamma_\alpha \alpha_1 a_1^{\alpha_1 - 1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} \ne 0. \tag{0.4}$$

Рассмотрим многочлены P и $D_1 P$ на последовательности $\xi^s = a s^\lambda$, $s = 1, 2, \ldots$. Для некоторой постоянной $c_1 > 0$ и при достаточно больших s имеем

$$|P(\xi^s)| \le c_1 s^{d(\lambda)},$$

$$|D_1 P(\xi^s)| = \Bigg| \sum_{\substack{\alpha \in (P), \alpha_1 \ne 0 \\ (\lambda,\alpha) = d(\lambda)}} \gamma_\alpha \alpha_1 a_1^{\alpha_1 - 1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} S^{d(\lambda)-1} +$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \in (P), \alpha_1 \ne 0 \\ (\lambda,\alpha) < d(\lambda)}} \gamma_\alpha \alpha_1 a_1^{\alpha_1 - 1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} S^{(\alpha,\lambda)-1} \Bigg| \ge \frac{q}{2} S^{d(\lambda)-1}.$$

По предположению и в силу (0.1), при достаточно больших s

$$\infty > const \geq |P(\xi^s)|^{1/m} \left|\frac{D_1 P(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right| = \frac{|D_1 P(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|^{1-1/m}} \geq \frac{q}{2}\frac{S^{d(\lambda)-1}}{(c_1 S^{d(\lambda)})^{1-1/m}} =$$
$$= \frac{q}{2} c_1^{1/m-1} S^{d(\lambda)/m-1}.$$

Это соотношение приводит к утверждению Леммы 0.1, так как $d(\lambda) \geq m$ для $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$.

§1. МНОЖЕСТВО ВЕСА ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

Лемма 1.1. Пусть P – многочлен порядка m такой, что $\mathcal{M}^m(P) = \mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{N}(P)$ правильный. Тогда P – сильно гипоэллиптический многочлен.

Доказательство : Пусть ν^j, $j = 1, ..., k$ обозначают вершины многогранника $\mathcal{N}^{1/m}(P)$. Обозначим $h(\xi) = \sum_{j=1}^{k} |\xi|^{\nu^j}$. Для некоторой постоянной $c > 0$ имеем оценки

$$h(\xi) \leq c(d_P(\xi) + 1), \quad |P(\xi)| \leq c\left(\sum_{j=1}^{k} |\xi|^{\nu^j}\right)^m = ch^m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Они приводят к утверждению, так как $h(\xi) \to \infty$ при $||\xi|| \to \infty$.

Лемма 1.2. Если вполне правильный многогранник $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n_+$ имеет мультииндексные вершины и

$$d(\lambda^j) \equiv \max_{\nu \in \mathcal{N}}(\nu, \lambda^j) = \max_{\nu \in \mathcal{N}} |\nu| \equiv m, \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}),$$

то для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$ имеем $d(\lambda) = m$.

Доказательство : Рассмотрим многочлен $Q(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \xi^{2\alpha^j}$, где α^j, $j = 1, ..., k$ – вершины многогранника $\mathcal{N}$. Очевидно, что многочлен Q регулярен и $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}^2$ и $\Lambda(\mathcal{N}(Q)) = \Lambda(\mathcal{N})$. В силу (0.3) имеем

$$\mathcal{M}(Q) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \ (\nu, \lambda^j) \leq 1, \quad j = 1, ..., k\}.$$

Следовательно, $\mathcal{M}^{2m}(Q) = \mathcal{N}(Q)$. Отсюда, в силу Леммы 1.1, многочлен Q сильно гипоэллиптичен. Согласно Лемме 0.1, для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(Q))$ имеем

$$\max_{\nu \in \mathcal{N}(Q)} (\nu, \lambda) = 2m.$$

Так как $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}^2$, то Лемма 1.2 доказана.

Для вполне правильного многогранника $\mathcal{N}$ обозначим через $\mathcal{N}_i^k$, $i = 1, ..., M_k$ его k-мерные грани, $k = 0, 1, ..., n-1$, а через $\Lambda(\mathcal{N}_i^k)$ – множество $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N})$ нормалей к грани $\mathcal{N}_i^k$.

Лемма 1.3. Если некоординатная грань $\mathcal{N}_i^k$, $1 \le i \le M_k$, $0 < k \le n-1$ вполне правильного характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ порядка m P-нерегулярна и

$$\mathcal{N}(P) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \ (\nu, \lambda) \le m, \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))\}, \tag{1.2}$$

то существуют вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N}_i^k)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\mathcal{M}(P) \subset \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \quad (\nu, \lambda^0) \le 1 - \delta\}.$$

Доказательство : Пусть

$$\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N}_i^k) \setminus \bigcup_j \bigcup_{l=k+1}^{n-1} \Lambda(\mathcal{N}_j^l)$$

любой фиксированный вектор. Так как множество $(\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_i^k) \cap \mathbb{Z}_+^n$ конечно, то в силу Леммы 1.2 и выбора вектора λ^0, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\max_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_i^k) \cap \mathbb{Z}_+^n} (\alpha, \lambda^0) \le m - \varepsilon.$$

Так как грань $\mathcal{N}_i^k$ P-нерегулярна, то существует точка $r \in \mathbb{R}_0^n$ такая, что $\sum\limits_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha r^\alpha = 0$. Пусть $\xi^s = r s^{\lambda^0}$, $s = 1, 2, ...$ Для некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем

$$|P(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha (\xi^s)^\alpha + \sum_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_i^k) \cap (P)} \gamma_\alpha (\xi^s)^\alpha \right| =$$

$$= \left| S^{d(\lambda^0)} \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha r^\alpha + \sum_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_i^k) \cap (P)} \gamma_\alpha r^\alpha S^{(\alpha, \lambda^0)} \right| \le c_1 S^{m-\varepsilon},$$

для $s = 1, 2, ...$ Используя оценку (0.1), находим

$$d_P(\xi^s) \le c_2 |P(\xi^s)|^{1/m} \le c_2 c_1^{1/m} S^{1-\varepsilon/m}, \quad s = 1, 2, ...,$$

где $c_2 > 0$ – некоторая постоянная.

Следовательно, для $r \in \mathbb{R}_0^n$, $\nu \in \mathcal{M}(P)$ и достаточно больших s имеем $|r|^\nu S^{(\lambda^0, \nu)} = |\xi^s|^\nu \le c_3 d_P(\xi^s)$, где $c_3 > 0$ – постоянная. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. **Пусть главная грань $\mathcal{N}_i^k$, $1 \le i \le M_k$, $0 < k \le n-1$ вполне регулярного характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлена P порядка m, лежащая в $\mathbb{R}^d$, $d < n$ и не лежащая в подпространстве меньшей размерности, P-нерегулярна. Если $\mathcal{N}(P)$ удовлетворяет (1.2), то существуют вектор $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$ и число $\delta > 0$ такие, что**

$$\mathcal{M}(P) \subset \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \quad (\nu, \widetilde{\lambda}^0) \le 1 - \delta\},$$

где $\widetilde{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_d^0, 0, ..., 0)$.

Доказательство : Пусть $\mathcal{N}_1^{n-1}, ..., \mathcal{N}_l^{n-1}$ - $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathcal{N}(P)$, для которых $\mathcal{N}_i^k \subset \mathcal{N}_j^{n-1}$, $j = 1, ..., l$. Имеем

$$\mathcal{N}_i^k = \left\{ \nu : \quad \nu \in \mathcal{N}_0 \equiv \bigcap_{j=1}^{l} \mathcal{N}_j^{n-1}, \quad \nu_{d+1} = \cdots = \nu_n = 0 \right\}.$$

В силу Леммы 1.2 и конечности множества $(\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_0) \cap \mathbb{Z}_+^n$, существуют $\lambda^0 \in \Lambda(\mathcal{N}_0)$ и число $1 \ge \varepsilon > 0$, удовлетворяющие условию

$$\max_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_0) \cap \mathbb{Z}_+^n} (\alpha, \lambda^0) \le m - \varepsilon. \tag{1.3}$$

Для любого $\alpha \in \mathcal{N}_0 \cap \mathbb{Z}_+^n$, удовлетворяющего условию $\alpha_{d+1} + \cdots + \alpha_n \ne 0$, имеем

$$(\alpha, \widetilde{\lambda}^0) \le m - 1 \le m - \varepsilon. \tag{1.4}$$

По предположению, существует точка $r \in \mathbb{R}_0^n$ такая, что

$$0 = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha r^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha \widetilde{r}^\alpha, \tag{1.5}$$

где $\widetilde{r} = (r_1, ..., r_d, 0, ..., 0)$. Пусть $\xi^s = (r_1 s^{\lambda_1}, ..., r_d s^{\lambda_d}, r_{d+1}, ..., r_n)$, $s = 1, 2, ...$ В силу соотношений (1.3) — (1.5), с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем неравенство

$$|P(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^k \cap (P)} \gamma_\alpha (\xi^s)^\alpha + \sum_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_0) \cap (P)} \gamma_\alpha (\xi^s)^\alpha \right| \le c_1 S^{m-\varepsilon}$$

для $s = 1, 2, ...$ Остается применить рассуждение доказательства Леммы 1.3.

§2. ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ И ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

Пусть $P(\xi)$ – семиэллиптический многочлен с постоянными коэффициентами. Легко проверить, что $P(\xi)$ сильно гипоэллиптичен и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c^{-1} h_P(\xi) \leq d_P(\xi) \leq c h_P(\xi), \tag{2.1}$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

Оказывается, что если P многочлен, удовлетворяющий (2.1), а его характеристический многогранник удовлетворяет некоторому условию, то P вполне гипоэллиптический и регулярный многочлен.

Лемма 2.1. Если регулярный многочлен P с постоянными коэффициентами сильно гипоэллиптичен, то он удовлетворяет оценке (2.1).

Доказательство : По Лемме 0.1, из сильной гипоэллиптичности многочлена P следует

$$\mathcal{N}(P) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : \ (\nu, \lambda) \leq m \equiv ord\, P, \quad \lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))\}.$$

Так как P регулярен, из (0.3) получим $\mathcal{M}^m(P) = \mathcal{N}(P)$. Следовательно, для некоторых постоянных c_1, c_2, $c_3 > 0$

$$|P(\xi)| \leq c_1 \sum_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{N}}(P)} |\xi|^\alpha = c_1 \sum_{\nu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P)} |\xi|^{m\nu} \leq c_2 \left(\sum_{\nu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P)} |\xi|^\nu \right)^m =$$
$$= c_2 h_P^m(\xi) \leq c_3 [d_P(\xi) + 1]^m,$$

где $\widetilde{\mathcal{N}}(P)$ и $\widetilde{\mathcal{M}}(P)$ – множества вершин многогранников $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{M}(P)$, соответственно. Учитывая (0.1), мы завершаем доказательство.

Лемма 2.2. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен порядка m с вполне правильным характеристическим многогранником $\mathcal{N}(P)$, удовлетворяющим (2.1). Если

$$\bigcap_{j=1}^{l} \mathcal{N}_j^{n-1} \cap \mathbb{R}^k \neq \emptyset, \quad \lambda \in \Lambda\left(\bigcap_{j=1}^{l} \mathcal{N}_j^{n-1} \right),$$

то существует точка $\nu = (\nu_1, ..., \nu_k, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}(P)$ такая, что $(\nu, \lambda) = 1$.

Доказательство : Пусть $\xi^s = as^\lambda$, $s = 1, 2, \ldots$ и $a = (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$, $a_1, \ldots, a_k \neq 0$. Для некоторой постоянной $c_1 > 0$ и при достаточно больших s имеем

$$|P(\xi^s)| \geq c_1 s^{d(\lambda)}, \quad d(\lambda) = \max_{\nu \in \mathcal{N}(P)} (\nu, \lambda),$$

если только

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{N}_j^{n-1} \cap (P)} \gamma_\alpha a^\alpha \neq 0$$

(существование такого $a \in \mathbb{R}^n$ следует из вполне правильности многогранника $\mathcal{N}(P)$ и условия $\cap \mathcal{N}_j^{n-1} \cap \mathbb{R}^k \neq \emptyset$.) Так как для некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$|D^\alpha P(\xi^s)| \leq c_2 S^{d(\lambda) - (\alpha, \lambda)} \leq c_2 S^{d(\lambda) - |\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

то существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что при достаточно больших s

$$\sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right|^{1/|\alpha|} \leq c_3 s^{-1}.$$

В силу (0.1), при достаточно больших s имеем $d_P(\xi^s) \geq \dfrac{s}{\chi c_3}$, и так как P удовлетворяет (2.1), то $h_P(\xi^s) \geq c_4 s$, где $c_4 > 0$ – некоторая постоянная. Следовательно, используя формулу для $h_P(\xi)$, с некоторой постоянной $c_5 > 0$ и при достаточно больших s, получим

$$c_4 s \leq \sum_{\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P)} |\xi^s|^\mu = \sum_{\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P)} (as^\lambda)^\mu = \sum_{\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P) \cap \mathbb{R}^k} |a|^\mu s^{(\lambda, \mu)} \leq c_5 s^b,$$

$$b = \max_{\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}(P) \cap \mathbb{R}^k} (\mu, \lambda).$$

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – многочлен порядка m, удовлетворяющий (2.1). Тогда для некоторого $\nu \in \mathcal{M}(P)$ имеем $|\nu| = 1$.

Доказательство : Пусть

$$P_m(a) \equiv \sum_{\alpha \in (P), |\alpha| = m} \gamma_\alpha a^\alpha \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}_0^n.$$

Тогда при достаточно больших s

$$\sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{D^\alpha P(as)}{P(as)} \right|^{1/|\alpha|} \leq c_1 \sum_{\alpha \neq 0} \left[\frac{s^{m-|\alpha|}}{|s^m P_m(a) - o(s^m)|} \right]^{1/|\alpha|} \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{s^{m-|\alpha|}}{s^m} \right)^{1/|\alpha|} = c_3 s^{-1},$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$ – некоторые постоянные. Остается применить рассуждения доказательства Леммы 2.2.

Лемма 2.4. **Пусть** $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ **– многочлен порядка** m **с вполне правильным характеристическим многогранником** $\mathcal{N}(P)$, **удовлетворяющим** $d(\lambda) = m$ **при всех** $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$. **Если** P **удовлетворяет (2.1), то многочлен** P **регулярен.**

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует главная P-нерегулярная грань $\mathcal{N}_i^r$, $1 \leq i \leq M_r$, $0 < r \leq n-1$ характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$. Возможны два случая :

1) $\mathcal{N}_i^r$ – некоординатная главная грань,

2) $\mathcal{N}_i^r$ – координатная главная грань.

В случае 1) для некоторого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$ и числа $\delta > 0$ согласно Лемме 1.3, имеем $|\nu| \leq (\nu, \lambda) \leq 1 - \delta < 1$ при всех $\nu \in \mathcal{M}(P)$. Это противоречит утверждению Леммы 2.3. Рассмотрим случай 2). Для определенности предположим, что $\mathcal{N}_i^r \subset \mathbb{R}^k$ и $\mathcal{N}_i^r$ не лежит в подпространстве меньшей размерности. В силу Леммы 2.2 существуют вектор λ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\mathcal{M}(P) \subset \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^k \nu_j \lambda_j \leq 1 - \delta < 1 \right\}, \quad \lambda \in \Lambda \left(\bigcap_{j=1}^l \mathcal{N}_j^{n-1} \right),$$

где $\mathcal{N}_j^{n-1}$ – такие $(n-1)$-мерные некоординатные грани, для которых $\mathcal{N}_i^r$ является подгранью. Это противоречит утверждению Леммы 2.2. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. **Пусть** P **– многочлен порядка** m **с вполне правильным характеристическим многогранником** $\mathcal{N}(P)$, **удовлетворяющим (2.1). Тогда** P **гипоэллиптичен.**

Доказательство : Пусть $\xi_1^s = s$, $\xi_j^s = 0$, $j = 2, ..., n$, $s = 1, 2, ...$ Так как $\mathcal{N}$ вполне правильный, то для некоторой постоянной $c_1 > 0$ и достаточно больших s имеем

$$|P(\xi^s)| \geq c_1^{-1} s^{m_1}, \quad m_1 = ord\, P(\xi_1, 0, ..., 0) \geq 1,$$

$$|D^\alpha P(\xi^s)| \leq c_1 s^{m_1 - 1}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Следовательно, $(1/m, 0, ..., 0) \in \mathcal{M}(P)$. Аналогично, $(0, 1/m, 0, .., 0)$, ... $(0, ..., 0, 1/m) \in \mathcal{M}(P)$. Таким образом, для некоторой постоянной $c_2 > 0$ и достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$h_P(\xi) \geq c_3 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{1/m}.$$

Учитывая определение функции h_P, завершаем доказательство Леммы 2.5.

Теорема 2.1. **Пусть** $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ **– многочлен порядка** m **с вполне правильным характеристическим многогранником** $\mathcal{N}(P)$**, удовлетворяющим** $d(\lambda) = m$ **при всех** $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$**. Если** P **удовлетворяет (2.1), то** P **регулярен и сильно гипоэллиптичен.**

Доказательство : Регулярность многочлена P следует из Леммы 2.4. Гипоэллиптичность P следует из Леммы 2.5, а сильная гипоэллиптичность следует из Леммы 1.1 и (0.3).

Следующая теорема является непосредственным следствием Леммы 2.1 и Теоремы 2.1.

Теорема 2.2. **Пусть** P **– многочлен порядка** m **с вполне правильным характеристическим многогранником** $\mathcal{N}(P)$**. Тогда** P **регулярен и сильно гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда**

1) $d(\lambda) = ordP$ **для всех** $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$ **и**

2) **условие (2.1) выполняется.**

§3. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Предложение 3.1. **Пусть** $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ **есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка** m**. Если** $m_1 = ord\, P(\xi_1, 0, ..., 0) < m$**, то для любого мультииндекса** $\alpha \in (P)$ **с** $\alpha_1 \neq 0$ **имеем** $|\alpha| < m$**.**

Доказательство : Пусть $\mu \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$ – нормаль к некоторой $(n-1)$-мерной некоординатной грани, содержащая точку $(m_1, 0, ..., 0)$. По Лемме 0.1, $d(\lambda) = m$ для любого $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))$. Тогда $(\mu, (m_1, 0, ..., 0)) = m$, т.е. $\mu_1 > 1$. Так как $(\mu, \alpha) \leq m$ при всех $\alpha \in (P)$, имеем

$$|\alpha| < \mu_1 \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \leq (\mu, \alpha) \leq m, \quad \alpha \in (P), \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Следствие 3.1. Если $ord\, P(\xi_1, ..., \xi_m, 0, ..., 0) < ord\, P$, то для любого $\alpha \in \mathcal{N}(P) \cap \mathbb{Z}^n_+$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \neq 0$ имеем $|\alpha| < ord\, P$.

Доказательство : непосредственно следует из Предложения 3.1.

Предложение 3.2. Если для многочлена P порядка m имеем $m_i = ord\, P(0, ..., 0, \xi_i, 0, ..., 0) < m$, $i = 1, ..., n$, то P не является сильно гипоэллиптическим.

Доказательство : В силу Предложения 3.1, для любого мультииндекса $\alpha \in (P)$, удовлетворяющего $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, ..., n$, имеем $|\alpha| < m$. Следовательно, порядок многочлена $ordP < m$. Это противоречие доказывает утверждение.

Следствие 3.2. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m. Существует индекс $i \in \{1, ..., n\}$ такой, что порядок многочлена $P(0, ..., 0, \xi_i, 0, ..., 0) = m$.

Доказательство : непосредственно следует из Предложения 3.2.

Для многочлена $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ обозначим

$$I_P = \{i : 1 \leq i \leq n,\ \exists \alpha \in \mathcal{N}(P) \cap \mathbb{Z}^n_+,\ |\alpha| = m,\ \alpha_i \neq 0\}.$$

Следствие 3.3. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m. Для любого $i \in I_P$ имеем $ord\, P(0, ..., 0, \xi_i, 0, ..., 0) = m$.

Доказательство : непосредственно следует из Предложения 3.1.

Следствие 3.4. При условиях Следствия 3.3, $\lambda_i = 1$ для любого $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$.

Доказательство : следует из Следствия 3.3 и Леммы 0.1.

Лемма 3.1. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m. Тогда многочлен

$$Q(\xi) = \sum_{\alpha \in \widetilde{\mathcal{N}}(P)} \xi^{2\alpha},$$

где $\widetilde{\mathcal{N}}(P)$ – множество вершин характеристических многогранников $\mathcal{N}(P)$ многочлена P, сильно гипоэллиптичен.

Доказательство : Так как $\mathcal{N}(P) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : (\nu, \lambda) \leq m,\ \lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))\} = \mathcal{N}^{1/2}(Q)$ – вполне правильный и многочлен $Q(\xi)$ регулярен, то

$$\mathcal{M}(Q) = \{\nu \in \mathbb{R}^n_+ : (\nu, \lambda) \leq 1, \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{N}(P))\}.$$

Следовательно, $\mathcal{M}^{2m}(Q) = \mathcal{N}(Q)$, и в силу Леммы 1.1, многочлен $Q(\xi)$ сильно гипоэллиптичен.

Лемма 3.2. Если P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $1, ..., k \in I_P$, $k+1, ..., n \notin I_P$, то многочлен $P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})$ сильно гипоэллиптичен, где

$$\xi' = (\xi_1, ..., \xi_r), \quad \xi'' = (\xi_{r+1}, ..., \xi_k), \quad \xi''' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_l),$$

$$\xi^{IV} = (\xi_{l+1}, ..., \xi_n), \quad 1 \leq r \leq k < l \leq n.$$

Доказательство : Из сильной гипоэллиптичности многочлена P и в силу (0.1), при достаточно больших $\xi', \xi''' \in \mathbb{R}^{r+l-k}$ имеем

$$\chi^{-1} \leq |P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})|^{1/m} \sum_{\alpha \neq 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})}{P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})} \right|^{1/|\alpha|} \leq \chi.$$

Следовательно,

$$|P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})|^{1/m} \sum_{\alpha > 0, \alpha'' = \alpha^{IV} = 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})}{P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})} \right|^{1/|\alpha|} \leq \chi.$$

Пусть $Q(\xi', \xi''') = P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})$. Для некоторой постоянной $c_1 > 0$ и достаточно больших $||\xi'|| + ||\xi'''||$ получим $d_Q(\xi', \xi''') \geq c_1 |Q(\xi', \xi''')|^{1/m}$. Так как $ord\, Q = m$, то мы заключаем, что многочлен $Q(\xi', \xi''')$ сильно гипоэллиптичен, поскольку

$$d_Q(\xi', \xi''') \geq c_1 |Q(\xi', \xi''')| \to \infty \quad \text{для} \quad ||\xi'|| + ||\xi'''|| \to \infty.$$

Предложение 3.3. Пусть P — сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $1, ..., k \in I_P$, $k+1, ..., n \notin I_P$. Если α – вершина характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлена P, то $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 0$.

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует вершина $\alpha^0 \in \mathcal{N}(P)$, удовлетворяющая $\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$. Тогда существует $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$, удовлетворяющее условию

$$(\alpha^0, \lambda) > \max_{\beta \in (\mathcal{N}(P) \setminus \alpha^0) \cap \mathbb{Z}^n_+} (\beta, \lambda) \geq ((m, 0, ..., 0), \lambda) \geq m.$$

Это противоречит Лемме 0.1. Утверждение доказано.

Предложение 3.4. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $1,...,k \in I_P$, $k+1,...,n \notin I_P$. Если α – вершина характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ многочлена P, то либо $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$, либо $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0$.

Доказательство : Предположим обратное : $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \neq 0$ и $\alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_n \neq 0$. Для определенности предположим, что

$$\alpha_1 \cdots \alpha_r \neq 0, \quad \alpha_{r+1} = ... = \alpha_k = 0, \quad \alpha_{k+1} \cdots \alpha_l \neq 0,$$

$$\alpha_{l+1} = ... = \alpha_n = 0, \quad 1 \leq r \leq k < l \leq n.$$

Согласно Лемме 3.2 многочлен $Q(\xi', \xi''') = P(\xi', 0'', \xi''', 0^{IV})$ сильно гипоэллиптичен, и точка (α', α''') является вершиной многогранника $\mathcal{N}(Q)$. С другой стороны, в силу Предложения 3.3, многочлен $Q(\xi', \xi''')$ не может быть сильно гипоэллиптическим, поскольку $\alpha_1 \cdots \alpha_r \cdot \alpha_{k+1} \cdots \alpha_l \neq 0$. Это противоречие доказывает утверждение.

Замечание. При условиях Предложения 3.4 можно доказать большее, а именно, если α – вершина многогранника $\mathcal{N}(P)$ и $\alpha_j \neq 0$ для некоторого j, $1 \leq j \leq k$, то $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{j-1} = \alpha_{j+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, т.е. $\alpha = (0, \cdots, 0, m, 0, \cdots, 0)$.

Предложение 3.5. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $\lambda^0 = (1, ..., 1) \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$. Тогда $\mathcal{N}(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n_+ : |\alpha| \leq m\}$.

Доказательство : Пусть λ^0 – нормаль к некоординатной грани $\mathcal{N}^k_i$, $i = 1, ..., M_k$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Для любого индекса j, $1 \leq j \leq n$, существует мультииндекс $\alpha^j \in \mathcal{N}^k_i$ такой, что $\alpha^j_j \neq 0$. В силу Леммы 0.1 имеем $|\alpha^j| = m$. Тогда, согласно Следствию 3.3, получим, что порядок многочлена $P(0, ..., 0, \xi_j, 0, ..., 0) = m$, $j = 1, ..., n$. Следовательно, $\mathcal{N}(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n_+ : |\alpha| \leq m\}$.

Предложение 3.6. Пусть P есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $1, ..., n-1 \in I_P$, $n \notin I_P$. Существует вектор λ, $\min\limits_j \lambda_j = 1$ такой, что для характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ имеем $\mathcal{N}(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n_+ : (\alpha, \lambda) \leq m\}$.

Доказательство : Пусть $\lambda = (1, ..., 1.m/m_n)$, где $m_n = ord\, P(0, ..., 0, \xi_n) \leq m$. Покажем, что $\mathcal{N}(P) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n_+ : (\alpha, \lambda) \leq m\}$. Предполагая обратное, заключаем, что существует вершина $\alpha \in \mathcal{N}(P)$, для которой $(\alpha, \lambda) > m$. Так как для любого $\beta \in \mathcal{N}(P)$ имеем $|\beta| \leq m$, то получаем $\alpha_n \neq 0$. С другой стороны, так как $\mathcal{N}(P)$ – вполне правильный, имеем $\alpha_n < m_n$. Следовательно, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \neq 0$. Это противоречит Предложению 3.4. Утверждение доказано.

Предложение 3.7. **Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $\lambda = (1, ..., 1, \lambda_{r+1}, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\mathcal{N}(P))$, $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_n > 1$. Если для некоторого $\tau \in \mathbb{R}^n$, $||\tau|| \neq 0$**

$$P_{m(\lambda)}(\tau) = \sum_{\alpha\in(P),(\alpha,\lambda)=m} \gamma_\alpha \tau^\alpha = 0,$$

то для любого мультииндекса β, $|\beta| \leq m - 1$ имеем

$$\beta_{r+1} = \cdots = \beta_n = 0, \quad D^\alpha P_{m(\lambda)}(\tau) = 0.$$

Доказательство : Пусть $l = \min |\alpha|$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_r, 0, ..., 0)$, $D^\alpha P_{m(\lambda)}(\tau) \neq 0$. Очевидно, что $l \leq m$. Покажем, что $l = m$. Пусть $\xi^s = \tau s^\lambda$, $s = 1, 2, ...$ При достаточно больших s имеем

$$|P(\xi^s)| \leq c s^{m-1}, \qquad \sum_{|\alpha|=l,\alpha_{r+1}=...=\alpha_n=0} |D^\alpha P(\xi^s)| \geq c^{-1} s^{m-l},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная. Из сильной гипоэллиптичности и в силу (0.1), получим

$$const \geq |P(\xi^s)|^{1/m} \sum_{|\alpha|=l,\alpha_{r+1}=...=\alpha_n=0} \left|\frac{D^\alpha P(\xi^s)}{P(\xi^s)}\right|^{1/l} \geq$$

$$\geq \sum_{|\alpha|=l,\alpha_{r+1}=...=\alpha_n=0} \frac{|D^\alpha P(\xi^s)|^{1/l}}{|P(\xi^s)|^{1/l-1/m}} \geq \frac{c^{-1} s^{(m-l)/l}}{c s^{(m-1)(1/l-1/m)}} = c^{-2} s^{1/l-1/m}.$$

Следовательно, $l \geq m$. Предложение 3.7 доказано.

Теорема 3.1. **Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ есть сильно гипоэллиптический многочлен порядка m и $1, ..., k \in I_P$, $k + 1, ..., n \notin I_P$. Если все**

главные координатные грани характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$ P-регулярны, то многочлен P регулярен.

Доказательство : Предположим обратное, т.е. что существует некоординатная грань $\mathcal{N}_i^r$, $1 \le i \le M_r$, $0 < r \le n-1$ характеристического многогранника $\mathcal{N}(P)$, которая P-нерегулярна. Пусть $\lambda \in \Lambda(\mathcal{N}_i^r)$ – нормаль к грани $\mathcal{N}_i^r$, которая не является нормалью грани размерности больше чем r. Так как $k < n$, в силу Предложения 3.3 и Следствия 3.4, существует индекс j, $k < j \le n$, для которого $\lambda_j > 1$. Для определенности предположим, что

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & 1 \le i \le q, \\ \lambda_j > 1 & i > q; \end{cases} \quad n > q \le k.$$

Многочлен P можно представить в виде $P(\xi) = P_{m(\lambda)}(\xi) + R(\xi)$, где

$$P_{m(\lambda)}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{N}_i^r \cap (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad R(\xi) = \sum_{\alpha \in (\mathcal{N}(P) \setminus \mathcal{N}_i^r) \cap (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

В силу Леммы 0.1 и выбора вектора λ $(\alpha, \lambda) = m$, $(\beta, \lambda) < m$, $\alpha \in \mathcal{N}_i^r$, $\beta \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_i^r$. Так как $\lambda_{q+1}, ..., \lambda_n > 1$, то для любого $\alpha \in \mathcal{N}_i^r \cap (P)$, удовлетворяющего $\alpha_{q+1} + \dots + \alpha_n \ne 0$, имеем $\alpha_1 + \dots + \alpha_q \le m - 2$. Следовательно, для любого мультииндекса β, удовлетворяющего $|\beta| = m-1$ и $\beta_{q+1} = \dots = \beta_n = 0$

$$D^\beta P_{m(\lambda)}(\xi) = D^\beta P_{m(\lambda)}(\xi', 0''), \quad \xi' = (\xi_1, ..., \xi_q), \quad \xi'' = (\xi_{q+1}, ..., \xi_n).$$

Так как по предположению грань $\mathcal{N}_i^r$ P-нерегулярна, то существует точка $\tau \in \mathbb{R}_0^n$ такая, что $P_{m(\lambda)}(\tau) = 0$. Используя формулу Эйлера, получим

$$P_{m(\lambda)}(\tau', 0'') = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_q = m-1} D^\alpha P_{m(\lambda)}(\tau', 0'') \frac{(\tau')^\alpha}{\alpha!} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_q = m-1} D^\alpha P_{m(\lambda)}(\tau) \frac{(\tau')^\alpha}{\alpha!} = 0.$$

Таким образом, главная координатная грань, проходящая через точки $\alpha \in (P)$ с $\alpha_{q+1} = \dots = \alpha_n = 0$, P-нерегулярна (такие точки существуют, т.к. из условия $1 \in I_P$ следует, что $(m, 0, ..., 0) \in (P)$). Это противоречие доказывает Теорему 3.1.

ABSTRACT. The paper presents "inner" and "outer" conditions of strong hypoellipticity for polynomials. Necessary and sufficient conditions of strong hypoellipticity for a class of polynomials with constant coefficients are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Маргарян, "О сильно гипоэллиптических многочленах", Изв. АН Армении, Математика, том 31, № 5, стр. 10 – 27, 1996.
2. Л. Хермандер, Линейные Дифференциальные Операторы с Частными Производными, Москва, Мир, 1963.
3. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О весе гипоэллиптичности многочленов", Межвуз. сб. науч. трудов, том 4, 1986.
4. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоэллиптичности", Мат. сборник, том 11, стр. 339 – 356, 1985.
5. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 58 – 81, 1967.
6. Г. Г. Казарян, "Строго гипоэллиптические операторы с постоянными коэффициентами", Мат. сборник, том 183, № 2, 1992.

18 марта 1997 Ереванский государственный университет