ВАЛЮАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, No. 4, 1998

Используя разложение Комбинаторной Интегральной Геометрии, мы определяем класс валюаций в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ евклидовых прямых в $\mathbb{R}^3$. Статья изучает возможность продолжения валюаций до знакопеременных мер и неотрицательных мер в пространстве $\mathbb{\Gamma}$. Полученные результаты используются для описания метрик в $\mathbb{R}^3$, для которых евклидовы прямые суть геодезические.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Валюации (конечно–аддитивные функционалы) в пространствах интегральной геометрии впервые рассматривались в книге [1]. Там валюации использовались главным образом с целью вычисления значений мер на множествах из "колец Сильвестра" в соответствующих пространствах. В недавних статьях на эту тему основной задачей являлось нахождение условий, которые гарантируют существование знакопеременных мер, чьи значения на множествах из кольца Сильвестра совпадают со значениями валюаций на тех же множествах. Прежде всего сошлемся на статью [5], в которой рассматривались валюации в пространстве прямых на евклидовой плоскости и на статью [8], где изучались валюации в пространствах так называемых прегеодезических кривых на двумерных многообразиях. Статьи [3], [9], [10] касаются валюаций в пространстве $\mathbb{E}$ плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Первая попытка рассмотрения валюаций в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$ сделана Р. В. Амбарцумяном в [4].

Много интересных геометрических результатов было получено этим путем, в частности результаты, касающиеся проблемы описания метрик в стиле четвертой проблемы Гильберта. В настоящей статье рассматривается аналогичная проблематика.

Валюации Ψ_F, которые мы рассматриваем, определены на кольце Сильвестра в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ прямых в $\mathbb{R}^3$ и зависят от линейно–аддитивных сегментных функций $F(\nu)$. Такие валюации рассматривались Р. В. Амбарцумяном в [1], стр. 186 и в [4].

В параграфах 2 — 4 подробно строятся кольцо Сильвестра в пространстве $\mathbb{\Gamma}$ и валюация Ψ_F (см. [4]). Параграфы 5 и 6 содержат основной результат статьи. Рассмотрим сегментные функции $F(\nu)$ вида

$$F(\nu) = \int_\nu \rho(P, \Omega)\, dl, \tag{1.1}$$

где $\rho(P, \Omega)$ — "флаговая функция", зависящая от $P \in \mathbb{R}^3$ и пространственного направления Ω. Сегмент ν есть интегрирование по P, т.е. $P \in \nu$ и dl — мера длины на ν. В интеграле (1.1) параметр Ω совпадает с направлением ν. В этом классе, при некоторых предположениях гладкости на ρ, находим необходимое и достаточное условие для продолжения Ψ_F до знакопеременной меры на борелевских множествах пространства $\mathbb{\Gamma}$. Это условие, имеющее вид дифференциального уравнения, аналог результата для плоскости, полученного в [5]. Следующее дополнительное условие на ρ гарантирует неотрицательность знакопеременной меры : для каждого фиксированного P функция ρ как функция от Ω должна быть выпуклой. В случае, когда и дифференциальное уравнение и условие выпуклости удовлетворяются, $F(\nu)$ оказывается метрикой в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовые прямые суть геодезические. Согласно этому замечанию результаты настоящей статьи относятся к четвертой проблеме Гильберта в $\mathbb{R}^3$.

§2. КОЛЬЦО СИЛЬВЕСТРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^3$

В статье используются следующие обозначения :

$\mathbb{\Gamma}$ = пространство прямых в $\mathbb{R}^3$;

γ = прямая в $\mathbb{R}^3$ (элемент пространства $\mathbb{\Gamma}$) ;

π = *пластина* = ограниченное выпуклое подмножество на плоскости из $\mathbb{R}^3$;

$\partial\pi$ = граница пластины π ;

$[\pi] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ не пересекает $\partial\pi$, но пересекает внутренность $\pi\}$;

$[\partial\pi] = \partial[\pi] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ пересекает $\partial\pi\}$;

$\{\pi_i\}$ = конечная совокупность пластин в $\mathbb{R}^3$.

Любая конечная совокупность $\{\pi_i\}$ пластин в $\mathbb{R}^3$ порождает отношение эквивалентности в $\mathbb{\Gamma}$: прямые $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{\Gamma}$, не пересекающие $\partial\pi_i$, назовем эквивалентными, если они пересекают одни и те же пластины.

Множество эквивалентных прямых назовем *атомом*, если его замыкание компактно.

Для заданной совокупности $\{\pi_i\}$ через $\mathrm{Sr}\{\pi_i\}$ (кольцо Сильвестра) обозначим минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{\Gamma}$, содержащее все атомы.

Два множества $A_1, A_2 \subset \mathbb{\Gamma}$ назовем эквивалентными, если их симметричная разность $A_1 \Delta A_2$ принадлежит $\cup_i[\partial\pi_i]$ для некоторой конечной системы пластин $\{\pi_i\}$.

Для заданного $A \subset \mathbb{\Gamma}$ обозначим через A^* класс множеств эквивалентных множеству A.

Лемма 1. *Пусть $\{\pi_i\}$ и $\{\delta_i\}$ — два конечных множества пластин в $\mathbb{R}^3$. Для каждого $A \in Sr\{\pi_i\}$ существует эквивалентное множество в $Sr(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\})$.*

Доказательство : Достаточно рассмотреть случай, когда множество $\{\delta_i\}$ содержит единственную пластину δ_1. Так как $A \in \mathrm{Sr}\{\pi_i\}$ можно представить как объединение атомов, то достаточно доказать лемму для случая, когда A есть атом. Но в этом случае A эквивалентно объединению двух атомов $\mathrm{Sr}(\{\pi_i\} \cup \delta_1)$: $A_1 = A \bigcap [\delta_1]$, $A_2 = A \bigcap [\delta_1]^c$ (^{c} обозначает дополнение). Лемма доказана.

Определим $\mathrm{Sr}^*\{\pi_i\} = \{A^* : A \in \mathrm{Sr}\{\pi_i\}$ и положим $U^*_{\mathbb{\Gamma}} = \cup\, \mathrm{Sr}^*\{\pi_i\}$, где объединение берется по всем конечным подмножествам $\{\pi_i\} \subset \mathbb{R}^3$.

Лемма 2. *$U^*_{\mathbb{\Gamma}}$ есть кольцо относительно операций объединения и разности, определяемые как*

$$A^* \cup B^* = (A \cup B)^*, \quad A^* \setminus B^* = (A \setminus B)^*.$$

Доказательство : Из $A^*, B^* \in U^*_{\mathbb{\Gamma}}$ следует существование конечных множеств $\{\pi_i\}$, $\{\delta_i\} \subset \mathbb{R}^3$ таких, что $A \in \mathrm{Sr}\{\pi_i\}$ и $B \in \mathrm{Sr}\{\delta_i\}$. Согласно Лемме 1 существуют $A', B' \in \mathrm{Sr}(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\})$, $A' \in A^*$, $B' \in B^*$. Из свойства кольца

$$A' \cup B',\ A' \setminus B' \in \mathrm{Sr}(\{\pi_i\} \cup \{\delta_i\}).$$

Утверждение леммы следует из соотношений

$$(A' \cup B')^* = (A \cup B)^*, \quad (A' \setminus B')^* = (A \setminus B)^*.$$

В следующих параграфах мы не отличаем классы из $U^*_{\mathbf{\Gamma}}$ и элементы из этих классов.

§3. ВАЛЮАЦИЯ Ψ_F

Наше построение валюации Ψ_F основывается на понятии валюации Φ, определенной для пространства прямых на плоскости в [4] и [5]. Начнем с некоторых основных обозначений, а затем напомним факты, относящиеся к валюации Φ. Пусть

$\mathbb{E}$ = пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, $e \in \mathbb{E}$;

de = мера в $\mathbb{E}$, инвариантная относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^3$;

$d\gamma$ = мера в $\mathbb{\Gamma}$, инвариантная относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^3$;

$\mathbf{G}_e$ = пространство прямых на плоскости e в $\mathbb{R}^3$;

$d_e g$ = мера в $\mathbf{G}_e$, инвариантная относительно евклидовых движений, которые оставляют плоскость e неподвижной;

ν = *игла* (прямолинейный отрезок) в $\mathbb{R}^3$.

Флаг f в $\mathbb{R}^3$ — пара (P, γ), содержащая точку $P \in \mathbb{R}^3$ и прямую γ с пространственным направлением Ω, проходящую через точку P. Также будем писать $f = (P, \Omega)$, $P \in \mathbb{R}^3$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$, где $\mathcal{E}_2$ — проективная (эллиптическая) плоскость. Для заданной флаговой функции $\rho(f) = \rho(P, \Omega)$ рассмотрим семейство сегментных функций, определенных для отрезков $\nu \subset \mathbb{R}^3$

$$F(\nu) = \int_\nu \rho(l, \Omega)\, dl. \tag{3.1}$$

В этом интеграле l обозначает одномерную координату точки $P \in \nu$, Ω — направление ν, а dl — мера Лебега на ν. Используем также обозначение $F(\nu) = F(P_1, P_2)$, где $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ — концы отрезка ν.

Пусть $\{P_i\}_e$ — конечное множество точек на плоскости e. Через $[P_i, P_j]_e$ обозначим множество прямых в e, отделяющие (внутри e) P_i от P_j. Рассмотрим кольцо

$$\mathrm{Sr}\{P_i\}_e = \text{минимальное кольцо подмножеств } \mathbf{G}_e, \text{ содержащее все множества вида } [P_i, P_j]_e.$$

Определим кольцо $U_e = \cup \mathrm{Sr}\{P_i\}_e$. Объединение берется по всем возможным конечным множествам из $\{P_i\}_e$ (строго говоря, каждое $A \in U_e$ определяется некоторым классом эквивалентности множеств, см. [4]). Для каждого $A \in U_e$ определим функционал

$$\Phi_e(A) = \sum_{i<j} c_{ij}(A)\, F(P_i, P_j), \tag{3.2}$$

где коэффициенты $c_{ij}(A)$ вычисляются с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм (см. [4]) :

Шаг 1. Из $A \in U_e$ следует, что существует конечное множество $\{P_i\}_e$ такое, что $A \in \mathrm{Sr}\{P_i\}_e$. Выберем одно из таких множеств $\{P_i\}_e$ (выбор не единственный).

Шаг 2. Пусть $g_{ij} \in \mathbf{G}_e$ — прямая, проходящая через точки P_i, $P_j \subset \{P_i\}_e$. Будем говорить, что 2-х элементное множество $\{P_i, P_j\}$ принадлежит классу Sep, если существует точка $P_s \in \{P_i\}_e$, лежащая на прямой g_{ij} между точками P_i и P_j. Предположим, что $\{P_i, P_j\}$ не принадлежит Sep. Рассмотрим четыре атома, которые обозначим через $\{i^+, j^-\}$, $\{i^-, j^+\}$, $\{i^+, j^+\}$ и $\{i^-, j^-\}$. По определению, прямая g_{ij} принадлежит границе всех четырех выше упомянутых атомов; оба атома $\{i^+, j^-\}$ и $\{i^-, j^+\}$ суть подмножества $[P_i, P_j]_e$; оба атома $\{i^+, j^+\}$ и $\{i^-, j^-\}$ суть подмножества $[P_i^*, P_j^*]_e$, где P_i^* и P_j^* суть две экстремальные точки из $\{P_i\}_e$, лежащие на прямой g_{ij}. Если $\{P_i, P_j\}$ не принадлежат Sep, то две пары атомов однозначно определены. Для каждого $A \in \mathrm{Sr}\{P_i\}_e$, его индикаторная функция $I_A(g)$, $g \in \mathbf{G}_e$ остается постоянной на атомах. Через $I_A(i^+, j^-)$, $I_A(i^-, j^+)$, $I_A(i^+, j^+)$ и $I_A(i^-, j^-)$ обозначим значения $I_A(g)$ на соответствующих атомах из 4-х элементного множества, описанного выше.

Шаг 3. Положим

$$c_{ij}(A) = \begin{cases} 0, & \{P_i, P_j\} \in Sep, \\ \dfrac{1}{2}\left[I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-)\right], & \{P_i, P_j\} \notin Sep. \end{cases} \tag{3.3}$$

Как показано в [5], *если интегралы (3.1) существуют, то функционал Φ_e совместно определяется валюацией на U_e*, т.е. $\Phi_e(A)$ не зависит от результата Шага 1.

Используем Φ_e для определения функционала на $U_{\mathbb{\Gamma}}$. Для каждого $B \in U_{\mathbb{\Gamma}}$ положим

$$\Psi_F(B) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \Phi_e(B \cap e)de. \tag{3.4}$$

Теорема 1. *Если для флаговой функции ρ сегментные функции (3.1) определены, то функционал $\Psi_F(B)$ — валюация на $U_{\mathbb{\Gamma}}$. Если для каждой $e \in \mathbb{E}$ валюация Φ_e продолжается до знакопеременной меры в $\mathbf{G}_e$, обладающей непрерывной плотностью $h_e(g)$, то Ψ_F продолжается до знакопеременной меры в $\mathbb{\Gamma}$.*

Доказательство : Для почти всех плоскостей e множество $B \cap e$ принадлежит кольцу $\mathrm{Sr}\{\cup_i \partial\pi_i \cap e\}_e$. Следовательно, первое утверждение следует из факта, что Φ_e является валюацией на U_e и линейности операции интегрирования (3.4). Второе утверждение следует из уравнения

$$h_e(g)ded_eg = h_\phi(\gamma)\,d\gamma\,d\phi.$$

Функция $h_\phi(\gamma)$ нуждается в определении. Для пары (e, g), где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in \mathbf{G}_e$, рассмотрим дуальное представление $(e, g) = (\gamma, \phi)$. Определим прямую $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, совпадающую с $g \in \mathbf{G}_e$, а ϕ — угол вращения e вокруг γ. Эта двойственное соотношение взаимно–однозначно. Далее, положим $h_\phi(\gamma) = h_e(g)$ для $(e, g) = (\gamma, \phi)$.

При дополнительных предположениях гладкости, необходимое и достаточное условие для порождения знакопеременной меры с помощью функционала Φ_e в пространстве $\mathbf{G}_e$ может быть записано для каждой $e \in \mathbb{E}$, см. [5], [6]. Это условие имеет вид дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\rho(P,\Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2\rho(P,\Omega)}{\partial_\Omega P\,\partial_e\Omega}, \tag{3.5}$$

которое должно выполняться для всех точек $P \in \mathbb{E}$ и направлений Ω, лежащих в e. В (3.5) n — направление, перпендикулярное к Ω, лежащее внутри плоскости e, а $\dfrac{\partial}{\partial_e\Omega}$ обозначает производную по аргументу Ω внутри направлений, ограниченных плоскостью e.

Следствие 1. Если $\rho(P,\Omega)$ — гладкая (три раза непрерывно дифференцируемая по обоим аргументам) и удовлетворяет уравнению (3.5) для всех флагов (P,Ω), тогда валюация Ψ_F порождает знакопеременную меру в пространстве $\mathbb{\Gamma}$.

В §6 доказано, что уравнение (3.5) является также и *необходимым* условием для порождения меры по Ψ_F.

§4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВАЛЮАЦИИ Ψ_F

Этот параграф по существу обобщает результат, полученный в [1], стр. 186. Начнем с некоторых дальнейших обозначений, определений и свойств из интегральной геометрии.

Клин есть пара $w = (\nu, V)$, где $\nu \subset \gamma$ — игла, V — замкнутая дуга окружности $\mathcal{E}_1(\nu) = \mathcal{E}_1(\gamma) = \mathcal{E}_1(\Omega)$ длины π, которая представляет пространство плоских направлений, ортогональных к γ. Каждому клину w соответствуют две бесконечные двугранные области, каждая из которых ограничена двумя плоскостями, проходящими через отрезок ν, ориентации которых соответствуют концам V. Задавая *флаговую функцию* $\rho(f)$, рассмотрим *функции клина*

$$W(w) = \int_V \sin\lambda_1 \, \sin\lambda_2 F(\nu)\, d\phi, \tag{4.1}$$

где функция F определена по (3.1) и $d\phi$ — мера на $\mathcal{E}_1(\nu)$, инвариантная относительно вращений ; λ_1 и λ_2 — углы между $\phi \in V$ и концами дуги V.

Используем следующие геометрические конструкции, связанные с парой пластин π_1, π_2 в общем расположении в $\mathbb{R}^3$. С каждой $(l_1, l_2) \in \partial\pi_1 \times \partial\pi_2$ связываем две плоскости $e_1(l_1,l_2)$ и $e_2(l_1,l_2)$. По определению, $e_i(l_1,l_2)$ содержит прямую (l_1,l_2) и прямую касательную к $\partial\pi_i$ в точке l_i, $i = 1,2$. Также, с каждой $(l_1,l_2) \in \partial\pi_1 \times \partial\pi_2$ связываем два клина $w^+ = (\nu, V^+)$ и $w^- = (\nu, V^-)$. Эти два клина имеют общую иглу ν, концами которой являются l_1 и l_2, а концы дуг V^+, V^- соответствуют плоскостям $e_1(l_1,l_2)$ и $e_2(l_1,l_2)$.

Пусть (π_i) обозначает множество плоскостей, пересекающих π_i. Для описания плоскостей из $(\pi_1) \cap (\pi_2)$ будем *локально* использовать параметры $e = (l_1, l_2, \phi)$, где $l_i = e \cap \partial\pi_i$, $i = 1,2$, и ϕ — угол вращения плоскости e вокруг прямой, проходящей через l_1 и l_2. В терминах этих параметров мера de имеет вид (см.

[2])

$$de = \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \, d\phi \, dl_1 \, dl_2, \tag{4.2}$$

где dl_1, dl_2 — меры длины на $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$; ψ_1, ψ_2 — углы между прямой, проходящей через l_1 и l_2 и направлениями касательных прямых к $\partial\pi_1$ и $\partial\pi_2$ в точках l_1 и l_2, соответственно; $|l_1, l_2|$ — евклидово расстояние между l_1 и l_2; λ_1, λ_2 — плоские углы между плоскостью $e(\phi)$ и плоскостями $e_1(l_1, l_2)$ и $e_2(l_1, l_2)$. В случае, когда пластины π_1, π_2 совпадают с единственной пластиной π, (4.2) сводится к

$$de = \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \sin^2\lambda \, d\phi \, dl_1 \, dl_2, \tag{4.3}$$

где l_1, $l_2 \in \partial\pi$ и λ — плоский угол между плоскостью e и плоскостью пластины π. В этом случае один из двух клипов w^+, w^- имеет угловую меру π, а другой 0.

Вернемся к получению желаемого эквивалентного представления для Ψ_F.
Для каждого $B \in U_{\mathbf{\Gamma}}$ выберем множество пластин $\{\pi_i\}$ такое, что $B \in \mathrm{Sr}\{\pi_i\}$. Легко убедиться, что множество $B \cap e$ принадлежит кольцу $\mathrm{Sr}\{\partial\pi_i \cap e\}_e$, определенному в $\mathbf{G}_e$. Подставим значение Φ_e :

$$\Phi_e(B \cap e) = \sum_I c(\nu_i) \, F(\nu_i) + \sum_{II} c(\nu_i) \, F(\nu_i), \tag{4.4}$$

где ν_i — иглы, концы которых принадлежат множеству $\{\partial\pi_i \cap e\}$. Сумма $\sum_I$ распространяется на все иглы ν_i, концы которых принадлежат одной и той же пластине, $\sum_{II}$ – по дополнительному множеству игл. Из (4.3) получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{E}} de \sum_I c(\nu_i) \, F(\nu_i) = \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{e \cap \pi_i \neq \emptyset} c(\nu_i) \, F(\nu_i) \, de =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\partial\pi_i} \int_{\partial\pi_i} \int_0^\pi c_B(l_1, l_2, \phi) \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \sin^2\lambda \, F(l_1, l_2) \, dl_1 \, dl_2 \, d\phi, \tag{4.5}$$

а из (4.2)

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{E}} de \sum_{II} c(\nu_i) \, F(\nu_i) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \sum_{i<j} \int_{\partial\pi_i} \int_{\partial\pi_j} \int_0^\pi c_B(l_1, l_2, \phi) \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \, F(l_1, l_2) \, dl_1 \, dl_2 \, d\phi. \tag{4.6}$$

Прямое использование Алгоритма доказывает, что для почти всех l_1, l_2 значение $c_B(l_1, l_2, \phi)$ в (4.5) независит от λ. Аналогично, коэффициенты $c_B(l_1, l_2, \phi)$ в (4.6), которые вычисляются по (3.3) для плоскости $e = (l_1, l_2, \phi)$ остаются постоянными на множествах $\phi \subset V^+$ и $\phi \subset V^-$:

$$c_B(l_1, l_2, \phi) = \begin{cases} c_B^+(l_1, l_2), & \text{если} \quad \phi \in V^+ \\ c_B^-(l_1, l_2), & \text{если} \quad \phi \in V^-. \end{cases}$$

Следовательно, разумно рассмотреть функцию клина

$$\begin{aligned} W(w) &= \int_V \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 F(\nu)\, d\phi = \int_V \sin\phi \sin(V - \phi)\, F(\nu)\, d\phi = \\ &= \frac{F(\nu)}{2} (\sin V - V \cos V). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Результат интегрирования (4.4) представляется в виде

$$\Psi_F(B) = \sum_{i \le j} \frac{1}{\pi} \int_{\partial\pi_i} \int_{\partial\pi_j} \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{|l_1, l_2|} \left[c_B^+(l_1, l_2)\, W(w^+) + c_B^-(l_1, l_2)\, W(w^-)\right] dl_1\, dl_2. \tag{4.8}$$

Важное следствие этого выражения состоит в том, что в левой части зависимость от флаговой функции ρ входит только через функцию клина W.

§5. ПОРОЖДЕНИЕ МЕРЫ ПО Ψ_F

В этом параграфе покажем, что если функционал Ψ_F, заданный по (4.8), допускает продолжение до знакопеременной меры в $\mathbb{\Gamma}$, тогда флаговая функция ρ необходимо удовлетворяет условию (3.5).

По симметрии $\rho(P, -\Omega) = \rho(P, \Omega)$, $\Omega \in \mathcal{E}_2$ продолжим заданную гладкую флаговую функцию $\rho(P, \Omega)$ на пространство $\mathbf{S}^2$ (единичная сфера) направленных лучей в $\mathbb{R}^3$.

Пусть π_i, $i = 1, 2$ — две центрально-симметричные пластины в $\mathbb{R}^3$ с центром в точке P_i, $P_1 \in \pi_1$, $P_2 \in \pi_2$ и $\Omega \in \mathbf{S}^2$ — пространственное направление от P_1 к точке P_2. Пусть e_i — плоскость, содержащая пластину π_i, $i = 1, 2$. Предположим, что плоскость e_i не пересекает и не содержит пластину π_j, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Положительное вращение вокруг $\Omega \in \mathbf{S}^2$ (определенное по правилу буравчика) определяет ориентацию каждой пластины π_i, $i = 1, 2$. Соответственно, определим направления касательных прямых к $\partial\pi_i$ как точек в $\mathbf{S}^2$. Ниже используем обозначения :

S_i = площадь пластины π_i, $i = 1, 2$;

$(.\hat{}.)$ = угол между двумя пространственными направлениями;

l_i = точка на $\partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

dl_i = мера длины на $\partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

$\varphi_i = \varphi_i(l_i)$ = направление касательной к π_i в точке $l_i \in \partial\pi_i$, $\varphi_i \in S^2$, $i = 1, 2$;

$\psi_i = \psi_i(l_1, l_2)$ = угол между φ_i и направлением $\nu = (l_1, l_2)$, от l_1 к l_2, $i = 1, 2$;

Ω_i = направление нормали к π_i, согласованное с ориентацией π_i, $\Omega_i \in S^2$;

α_i^* = пространственное направление иглы (P_i, l_i) от P_i к l_i, $l_i \in \partial\pi_i$, $i = 1, 2$;

(P_i, x_i, y_i) = правая координатная система на e_i с началом координат в P_i;

ω_i, ξ_i = пространственные направления осей x_i, y_i, соответственно, в координатной системе (P_i, x_i, y_i), $i = 1, 2$;

$(h_i r_i(\alpha_i), \alpha_i)$ = полярные координаты точки $l_i \in \partial\pi_i$ на плоскости e_i с полюсом в P_i и углом $\alpha_i \in [0, 2\pi]$, измерямым от оси x_i согласно правилу буравчика. Здесь h_i, $i = 1, 2$ — параметр гомотетии, а функция $r_i(\alpha)$ определяет шейп пластины π_i, $i = 1, 2$.

Величины e, ω, ξ, $r(\alpha)$, α^*, φ, S определены для любой пластины π с некоторой заданной точкой $P \in \pi$ в качестве центра пластины. Докажем лемму, которую будем использовать ниже.

Лемма 3. *Для любой (выпуклой) пластины* π

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \hat{} \omega)\cos(\varphi \hat{} \xi)\, r^2}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|}\, d\alpha = S, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \hat{} \xi)\cos(\varphi \hat{} \omega)\, r^2}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|}\, d\alpha = -S,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha^* \hat{} \omega)\cos(\varphi \hat{} \omega)\, \frac{r^2}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|}\, d\alpha = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha^* \hat{} \xi)\cos(\varphi \hat{} \xi)\, r^2}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|}\, d\alpha = 0.$$

Доказательство : Используя стандартные формулы из дифференциальной геометрии, находим

$$\frac{\cos(\varphi \hat{} \omega)}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|} = \frac{r'(\alpha)\cos(\alpha) - r(\alpha)\sin(\alpha)}{r(\alpha)},$$

$$\frac{\cos(\varphi \hat{} \xi)}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|} = \frac{r'(\alpha)\sin(\alpha) + r(\alpha)\cos(\alpha)}{r(\alpha)}.$$

Так как $\cos(\alpha^* \hat{} \omega) = \cos\alpha$ и $\cos(\alpha^* \hat{} \xi) = \sin\alpha$, получим

$$\int_0^{2\pi} \cos(\alpha^* \hat{} \omega)\cos(\varphi \hat{} \xi)\, \frac{r^2}{|\sin(\varphi \hat{} \alpha^*)|}\, d\alpha = \int_0^{2\pi} [r'(\alpha) r(\alpha)\cos\alpha\sin\alpha +$$

$$+r^2(\alpha)\cos^2\alpha]\,d\alpha = \int_0^{2\pi}[r^2(\alpha)\cos^2\alpha - \frac{1}{2}r^2(\alpha)\cos 2\alpha]\,d\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{r^2(\alpha)}{2}\,d\alpha = S.$$

Аналогично доказываются оставшиеся три интегральных соотношения.

Используем лемму, пренадлежащую Р. В. Амбарцумяну [4]. Эта лемма рассматривает предел

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}\frac{\Psi([\pi_1]\cap[\pi_2])}{\mu_0([\pi_1]\cap[\pi_2])} = H(\Omega_1,P_1,\Omega_2,P_2),\quad \text{где}\quad \mu_0([\pi_1]\cap[\pi_2]) = \int_{[\pi_1]\cap[\pi_2]} d\gamma, \tag{5.1}$$

вычисленный для фиксированных позиций $P_1 \neq P_2$, фиксированных ориентаций Ω_1 и Ω_2 и фиксированных шейпов пластин π_1 и π_2, а h_1 и h_2 стремятся к нулю. Имеем следующее асимптотическое выражение (см. [2]) :

$$\mu_0([\pi_1]\cap[\pi_2]) = \frac{\cos(\Omega\hat{}\,\Omega_1)\,\cos(\Omega\hat{}\,\Omega_2)}{|P_1P_2|^2}S_1S_2 + o(h_1^2h_2^2). \tag{5.2}$$

Обозначим через Z множество в пространстве $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2$, где коэффициент при S_1S_2 в (5.2) определен и не равен нулю. Пусть

$$Z_R = Z\cap[Y_R\times Y_R\times\mathbf{S}^2\times\mathbf{S}^2],$$

где $Y_R\subset\mathbb{R}^3$ обозначает шар радиуса R с центром в начале координат.

Лемма 4. *Пусть Ψ — валюация, определенная на $U_{\mathbb{\Gamma}}$. Предположим, что предел (5.1) существует и функция $H(\Omega_1,P_1,\Omega_2,P_2)$ непрерывна и ограниченна на каждом Z_R. Тогда функция H зависит только от прямой $\gamma_0\in\mathbb{\Gamma}$, проходящей через P_1, P_2, и существует знакопеременная мера μ на $\mathbb{\Gamma}$, для которой H является плотностью. Мера μ совпадает с Ψ на $U_{\mathbb{\Gamma}}$.*

Вычислим значение Ψ_F на множестве $[\pi_1]\cap[\pi_2]$. Из предположения, что плоскость e_i не пересекает или не содержит π_j, $i\neq j$, $i,j=1,2$, следует, что $c_B^{\pm}(l_1,l_2)=0$ для $(l_1,l_2)\in\partial\pi_i\times\partial\pi_i$. Следовательно

$$\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2]) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\partial\pi_1}\int_{\partial\pi_2}\frac{\sin\psi_1\sin\psi_2}{|l_1,l_2|}\,[c_B^+(l_1,l_2)\,W(w^+) + c_B^-(l_1,l_2)\,W(w^-)]\,dl_1\,dl_2. \tag{5.3}$$

Для заданных l_1 и l_2, дуги V^+ и V^- определим следующим образом : $\phi\in V^+$, если две иглы $\pi_i\cap e(l_1,l_2,\phi)$, $i=1,2$, лежат в разных полуплоскостях $e(l_1,l_2,\phi)$, порождающихся прямой проходящей, через точки l_1 и l_2, в противном случае $\phi \in V^-$.

Непосредственное применение *Алгоритма* дает

$$c_B^+(l_1, l_2) = \frac{1}{2}, \qquad c_B^-(l_1, l_2) = -\frac{1}{2}.$$

Так как $V^- = \pi - V^+$, получим

$$c_B^+(l_1, l_2)\, W(w^+) + c_B^-(l_1, l_2)\, W(w^-) = -\frac{F(\nu)}{4} \pi \cos V^+. \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получаем

$$\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) = -\frac{1}{4} \int_{\partial \pi_1} \int_{\partial \pi_2} \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos V^+ F(\nu)}{|\nu|}\, dl_1\, dl_2. \tag{5.5}$$

Для того, чтобы вычислить кратный интеграл в правой части (5.5) сделаем замену переменных $l_i \to \alpha_i$, $i = 1, 2$.

Используя в (5.5) стандартные соотношения (см. Рис. 1.)

$$dl_i = \frac{r_i(\alpha_i)\, h_i}{|\sin(\varphi_i \hat{} \alpha_i^*)|}\, d\alpha_i,$$

$$\sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos V^+ = \cos(\varphi_1 \hat{} \varphi_2) - \cos \psi_1 \cos \psi_2,$$

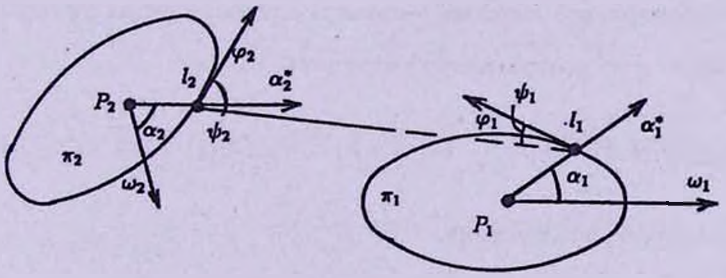

Рис. 1.

получим

$$\Psi_F([\pi_1] \cap [\pi_2]) =$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\cos \psi_1 \cos \psi_2 - \cos(\varphi_1 \hat{} \varphi_2)\Big) \frac{F(\nu)}{|\nu|} \frac{r_1 r_2 h_1 h_2}{|\sin(\alpha_1^* \hat{} \varphi_1) \sin(\alpha_2^* \hat{} \varphi_2)|}\, d\alpha_1\, d\alpha_2. \tag{5.6}$$

По формуле из сферической тригонометрии

$$\cos\psi_i = \frac{1}{|\nu|}\left[|P_1P_2|\cos(\varphi_i\,\hat{}\,\Omega) - r_1h_1\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_i) + r_2h_2\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_i)\right]. \tag{5.7}$$

Запишем разложения Тейлора для функций $\frac{F(\nu)}{|\nu|}$ и $\frac{F(\nu)}{|\nu|^3}$:

$$\frac{F(\nu)}{|\nu|} = \frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|} + r_1h_1\frac{\partial}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right) + r_2h_2\frac{\partial}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right) +$$
$$+\frac{h_1^2r_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right) + \frac{h_2^2r_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_2^*}P_2\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right) +$$
$$+h_1h_2r_1r_2\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right) + o(h_1h_2), \tag{5.8}$$

$$\frac{F(\nu)}{|\nu|^3} = \frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3} + r_1h_1\frac{\partial}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) + r_2h_2\frac{\partial}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) +$$
$$+\frac{h_1^2r_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) + \frac{h_2^2r_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_2^*}P_2\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) +$$
$$+h_1h_2r_1r_2\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) + o(h_1h_2). \tag{5.9}$$

Подставляя (5.7) – (5.9) в (5.6), получим следующее разложение Тейлора :

$$\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2]) = \frac{h_1h_2}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(K_0(\alpha_1,\alpha_2) + K_1(\alpha_1,\alpha_2)h_1 + K_2(\alpha_1,\alpha_2)h_2 +$$
$$+K_{21}(\alpha_1,\alpha_2)h_1^2 + K_{12}(\alpha_1,\alpha_2)h_2^2 + K(\alpha_1,\alpha_2)h_1h_2\big)\,d\alpha_1d\alpha_2 + o(h_1^2h_2^2).$$

Из вышеизложенного вытекает алгоритм для вычисления функции K. Так как пластины π_1 и π_2 центрально-симметричны, имеем

$$r_i(\alpha_i+\pi) = r_i(\alpha_i), \quad \varphi_i(\alpha_i+\pi) = -\varphi_i(\alpha_i), \quad (\alpha_i+\pi)^* = -(\alpha_i)^*.$$

Отсюда следует, что функция

$$K_0(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{r_1r_2F(P_1,P_2)}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)||P_1P_2|}[\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2) - \cos(\varphi_1\,\hat{}\,\varphi_2)]$$

удовлетворяет условию

$$K_0(\alpha_1+\pi,\alpha_2) = -K_0(\alpha_1,\alpha_2) = K_0(\alpha_1,\alpha_2+\pi).$$

Следовательно, $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_0(\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_1d\alpha_2 = 0$. Аналогично, интегралы от

$K_1(\alpha_1,\alpha_2)$, $K_2(\alpha_1,\alpha_2)$, $K_{12}(\alpha_1,\alpha_2)$, $K_{21}(\alpha_1,\alpha_2)$ равны нулю. Получаем

$$\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2]) = \frac{h_1^2h_2^2}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} K(\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_1 d\alpha_2 + o(h_1^2h_2^2).$$

Прямым вычислением находим

$$\begin{aligned}
&K(\alpha_1,\alpha_2)\frac{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}{r_1^2r_2^2} = \\
&= |P_1P_2|^2\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) - \\
&- |P_1P_2|(\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_2)+\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1))\frac{\partial}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) + \\
&+ |P_1P_2|(\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)+\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_1))\frac{\partial}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) - \\
&- \left(\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)+\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_1)\right)\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3} - \\
&- \cos(\varphi_1\,\hat{}\,\varphi_2)\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Для вычисления интеграла от $K(\alpha_1,\alpha_2)$ используем стандартные формулы из следующего списка :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2F_1(P_1,P_2)F_2(P_1,P_2)}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2} &= \frac{\partial^2F_1}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\frac{\partial F_2}{\partial_{\alpha_2^*}P_2} + \\
&+ \frac{\partial F_2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\frac{\partial F_1}{\partial_{\alpha_2^*}P_2} + \frac{\partial^2F_2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}F_1,
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial|P_1P_2|}{\partial_{\alpha_1^*}P_1} = -\cos(\Omega\,\hat{}\,\alpha_1^*), \qquad \frac{\partial|P_1P_2|}{\partial_{\alpha_2^*}P_2} = \cos(\Omega\,\hat{}\,\alpha_2^*), \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial^2|P_1P_2|}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2} = \frac{1}{|P_1P_2|}[\cos(\Omega\,\hat{}\,\alpha_1^*)\cos(\Omega\,\hat{}\,\alpha_2^*) - \cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\alpha_2^*)], \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2F}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2} &= \frac{\partial^2F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\omega_2) + \\
&+ \frac{\partial^2F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\xi_2) + \frac{\partial^2F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\omega_2) + \\
&+ \frac{\partial^2F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\xi_2),
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial_{\alpha_i^*}P_i} = \frac{\partial F}{\partial_{\omega_i}P_i}\cos(\alpha_i^*\,\hat{}\,\omega_i) + \frac{\partial F}{\partial_{\xi_i}P_i}\cos(\alpha_i^*\,\hat{}\,\xi_i), \tag{5.15}$$

$$\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_i) = \cos(\varphi_i\,\hat{}\,\omega_i)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_i) + \cos(\varphi_i\,\hat{}\,\xi_i)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_i), \tag{5.16}$$

$$\cos(\Omega \hat{\ } \alpha_i^*) = \cos(\alpha_i^* \hat{\ } \omega_i)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_i) + \cos(\alpha_i^* \hat{\ } \xi_i)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_i), \tag{5.17}$$

$$\cos(\alpha_1^* \hat{\ } \alpha_2^*) = \cos(\alpha_1^* \hat{\ } \omega_1)\cos(\alpha_2^* \hat{\ } \omega_2)\cos(\omega_1 \hat{\ } \omega_2)+$$

$$+\cos(\alpha_1^* \hat{\ } \omega_1)\cos(\alpha_2^* \hat{\ } \xi_2)\cos(\omega_1 \hat{\ } \xi_2) + \cos(\alpha_1^* \hat{\ } \xi_1)\cos(\alpha_2^* \hat{\ } \omega_2)\cos(\xi_1 \hat{\ } \omega_2)+$$

$$+\cos(\alpha_1^* \hat{\ } \xi_1)\cos(\alpha_2^* \hat{\ } \xi_2)\cos(\xi_1 \hat{\ } \xi_2). \tag{5.18}$$

Рассмотрим первый член в правой части уравнения (5.10). Используя (5.11) — (5.13), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\frac{1}{|P_1P_2|^3} + \frac{\partial F}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\frac{\partial}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{1}{|P_1P_2|^3}\right)+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\frac{\partial}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{1}{|P_1P_2|^3}\right) + F\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{1}{|P_1P_2|^3}\right) = \frac{1}{|P_1P_2|^3}\frac{\partial^2 F}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}-$$
$$-\frac{3}{|P_1P_2|^4}\cos(\Omega \hat{\ } \alpha_2^*)\frac{\partial F}{\partial_{\alpha_1^*}P_1} + \frac{3}{|P_1P_2|^4}\cos(\Omega \hat{\ } \alpha_1^*)\frac{\partial F}{\partial_{\alpha_2^*}P_2} + (3\cos(\alpha_1^* \hat{\ } \alpha_2^*)-$$
$$-15\cos(\Omega \hat{\ } \alpha_1^*)\cos(\Omega \hat{\ } \alpha_2^*))\frac{F}{|P_1P_2|^5}.$$

Из (5.16) —(5.18) и Леммы 3 имеем

$$\int_0^{2\pi}\cos(\alpha_i^* \hat{\ } \Omega)\cos(\varphi_i \hat{\ } \Omega)\,\frac{r_i^2}{|\sin(\varphi_i \hat{\ } \alpha_i^*)|}\,d\alpha_i = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\alpha_1^* \hat{\ } \alpha_2^*)\cos(\varphi_1 \hat{\ } \Omega)\cos(\varphi_2 \hat{\ } \Omega)\,r_1^2r_2^2}{|\sin(\varphi_1 \hat{\ } \alpha_1^*)\sin(\varphi_2 \hat{\ } \alpha_2^*)|}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 = S_1S_2M,$$

где

$$M = \cos(\omega_1 \hat{\ } \omega_2)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_1)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_2) + \cos(\xi_1 \hat{\ } \xi_2)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_1)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_2)-$$
$$-\cos(\xi_1 \hat{\ } \omega_2)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_1)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_2) - \cos(\omega_1 \hat{\ } \xi_2)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_1)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_2).$$

Из формулы (5.14) и Леммы 3 получаем

$$\frac{1}{|P_1P_2|}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 F(P_1,P_2)}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\,\frac{\cos(\Omega \hat{\ } \varphi_1)\cos(\Omega \hat{\ } \varphi_2)\,r_1^2r_2^2}{|\sin(\alpha_1^* \hat{\ } \varphi_1)\sin(\alpha_2^* \hat{\ } \varphi_2)|}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 =$$
$$= \frac{S_1S_2}{|P_1P_2|}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\Omega \hat{\ } \xi_1)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_2) - \frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\Omega \hat{\ } \xi_1)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_2)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\Omega \hat{\ } \omega_1)\cos(\Omega \hat{\ } \xi_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\Omega \hat{\ } \omega_1)\cos(\Omega \hat{\ } \omega_2)\right].$$

Из последних трех соотношений следует, что

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right)\frac{r_1^2 r_2^2\,|P_1P_2|^2\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}\,d\alpha_1\,d\alpha_2=$$
$$=\frac{3F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}S_1S_2M+\frac{S_1S_2}{|P_1P_2|}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2)-\right.$$
$$-\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2)--\frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2)+$$
$$\left.+\frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2)\right].\tag{5.19}$$

Интегралы от остальных членов в (5.10) могут быть вычислены аналогично. В частности

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2 r_2^2\,|P_1P_2|}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_2)+$$
$$+\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1))\frac{\partial}{\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2=-\frac{3F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}S_1S_2M+$$
$$+\frac{S_1S_2}{|P_1P_2|^2}\left[\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\omega_2}P_2}(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1)-\cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1))+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\xi_2}P_2}(\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)-\cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1))\right],\tag{5.20}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2 r_2^2|P_1P_2|}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)+$$
$$+\cos(\Omega\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_1))\frac{\partial}{\partial_{\alpha_1^*}P_1}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}\right)d\alpha_1 d\alpha_2=-\frac{3F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}S_1S_2M-$$
$$-\frac{S_1S_2}{|P_1P_2|^2}\left[\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\omega_1}P_1}(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2)-\cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2))+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\xi_1}P_1}(\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2)-\cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2))\right],\tag{5.21}$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2 r_2^2}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}(\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)+$$
$$+\cos(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_2)\cos(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_1))\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}d\alpha_1\,d\alpha_2=\tag{5.22}$$
$$=\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3}2S_1S_2(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)-\cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)),$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_1^2 r_2^2\cos(\varphi_1\,\hat{}\,\varphi_2)}{|\sin(\alpha_1^*\,\hat{}\,\varphi_1)\sin(\alpha_2^*\,\hat{}\,\varphi_2)|}\frac{\partial^2}{\partial_{\alpha_1^*}P_1\,\partial_{\alpha_2^*}P_2}\left(\frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|}\right)d\alpha_1\,d\alpha_2=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3} S_1S_2M + \frac{S_1S_2}{|P_1P_2|^2}\left[\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\omega_1}P_1}(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2) -\right.\\
&- \cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2)) + \frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\xi_1}P_1}(\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2) -\\
&- \cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2)) - \frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\omega_2}P_2}(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1) -\\
&- \cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)) - \frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_{\xi_2}P_2}(\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1) -\\
&\left. - \cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1))\right] - \frac{F(P_1,P_2)}{|P_1P_2|^3} 2S_1S_2(\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2) -\\
&- \cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)\cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2)) + \frac{S_1S_2}{|P_1P_2|}\left[-\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2) +\right.\\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2) + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}\cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2) -\\
&\left. - \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}\cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)\right].
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Таким образом, используя (5.19) —(5.23), находим

$$
\begin{aligned}
\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2]) &= \frac{S_1\,S_2\,h_1^2\,h_2^2}{4|P_1P_2|}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2) -\right.\\
&- \cos(\xi_1\,\hat{}\,\xi_2)) + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2) - \cos(\omega_1\,\hat{}\,\omega_2)) -\\
&- \frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\xi_2}P_2}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_2) - \cos(\xi_1\,\hat{}\,\omega_2)) -\\
&\left. - \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\omega_2}P_2}(\cos(\Omega\,\hat{}\,\omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\xi_2) - \cos(\omega_1\,\hat{}\,\xi_2))\right] + o(h_1^2\,h_2^2).
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

После некоторых элементарных преобразований, которые мы опускаем, (5.24) можно написать в виде

$$
\begin{aligned}
\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2]) &= \frac{h_1^2h_2^2S_1S_2}{4\,|P_1P_2|}\left[\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_1)\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_2\,\partial_{\Omega_2}P_1} + \cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_2)\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\,\partial_{\Omega_1}P_2} -\right.\\
&- \cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_1}P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_1}P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1}P_1\,\partial_{\Omega_1}P_2}\right) -\\
&\left. - \cos(\Omega_1\,\hat{}\,\Omega_2)\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\,\partial_\Omega P_2}\right] + o(h_1^2\,h_2^2).
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Используя (5.2), имеем

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\Psi_F([\pi_1]\cap[\pi_2])}{\mu_0([\pi_1]\cap[\pi_2])} &= \frac{|P_1P_2|}{4\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_2)}\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_2\,\partial_{\Omega_2}P_1} + \frac{|P_1P_2|}{4\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_1)}\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\,\partial_{\Omega_1}P_2} -\\
&- \frac{|P_1P_2|}{4}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1}P_1\,\partial_{\omega_1}P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1}P_1\,\partial_{\xi_1}P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1}P_1\,\partial_{\Omega_1}P_2}\right) -\\
&- \frac{|P_1P_2|\cos(\Omega_1\,\hat{}\,\Omega_2)}{4\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_1)\cos(\Omega\,\hat{}\,\Omega_2)}\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\,\partial_\Omega P_2}.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Полученное выражение симметрично, что следует из факта, что дифференциальный оператор

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1} P_1\, \partial_{\omega_1} P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1} P_1\, \partial_{\xi_1} P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1} P_1\, \partial_{\Omega_1} P_2}$$

не зависит от выбора $(\omega_1, \xi_1, \Omega_1)$. Это утверждение следует из стандартных выражений для $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_2} P_1\, \partial_{\omega_2} P_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_2} P_1\, \partial_{\xi_2} P_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_2} P_1\, \partial_{\Omega_2} P_2}$ в терминах $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1} P_1\, \partial_{\omega_1} P_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1} P_1\, \partial_{\xi_1} P_2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1} P_1\, \partial_{\Omega_1} P_2}$. Следующая лемма раскрывает связь (5.26) с Леммой 4.

Лемма 5. *Пусть $F(\nu) = F(P_1, P_2)$ задана по (3.1) с флаговой функцией $\rho \in C^{(3)}$. Тогда функция $H(\Omega_1, P_1, \Omega_2, P_2)$, равная левой части (5.26), непрерывна и ограничена на каждом Z_R, тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_\Omega P_1\, \partial_n P_2} = 0 \tag{5.27}$$

имеет место для каждого направления n, перпендикулярного направлению Ω от P_1 к P_2.

Доказательство : Из интегрального представления (3.1) следует

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\, \partial_\Omega P_2} = 0 \quad \text{для} \quad P_1 \neq P_2.$$

Отсюда выводим, что (5.26) непрерывна и ограничена на каждом Z_R тогда и только тогда, когда коэффициенты перед $\frac{1}{\cos(\Omega\hat{}\,\Omega_1)}$ и $\frac{1}{\cos(\Omega\hat{}\,\Omega_2)}$ равны нулю. Следовательно, имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1\, \partial_{\Omega_1} P_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_2\, \partial_{\Omega_2} P_1} = 0.$$

Из (3.1) вытекает, что эти два условия эквивалентны условию (5.27).

Используя Леммы 4 и 5 получаем следующий критерий.

Теорема 2. *Валюация Ψ_F, определенная на кольце $U_{\mathbb{F}}$ с помощью флаговой функции $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$ посредством формул (3.1), (4.1) и (4.8), порождает знакопеременную меру μ на кольце $\mathbb{F}$ тогда и только тогда, когда функция F, определенная по (3.1), удовлетворяет условию (5.27). Плотность $H(\gamma)$ меры μ дается по следующей формуле :*

$$H(\gamma) = -\frac{|P_1 P_2|}{4} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial_{\omega_1} P_1\, \partial_{\omega_1} P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\xi_1} P_1\, \partial_{\xi_1} P_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial_{\Omega_1} P_1\, \partial_{\Omega_1} P_2} \right). \tag{5.28}$$

§6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Целью настоящего параграфа является преобразование условия (5.27) и представление плотности H в терминах флаговой функции $\rho(P,\Omega)$. Для этой цели вычислим производную $\dfrac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_\beta P_2}$ для некоторого $\beta\in S^2$. Обозначим через P_2^* точку, полученную из P_2 сдвигом b в направлении β; через r и r_2 — длины отрезков (P_1,P_2), (P_1,P_2^*) соответственно, а через Ω_2^* — направление отрезка (P_1,P_2^*). Ясно, что $r_2-r=\cos(\Omega\,\hat{}\,\beta)b+o(b)$ и, следовательно

$$F(P_1,P_2^*)-F(P_1,P_2)=\int_0^r[\rho(l,\Omega_2^*)-\rho(l,\Omega)]\,dl+\int_r^{r_2}\rho(l,\Omega_2^*)\,dl+o(b). \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, что

$$\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_\beta P_2}=\frac{\sin(\Omega\,\hat{}\,\beta)}{r}\int_0^r\left[\frac{\partial\rho}{\partial_n P}l+\frac{\partial\rho}{\partial_n\Omega}\right]dl+\rho(P_2,\Omega)\cos(\Omega\,\hat{}\,\beta), \tag{6.2}$$

где n — направление, перпендикулярное к Ω и компланарное с β и Ω, $\dfrac{\partial\rho}{\partial_n P}$ — производная флаговой функции ρ в направлении n относительно P, а $\dfrac{\partial\rho}{\partial_n\Omega}$ — производная функции ρ в направлении n относительно Ω. Так как β перпендикулярна к Ω ($\beta=n$), то из (6.2) получаем

$$\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_n P_2}=\frac{1}{r}\int_0^r\left[\frac{\partial\rho}{\partial_n P}l+\frac{\partial\rho}{\partial_n\Omega}\right]dl. \tag{6.3}$$

В правой части (6.3) сделаем замену переменной $l=r-t$:

$$\frac{\partial F(P_1,P_2)}{\partial_n P_2}=\frac{1}{r}\int_0^r\left[\frac{\partial\rho}{\partial_n P}(r-t)+\frac{\partial\rho}{\partial_n\Omega}\right]dt, \tag{6.4}$$

где интеграл берется по отрезку (P_2,P_1).

Следовательно

$$\frac{\partial^2F(P_1,P_2)}{\partial_\Omega P_1\,\partial_n P_2}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\int_0^r\left[\frac{\partial\rho}{\partial_n P}(r-t)+\frac{\partial\rho}{\partial_n\Omega}\right]dt\right]=$$
$$=\frac{1}{r^2}\int_0^r\left[\frac{\partial\rho}{\partial_n P}-\frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_n\Omega}\right]t\,dt.$$

Отсюда следует, что условие (5.27) эквивалентно дифференциальному тождеству

$$\frac{\partial\rho}{\partial_n P}=\frac{\partial^2\rho}{\partial_\Omega P\,\partial_n\Omega}, \tag{6.5}$$

которое имеет место для каждого направления n, перпендикулярного направлению Ω (ср. с (3.5)).

Перейдем к вычислению плотности $H(\gamma)$. Так как значение $H(\gamma)$ не зависит от выбора $(\omega_1, \xi_1, \Omega_1)$, можем использовать любую ортогональную тройку направлений вида (n_1, n_2, Ω). Используя (6.5), из (6.2) получаем

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_{n_1} P_2} = \frac{\partial \rho(P_2, \Omega)}{\partial_{n_1} \Omega},$$

$$\frac{\partial F(P_1^*, P_2)}{\partial_{n_1} P_2} = \frac{\partial \rho(P_2, \Omega_1^*)}{\partial_{n_1} \Omega} \sin(\Omega_1^* \hat{\ } n_1) + \rho(P_2, \Omega_1^*) \cos(\Omega_1^* \hat{\ } n_1),$$

где P_1^* — точка, полученная из P_1 сдвигом b в направлении n_1, а Ω_1^* — направление отрезка (P_1^*, P_2). Из последних двух уравнений имеем

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_{n_1} P_1 \, \partial_{n_1} P_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \rho}{(\partial_{n_1} \Omega)^2} - \frac{\rho}{r}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 F(P_1, P_2)}{\partial_{n_2} P_1 \, \partial_{n_2} P_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \rho}{(\partial_{n_2} \Omega)^2} - \frac{\rho}{r}.$$

Теперь из последних двух уравнений и того, что $\dfrac{\partial^2 F}{\partial_\Omega P_1 \, \partial_\Omega P_2} = 0$, получим

$$H(\gamma) = \frac{1}{4} \left[2\rho + \Delta_2 \rho \right], \tag{6.6}$$

где Δ_2 — лапласиан на $\mathbf{S}^2$.

Таким образом, из Теоремы 2, Следствия 1 и уравнений (6.5), (6.6) получаем следующий результат :

Теорема 3. *Следующие три утверждения эквивалентны :*

1) флаговая функция $\rho(P, \Omega) \in C^{(3)}$ порождает знакопеременную меру μ в $\mathbb{\Gamma}$ с помощью формул (3.1), (4.1), (4.8);

2) для каждой плоскости e сужение $\rho(P, \Omega)$ на плоскость e порождает с помощью (3.2) знакопеременную меру μ_e в пространстве $\mathbf{G}_e$ прямых на плоскости e ;

3) для любых P, Ω, $\rho(P, \Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \rho(P, \Omega)}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho(P, \Omega)}{\partial_\Omega P \, \partial_n \Omega}, \tag{6.7}$$

тождественно для любого направления n, ортогонального к Ω.

Определение. Флаговая функция называется выпуклой, если $2\rho + \Delta_2\rho \geq 0$ для каждой точки $P \in \mathbb{R}^3$.

Следствие 2. Выпуклая функция $\rho(P,\Omega) \in C^{(3)}$ удовлетворяет условию (6.7) для каждого направления n, ортогоналного к Ω тогда и только тогда, когда $F(\nu)$, заданная по (3.1), есть метрика в $\mathbb{R}^3$, для которой евклидовые прямые суть геодезические. Тогда $\rho(P,\Omega)$ называется финслеровой плотностью метрики $F(\nu)$, см. [7].

Доказательство : Если $\rho(P,\Omega)$ — выпуклая и удовлетворяет уравнению (6.7), то μ является неотрицательной мерой. Это утверждение справедливо для каждой μ_e. Следовательно, на каждой e сегментная функция $\mu_e([\nu]_e)$ — непрерывная метрика, для которой геодезические суть обычные евклидовы прямые (см. [5]). Доказательство первого утверждения следует из замечания, что сегментная функция $\mu_e([\nu]_e) = F(\nu)$ не зависит от e. Если ρ — финслерова плотность метрики в $\mathbb{R}^3$, для которой геодезическими являются обычные евклидовы прямые, то сужение ρ на плоскость e — финслерова плотность метрики на плоскости e, для которой геодезическими являются евклидовы прямые. Следовательно, ρ удовлетворяет уравнению (6.7) и является выпуклой (см. [7]).

ABSTRACT. Guided by a decomposition of Combinatorial Integral Geometry, we define a class of valuations in the space $\mathbb{\Gamma}$ of Euclidean lines in $\mathbb{R}^3$. The paper studies the possibility of extension of the valuations to signed measures and nonnegative measures in $\mathbb{\Gamma}$. The results are applied to obtain a description of metrics in $\mathbb{R}^3$ for which the Euclidean lines are the geodesics.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry, John Wiley and Sons, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
3. Р. В. Амбарцумян, "Конечно–аддитивные функционалы в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том 28, № 2, ст. 51 — 60, 1993.
4. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Изв. НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
5. R. V. Ambartzumian (with the Appendix by V. K. Oganian), "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых

финслеровыми метриками", Известия НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 69 — 80, 1992.
7. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert fourth problem", Israel Math. Journal. vol. 103, pp. 41 — 65, 1998.
8. Р. В. Амбарцумян, "Интегральная геометрия прегеодезических на 2-многообразиях", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 5 — 53, 1996.
9. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей I", Известия НАН Армении, Математика, том 29, № 4, стр. 1 — 57, 1994.
10. В. К. Оганян, А. Н. Давтян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей II", Известия НАН Армении, Математика, том 31, № 4, стр. 44 — 74, 1996.

16 января 1998

Институт математики
НАН Армении