# РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАЛЬМА В АНАЛИЗЕ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

**Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, No. 4, 1998**

**Статья изучает однородные процессы прямых второго порядка на плоскости, а именно, маркированные точечные процессы пересечений, индуцированные на тестовой прямой. Марками служат углы, под которыми происходят пересечения с тестовой прямой. Методами "Инвариантного Вложения" и интегрирования Комбинаторной формулы из Интегральной геометрии получаем два дифференциальных соотношения между совместными вероятностями числа пересечений на системе непересекающихся интервалов на тестовой прямой и вероятностями Пальма первого и второго порядка тех же событий. Анализом этих соотношений получены условия пуассоновости $n$–мерных распределений для любого $n \geq 1$.**

## §0. ВВЕДЕНИЕ

Изучение случайных точечных процессов, индуцированных на тестовых прямых случайными геометрическими процессами на плоскости $\mathbb{R}^2$, одна из основных тем стохастической геометрии (см. [1]; [3], глава 10; [4], глава 10; [6] — [10]). В этих работах важным инструментом исследования являются формулы комбинаторной интегральной геометрии, впервые примененные в контексте стохастической геометрии в [3]. Однако, эти исследования ограничивались в основном случайными геометрическими процессами, инвариантными относительно группы $\mathbb{M}_2$ евклидовых движений плоскости.

Недавняя статья Р. В. Амбарцумяна [12] (представленная и в настоящем выпуске) открывает путь для замены сильного условия $\mathbb{M}_2$-инвариантности геометрических процессов на более слабое условие его $\mathbf{T}_2$-инвариантности ($\mathbf{T}_2$ — группа параллельных переносов плоскости, $\mathbf{T}_2$–инвариантные геометрические процессы иначе называются однородными). Статья [12] изучает $\mathbf{T}_2$–инвариантные случайные процессы прямых $\{g_i\}$ на плоскости и маркированный точечный процесс $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, индуцированный на тестовой прямой $g(\alpha)$ направления $\alpha$ : $\{x_i\}_\alpha = \{g_i\} \bigcap g(\alpha)$ — точечный процесс пересечений, а марки $\{\Psi_i\}$ суть углы, под которыми прямые из реализации пересекают тестовую прямую $g(\alpha)$ в точках $\{x_i\}_\alpha$. При некоторых условиях, наложенных на вероятностное распределение $\{x_i, \Psi_i\}_\alpha$, методом "Инвариантного Вложения" получены два дифференциальных уравнения. Этими условиями являются :

a) для каждого направления $\alpha$ последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ некоррелирована с числом точек из $\{x_i\}_\alpha$,

b) последовательность $\{\cot \Psi_i\}$ есть последовательность некоррелированных случайных величин,

c) $\{g_i\}$ удовлетворяет так называемому условию "достаточного перемешивания", а именно, точечные процессы, индуцированные на тестовой прямой направления $\alpha$ и на "типичной" прямой из $\{g_i\}$ с тем же направлением, имеют одно и то же распределение.

Как показано в [12], если выполнены Условия a), b) и c), то решая эти два уравнения получаем пуассоновость одномерных распределений

$$p_k(t, \alpha) = \text{ вероятность иметь } k \text{ точек из} \{x_i\}_\alpha \text{ на интервале длины } t.$$

Настоящая статья исследует многомерные вероятности $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$. В этих обозначениях $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ — система непересекающихся интервалов на $g(\alpha)$, $\overline{k} = (k_1, ..., k_n)$ — последовательность неотрицательных целых чисел,

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha) = \text{ совместная вероятность иметь } k_j \text{ точек из } \{x_i\}_\alpha \text{ на каждом интервале } \gamma_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Так как вероятностное распределение случайного точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$ полностью определяется величинами $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, $n \geq 1$ (см. [13]), изучение величин $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ приводит к утверждениям единственности, касающихся вероятностных распределений точечных процессов $\{x_i\}_\alpha$ или даже $\{g_i\}$.

Мы выводим два дифференциальных уравнения для $n$–мерного вероятностного распределения $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, справедливых при тех же предположениях a) — c), для случайных процессов прямых, $\mathbf{T}_2$-инвариантных и обладающих первой и второй моментными мерами. Также накладываются некоторые предположения гладкости. Решая эти уравнения приходим к утверждению, что для каждого направления $\alpha$ точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский. В некотором смысле эта статья завершает исследование, начатое в [12]. Однако, имеется существенная методологическая разница между настоящей статьей и [12] : анализ второго порядка основывается не на инвариантном вложении, а на разложениях комбинаторной интегральной геометрии (см. [3] и [16]).

Статья организована следующим образом. §1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно–инвариантных случайных процессов прямых (см. также [3], [4], [12]). В §2 мы развиваем важную тему, обобщенные формулы Пальма. Отметим, что систематическое использование формул Пальма в стохастической геометрии начато в [4]. В §3 метод инвариантного вложения и предположение a) применяются в так называемом анализе первого порядка. Необходимые факты из комбинаторной интегральной геометрии представлены в §4. Анализ второго порядка (§5) содержит интегрирование комбинаторного разложения параграфа 4, которое приводит к дифференциальному тождеству для $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$ (аналогичное разложение в $\mathbb{M}_2$–инвариантном случае использовалось в [4] и [8]). При предположениях a), b) и c) последнее тождество сводится к дифференциальному уравнению для $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma}, \alpha)$, которое полностью решается. Наконец, в §7 приводятся условия пуассоновости точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$.

## §1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Случайный процесс прямых определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых $\mathbf{G}$ на плоскости (стандартная литература по точечным процессам — [3], [4], [9], [13]). Прямую $g \in \mathbf{G}$ можно задавать полярными координатами $(\varphi, p)$ основания перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $g$ ($\varphi$ — точка на единичной окружности $\mathbf{S}_1$, $p \in [0, +\infty)$). Естественная топология в $\mathbf{G}$ есть топология листа Мебиуса.

Обозначим через $dg$ единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений $\mathbb{R}^2$

(см. [3], [4]).

Определение процесса прямых следующее. Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство *реализаций* процессов прямых

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{m} \subset \mathbf{G}: \quad \mathbf{m} \text{ не имеет точек сгущения в пространстве } \mathbf{G}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную $\sigma$–алгебру подмножеств $\mathcal{M}$, относительно которой функции

$$N(\mathbf{m}, B) = \mathrm{card}(\mathbf{m} \cap B)$$

измеримы для всех борелевских $B \subset \mathbf{G}$. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — вероятностное пространство, $\omega \in \Omega$. Любое измеримое отображение $\mathbf{m}(\omega)$: $\Omega \longmapsto \mathcal{M}$ называется случайным точечным процессом в $\mathbf{G}$. Вместо $\mathbf{m}$ мы часто используем символ $\{g_i\}$, подчеркивая факт, что процесс прямых есть счетное случайное множество прямых. Через $\mathbf{P}$ обозначим вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). Группа $\mathbf{T}_2$ параллельных переносов $\mathbb{R}^2$ индуцирует группу преобразований множества реализаций $\mathcal{M}$ (группа параллельных переносов множества $\mathcal{M}$). $\{g_i\}$ называется однородным, если его распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно этой группы ($\mathbf{T}_2$–инвариантно).

Примером $\mathbf{T}_2$–инвариантного случайного процесса прямых является пуассоновский процесс прямых, управляемый мерой $f(\varphi) \cdot dg$.

Ниже нам понадобятся понятия первой и второй моментных мер процесса прямых.

Будем говорить, что $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых первого порядка, если существует первая моментная мера $m_1(\cdot)$ :

$$m_1(B) = \mathbf{E}_\mathbf{P} N(\mathbf{m}, B) < \infty \quad \text{для} \quad B \in \mathcal{B}_0(\mathbf{G}),$$

где $\mathbf{E}_\mathbf{P}$ — математическое ожидание относительно $\mathbf{P}$, $\mathcal{B}_0(\mathbf{G})$ — кольцо всех ограниченных борелевских подмножеств.

Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ второго порядка, если существует вторая моментная мера $m_2(\cdot)$ :

$$m_2(B_1 \times B_2) = \mathbf{E}_\mathbf{P}\left[N(\mathbf{m}, B_1) \cdot N(\mathbf{m}, B_2)\right] < \infty \quad \text{для} \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0(\mathbf{G}).$$

Будем говорить, что прямая $g$ "пересекает" отрезок $\gamma$, если $\gamma \cap g$ есть точка *внутренности* отрезка $\gamma$.

Задавая "тестовый отрезок" $\gamma$, рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для заданных $n$ тестовых отрезков $\gamma_1, ..., \gamma_n$ и неотрицательных целых чисел $k_1, ..., k_n$ будем обозначать $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \bigcap_{i=1}^{n} \binom{\gamma_i}{k_i} = \binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}}$. Для вероятностей этих событий используем обозначения

$$\mathbf{P}\binom{\gamma}{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\begin{pmatrix} \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}}.$$

**Определение 1.** Случайный процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ инвариантно относительно группы $\mathbf{T_2}$ и первые и вторые моментные меры $\{g_i\}$ имеют форму $f\,dg$ и (вне $g_1 = g_2$) $f_2\,dg_1\,dg_2$ соответственно, с непрерывными (трансляционно–инвариантными) плотностями $f(g)$ и $f_2(g_1, g_2)$.

Приведем некоторые свойства процессов из класса Ti2, которые нам понадобятся в параграфах 3 и 5. Их строгие доказательства легко получаются методом, описанным в [4].

1. Для случайного процесса прямых из класса Ti2 с вероятностью 1 в реализации нет параллельных прямых.

2. Отрезки, принадлежащие $g(\alpha)$, будем называть горизонтальными, а отрезки, ортогональные к $g(\alpha)$ — вертикальными. Горизонтальные отрезки обозначаем через $h$, а вертикальные – через $v$. Если $|h| = l \to 0$, то имеем

$$\mathbf{P}\binom{h}{1} = \lambda(\alpha)\,l + o(l), \quad \mathbf{P}\binom{h}{2} = O(l^2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\binom{h}{k} = o(l^2), \text{ если } \quad k > 2, \quad (1.1)$$

где $\lambda(\alpha)$ — интенсивность точечного процесса $\{x_i\}_\alpha$. Аналогичные утверждения справедливы для вертикальных отрезков $v$, при $|v| \to 0$.

3. Рассмотрим последовательность событий $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, предполагая, что отрезки $h_i$ и $v_i$ при $l \to 0$ стягиваются к некоторым фиксированным точкам $y_i \in g(\alpha)$, $i = 1, 2$. Для пары вертикальных отрезков $v_1$, $v_2$ имеем

$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \bigcup B$, где $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ происходит, когда *одна и та же прямая* из $\{g_i\}$ пересекает отрезки $v_1$ и $v_2$, а $B$ — дополнение события $A$ в $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $B$ обозначает событие, когда отрезки $v_1$ и $v_2$ пересекаются *двумя разными прямыми* из $\{g_i\}$. Существуют следующие пределы :

$$\lim_{l\to 0}\left[l^{-2}\mathrm{P}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = c_{y_1,y_2,hh}, \quad \lim_{l\to 0}[l^{-2}\mathrm{P}(A)] = c_A, \quad \lim_{l\to 0}[l^{-2}\mathrm{P}(B)] = c_{y_1,y_2,vv}. \tag{1.2}$$

Заметим, что существуют версии формул (1.2) для окон не обязательно одинаковых длин. В этом случае $l^2$ заменяется произведением длин окон. Окна $v_1$, $v_2$ могут находиться или в одной или в разных полуплоскостях относительно $g(\alpha)$.

4. Распределения типа Пальма $\Pi_{y,h}$, $\Pi_{y,v}$, $\Pi_{y_1,y_2,hh}$, $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ и $\Pi_g$ определены. Грубо говоря, каждое из этих распределений типа Пальма есть предел условного вероятностного распределения процесса $\{g_i\}$, при условиях $\begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B$ и $A$ соответственно. Наши обозначения указывают на зависимость вероятностей Пальма от позиции предельных точек. Можем говорить о процессе прямых, который соответствует каждому из вышеупомянутых распределений Пальма.

Оба вероятностных распределения $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$ определены на $\mathcal{M} \times (0,\pi)$, т.е. сосредоточены на множестве реализаций, обладающих прямой, проходящей через точку $y \in g(\alpha)$. Рассмотрим события типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ \dot{k}_1 & \dots & \dot{k}_n \end{pmatrix} \times \Theta_1$, где $\Theta_1 \subset (0,\pi)$ обозначает событие $\Psi \in \Theta_1$. Через $\Psi$ обозначим угол между $g(\alpha)$ и случайной прямой проходящей через точку $y$. На этих множествах величины $\Pi_{y,h}$ и $\Pi_{y,v}$, вообще говоря, не совпадают (см. Лемму 1).

$\Pi_{y_1,y_2,vv}$ и $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ сосредоточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через точки $y_1, y_2 \in g(\alpha)$. Параметризируем последние две прямые углами $\Psi_1$ и $\Psi_2$. Таким образом, $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ суть вероятностные меры на пространстве $\mathcal{M} \times (0,\pi) \times (0,\pi)$. В частности, $\Pi_{y_1,y_2,hh}$ и $\Pi_{y_1,y_2,vv}$ определены (и имеют разные значения, см. Лемма 2) на событиях типа $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} \times \Theta_1 \times \Theta_2$, $\Theta_1, \Theta_2 \subset (0,\pi)$.

В [4] существование распределения Пальма $\Pi_g$ доказывается только для $\mathbb{M}_2$-инвариантных процессов прямых. Можно дать нестрогое определение распределения $\Pi_g$, как условное вероятностное распределение процесса $\{g_i\}$, при условии, что одна прямая из $\{g_i\}$ совпадает с неслучайной прямой $g$. Одно из точных определений распределения Пальма $\Pi_g$ для $\{g_i\} \in$ Ti2 состоит в следующем :

$$\Pi_g\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ k\end{pmatrix} = \lim_{l\to 0}[\mathbf{P}(A)]^{-1}\mathbf{P}(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ k\end{pmatrix}\cap A) = c_A^{-1}\lim_{l\to 0} l^{-2}\,\mathbf{P}(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ k\end{pmatrix}\cap A), \tag{1.3}$$

где $g = g(\alpha)$ — горизонтальная прямая.

Будем писать $E_Z$ для *математического ожидания* относительно вероятностной меры $\Pi_Z$.

**Лемма 1.** (см. [12]). *Пусть $F(\mathrm{m},\Psi_1)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M}\times(0,\pi)$. Если $\{g_i\}\in$ Ti2, то для каждого направления $\alpha$ и точки $y\in g(\alpha)$* имеем

$$\lambda(\alpha)\, E_{y,h}F(\mathrm{m},\Psi_1)\cdot|\cot\Psi_1| = \lambda(\alpha+\pi/2)\, E_{y,v}\, F(\Psi_1,\mathrm{m}).$$

**Лемма 2** (см. [12]). *Пусть $F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)$ — ограниченная функция, определенная на $\mathrm{M}\times(0,\pi)\times(0,\pi)$. Если $\{g_i\}\in$ Ti2, то для каждого направления $\alpha$ и точек $y_1$, $y_2\in g(\alpha)$*

$$c_{y_1,y_2,hh}\, E_{y_1,y_2,hh}F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)|\cot\Psi_1\cot\Psi_2| = c_{y_1,y_2,vv}\, E_{y_1,y_2,vv}\, F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2).$$

## §2. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ПАЛЬМА

Если случайный процесс прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2, то соответствующий процесс пересечений $\{x_i\}_\alpha$ на тестовой прямой $g(\alpha)$ инвариантен относительно сдвигов вдоль $g(\alpha)$ и имеет конечную интенсивность $\lambda(\alpha)$. Для отрезка $\gamma\subset g(\alpha)$ длины $t$ имеем классическую формулу Пальма (см. [4])

$$\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t} = \lambda(\alpha)\left[\Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ k-1\end{pmatrix} - \Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix}\right], \quad \text{где} \quad p_k(t,\alpha) = P\begin{pmatrix}\gamma\\ k\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Эта формула справедлива для обоих концов $y$ отрезка $\gamma$.

Здесь и ниже $\Pi_{y,h}\begin{pmatrix}\gamma\\ -1\end{pmatrix} = 0$. Не оговаривая особо, в дальнейшем мы будем следовать аналогичной практике относительно отрицательных чисел пересечений.

Ниже нам понадобятся некоторые обобщения формулы Пальма для вероятностей $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha)$ с несколькими интервалами $\gamma_i$, разделенными непустыми пробелами. Заметим, что вероятность $p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha)$ на самом деле есть функция от $2n$ переменных

$$p_{\overline{k}}(\overline{\gamma},\alpha)=p_{k_1,\dots,k_n}(t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_{n-1},\alpha)=p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha),$$

где $t_1,\dots,t_n$ — длины отрезков $\gamma_i$, а $u_i$ — длина пробела между $\gamma_i$ и $\gamma_{i+1}$ (см. Рис. 1).

Возьмем один из отрезков $\gamma_i$ и в его правом конце дадим приращение на отрезок $\varepsilon_i$ длины $|\varepsilon_i|$. Пробел между приращенным отрезком и $\gamma_{i+1}$ становится $u_i-|\varepsilon_i|$. По формуле Тейлора

$$\lim_{|\varepsilon_i|\to 0}\frac{p_{\overline{k}}(t_1,\dots,t_i+|\varepsilon_i|,\dots,t_n,u_1,\dots,u_i-|\varepsilon_i|,\dots,u_n,\alpha)-p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{|\varepsilon_i|}=\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i}-\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, из формулы полной вероятности, получаем

$$P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_i\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i\cup\varepsilon_i\\ k_i\end{pmatrix}\right)=$$

$$=P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}\bigcap\begin{pmatrix}\varepsilon_i\\ 0\end{pmatrix}\right)+P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_i\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \varepsilon_i\\ k_i-1 & 1\end{pmatrix}\right)+o(|\varepsilon_i|),$$

$$P\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}=P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}\bigcap\begin{pmatrix}\varepsilon_i\\ 0\end{pmatrix}\right)+P\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}\bigcap\begin{pmatrix}\varepsilon_i\\ 1\end{pmatrix}\right)+o(|\varepsilon_i|),$$

где

$$\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_i=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \dots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \dots & \gamma_n\\ k_1 & \dots & k_{i-1} & k_{i+1} & \dots & k_n\end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в (2.2), получим

$$\lambda(\alpha)\Delta_i\Pi_{iR,h}\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}=\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i}-\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}, \tag{2.3}$$

где $iR$ обозначает правый конец отрезка $\gamma_i$. Здесь и ниже

$$\Delta_i Y_{\overline{k}}=Y_{(k_1,\dots k_i-1,\dots,k_n)}-Y_{(k_1,\dots k_i,\dots,k_n)}. \tag{2.4}$$

Если дадим приращение отрезка $\gamma_i$ слева, то получим следующую версию формулы (2.3) :

$$\lambda(\alpha)\,\Delta_i\Pi_{iL,h}\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}=\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i}-\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}}, \tag{2.5}$$

где $iL$ — левый конец отрезка $\gamma_i$.

Ниже нам понадобятся формулы для распределений Пальма второго порядка. Возьмем два отрезка $\gamma_i$, $\gamma_j$ и дадим приращения отрезками $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ слева и справа, соответственно. Длины отрезков $\varepsilon_i$ и $\varepsilon_j$ совпадают и равны $l$. Пробел между приращенными отрезками $\gamma_i$ и $\gamma_{i+1}$ будет $u_i - l$, а между $\gamma_j$ и $\gamma_{j-1}$ станет $u_{j-1} - l$. По формуле Тейлора предел выражения

$$\begin{aligned} & p_{\bar{k}}(t_1,...,t_i+l,...,t_j+l,...,t_n,u_1,...,u_i-l,...,u_{j-1}-l,...,u_n,\alpha)- \\ & -p_{\bar{k}}(t_1,...,t_i+l,...,t_j,...,t_n,u_1,...,u_i-l,...,u_{j-1},...,u_n,\alpha)- \\ & -p_{\bar{k}}(t_1,...,t_i,...,t_j+l,...,t_n,u_1,...,u_i,...,u_{j-1}-l,...,u_n,\alpha)+p_{\bar{k}}(\bar{\gamma},\alpha) \end{aligned} \tag{2.6}$$

умноженный на $l^{-2}$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial t_j} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_i \partial u_{j-1}} - \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial t_j \partial u_i} + \frac{\partial^2 p_{\bar{k}}}{\partial u_i \partial u_{j-1}}.$$

С другой стороны, можно разлагать вероятности в (2.6), применяя формулу полной вероятности. Используя обозначение $\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} = \left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_i\right)_j$, получим

$$\begin{aligned} & P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i\cup\varepsilon_i & \gamma_j\cup\varepsilon_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right) = \\ & = \sum_{0\le s_1+s_2\le 2} P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-s_1 & k_j-s_2 & s_1 & s_2\end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} & P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i\cup\varepsilon_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1} P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-1 & k_j & 1 & s\end{pmatrix}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1,2} P\begin{pmatrix}\bar{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \bar{k} & 0 & s\end{pmatrix} + P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i-2 & k_j & 2 & 0\end{pmatrix}\right) + o(l^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\cup\varepsilon_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\right) = \sum_{s=0,1} P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-1 & s & 1\end{pmatrix}\right) + \\ & + \sum_{s=0,1,2} P\begin{pmatrix}\bar{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \bar{k} & s & 0\end{pmatrix} + P\left(\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix}_{ij} \bigcap \begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ k_i & k_j-2 & 0 & 2\end{pmatrix}\right) + o(l^2). \end{aligned}$$

Наконец,

$$P\begin{pmatrix}\bar{\gamma}\\ \bar{k}\end{pmatrix} = \sum_{s_1+s_2\le 2} P\begin{pmatrix}\bar{\gamma} & \varepsilon_i & \varepsilon_j\\ \bar{k} & s_1 & s_2\end{pmatrix} + o(l^2).$$

Подставляя в (2.6), получим

$$c_{iR,jL,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_{j-1}}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}},\tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta^2_{ij}Y_{\overline{k}}=Y_{\overline{k}_{ij}}-Y_{\overline{k}_i}-Y_{\overline{k}_j}+Y_{\overline{k}},\quad \overline{k}_i=(k_1,...,k_i-1,...,k_n),\\ \overline{k}_{ij}=(k_1,...,k_i-1,...,k_j-1,...,k_n).\end{gathered}\tag{2.8}$$

В частности, для $j=i+1$, в (2.7) имеем $\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{j-1}}=\dfrac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2}$. Аналогично

$$c_{iL,jR,hh}\,\Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial t_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_j}-\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_j\partial u_{i-1}}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}\,\partial u_j}.\tag{2.9}$$

В случае $i=1$ или $j=n$ должны подставить $\dfrac{\partial}{\partial u_0}\equiv 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial u_n}\equiv 0$. В частности, для $i=1$ и $j=n$ имеем

$$c_{1L,nR,hh}\,\Delta^2_{1n}\,\Pi_{1L,nR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_1\partial t_n}.\tag{2.10}$$

Ниже мы будем использовать формулы для распределений Пальма $\Pi^{(2)}_{y,h}$ второго порядка в смысле горизонтальных окон, определенные условием, что две прямые из реализации процесса $\{g_i\}$ содержат точку $y\in g(\alpha)$. Например, используя формулу Тейлора, получим

$$c^{(2)}_{iR,h}\,\Delta^2_{ii}\Pi^{(2)}_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)=\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}-2\,\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\partial u_i}+\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i^2},\tag{2.11}$$

где $c^{(2)}_{iR,h}$ — постоянная, $iR$ — правый конец отрезка $\gamma_i$, а $\Delta^2_{ii}$ — обычная вторая разность по $i$. Аналогичная формула существует и для $\Pi^{(2)}_{iL,h}$.

## §3. АНАЛИЗ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для заданной системы непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1,...,\gamma_n\subset g(\alpha)$ рассмотрим треугольник, показанный на Рис. 1.

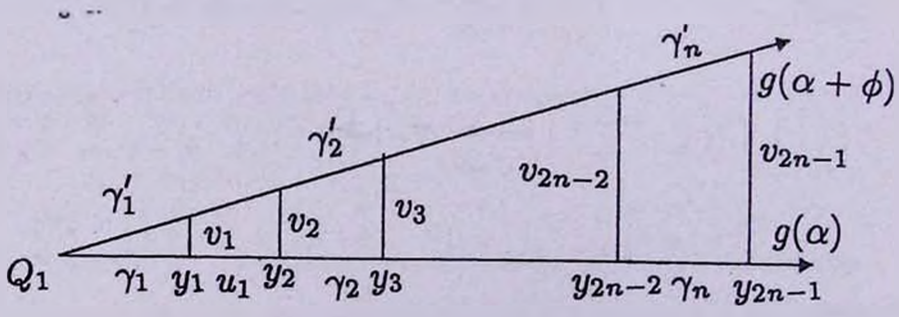


**Рис. 1.**

На прямой $g(\alpha+\phi)$ рассмотрим $n$ отрезков $\gamma_1', ..., \gamma_n'$, чьи перпендикулярные проекции на $g(\alpha)$ суть начальные отрезки $\gamma_1, ..., \gamma_n$. Длины $\gamma_i'$ пусть будут $t_i'$, а пробелы между $\gamma_i'$ и $\gamma_{i+1}'$ обозначим через $u_i'$. Так как при $\phi \to 0$, $t_i' - t_i = o(\phi)$ и $u_j' - u_j = o(\phi)$ $(i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, ..., n-1)$, имеем

$$\lim_{\phi\to 0} \frac{p_{\overline{k}}(\overline{t'}, \overline{u'}, \alpha+\phi) - p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\phi} = \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha}. \tag{3.1}$$

Вычислим те же пределы, используя разложения

$$\binom{\overline{\gamma}'}{\overline{k}} = \bigcup_{s_1,...,s_{2n-1}\geq 0} \left(\binom{\overline{\gamma}'}{\overline{k}} \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & ... & s_{2n-1}\end{pmatrix}\right), \tag{3.2}$$

$$\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} = \bigcup_{s_1,...,s_{2n-1}\geq 0} \left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_{2n-1} \\ s_1 & s_2 & ... & s_{2n-1}\end{pmatrix}\right). \tag{3.3}$$

**Лемма 3.**

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \lim_{\phi\to 0} \phi^{-1} \left[\sum_{i=1}^{2n-1} P\left(\binom{\overline{\gamma}'}{\overline{k}} \bigcap \binom{v_i}{1}\right) - P\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap \binom{v_i}{1}\right)\right]. \tag{3.4}$$

**Доказательство** : следует из (1.1) и (1.2).

Очевидно, имеем разложение

$$\binom{v_i}{1} = \binom{v_i}{1} \bigcap R \bigcup \binom{v_i}{1} \bigcap L, \tag{3.5}$$

где $R$ — событие $\{\Psi \in (0, \pi/2)\}$, а $L = \{\Psi \in (\pi/2, \pi)\}$.

**Замечание.** Обозначения $R$ и $L$ имеют смысл возможной кинематической интерпретации углов как скоростей точек, движущихся вдоль прямой $g(\alpha)$. Таким образом, $R$ соответствует движению *вправо*, а $L$ - *влево*.

Используя (3.4), (3.5) и

$$P\binom{v_i}{1} = \lambda(\alpha+\pi/2)\, y_i\, \phi + o(\phi), \qquad i = 1, ..., 2n-1, \tag{3.6}$$

где $y_i$ — координата основания $v_i$ на $g(\alpha)$ (см. Рис. 1), получим

$$\begin{aligned}
[\lambda(\alpha+\pi/2)]^{-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} y_{iL} \Bigg[ &\Pi_{iL,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i} \bigcap R\right) + \Pi_{iL,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap L\right) - \\
&- \Pi_{iL,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap R\right) - \Pi_{iL,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i} \bigcap L\right)\Bigg] + \sum_{i=1}^{n} y_{iR} \Bigg[\Pi_{iR,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap R\right) + \\
&+ \Pi_{iR,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i} \bigcap L\right) - \Pi_{iR,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i} \bigcap R\right) - \Pi_{iR,v}\left(\binom{\overline{\gamma}}{\overline{k}} \bigcap L\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

В (3.7) сумма распространяется на отрезки $\gamma_1, ..., \gamma_n$ ; как и выше $iL$ — левый, а $iR$ — правый концы отрезка $\gamma_i$. Наконец, $\overline{k}_i = (k_1, ..., k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, ..., k_n)$. Следующий шаг состоит в вычислении (3.7) при Условии а) (см. Введение). Заменим вертикальные окна горизонтальными. Очевидно

$$\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap L\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap R\right) = E_{iL,v}\left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)]\right),$$

где $I$ — индикаторная функция соответствующего события. Применяя Лемму 1 для $F(\mathrm{m}, \Psi) = I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)]$ и соотношение $[I_R(\Psi) - I_L(\Psi)] \cdot |\cot\Psi| = \cot\Psi$, получим (сравни с [12])

$$\lambda(\alpha + \pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap L\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap R\right)\right] =$$
$$= -\lambda(\alpha)\, E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right].$$

При Условии а) оно равно

$$-\lambda(\alpha)\cdot E_{iL,h}\left[I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\cot\Psi\right] = -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi.$$

Стационарность дает пам возможность использования упрощенной записи $E_{iL,h}\cot\Psi = E_\alpha\cot\Psi$. Аналогично, при Условии а)

$$\lambda(\alpha + \pi/2)\left[\Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap R\right) - \Pi_{iL,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k_i}\right)\bigcap L\right)\right] =$$
$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap R\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\bigcap L\right)\right] =$$
$$= \lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi,$$

$$\lambda(\alpha + \pi/2)\left[\Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap L\right) - \Pi_{iR,v}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\bigcap R\right)\right] =$$
$$= -\lambda(\alpha)\cdot\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\cdot E_\alpha\cot\Psi.$$

Подставляя эти формулы в (3.7), получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial\alpha} = \lambda(\alpha)\sum_{i=2}^{n}\left\{y_{iL}\left[\Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right) - \Pi_{iL,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\right] +\right.$$
$$\left. + y_{iR}\left[\Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) - \Pi_{iR,h}\left(\frac{\overline{\gamma}}{\overline{k}_i}\right)\right]\right\} E_\alpha\cot\Psi.$$

Из (2.1), (2.3) и (2.5), получим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} = \left\{ \sum_{i=2}^{n} y_{iL} \left[ \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_{i-1}} \right] - \sum_{i=1}^{n-1} y_{iR} \left[ \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i} \right] - y_{nR} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_n} \right\} E_\alpha \cot \Psi. \tag{3.8}$$

Для полноты приведем доказательство соотношения

$$E_\alpha \cot \Psi = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}, \tag{3.9}$$

содержащегося в [12]. Существует интегральное соотношение [4] между $\lambda(\alpha)$ и плотностью первой моментной меры $f(\varphi)$ :

$$\lambda(\alpha) = \int_0^\pi |\cos(\varphi - \alpha)|\, f(\varphi)\, d\varphi =$$
$$= \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \cos(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \cos(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi.$$

Дифференцируя, получим

$$\lambda'(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi.$$

Используя $\Psi = \varphi - \alpha - \pi/2$, имеем

$$E_\alpha \cot \Psi = E_\alpha \cot(\varphi - \alpha + \pi/2) = -E_\alpha \tan(\varphi - \alpha) =$$
$$= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \tan(\varphi - \alpha)\, |\cos(\varphi - \alpha)|\, f(\varphi)\, d\varphi =$$
$$= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \int_0^\pi \sin(\varphi - \alpha)\, \mathrm{sign}[cos(\varphi - \alpha)]\, f(\varphi)\, d\varphi =$$
$$= -\frac{1}{\lambda(\alpha)} \left[ \int_\alpha^{\alpha+\pi/2} \sin(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi - \int_{\alpha+\pi/2}^{\alpha+\pi} \sin(\varphi - \alpha)\, f(\varphi)\, d\varphi \right] = -\frac{\lambda'(\alpha)}{\lambda(\alpha)}.$$

Так как $y_{iR} - y_{iL} = t_i$ и $y_{(i+1)R} - y_{iR} = u_i$, то (3.8) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda'(\alpha)} \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial \alpha} - \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i} - \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i} = 0. \tag{3.10}$$

Первые интегралы этого однородного в частных производных дифференциального уравнения первого порядка (см. [14]) суть

$$\lambda(\alpha)\, t_i = c_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad \lambda(\alpha)\, u_j = b_j, \quad j = 1, ..., n-1.$$

Таким образом, мы пришли к первому заключению :

$$p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = q_{\overline{k}}(\lambda(\alpha)\, \overline{t}, \lambda(\alpha)\overline{u}), \tag{3.11}$$

где $q_{\overline{k}}$ суть некоторые функции от $2n - 1$ переменных. Мы вернемся к этим функциям в §7.

## §4. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для дальнейшего анализа нам понадобится следующая основная теорема комбинаторной интегральной геометрии (см. [1], [3], [15] и [16]).

Предположим, что на плоскости задано конечное множество точек $\{P_i\}$. Обозначим через $\rho_{ij}$ отрезок с концами $P_i$ и $P_j$, а через $|\rho_{ij}|$ его длину. Положим $[\rho_{ij}] = \{g \in \mathbf{G}\colon g \cap \rho_{ij} \neq \emptyset\}$. Пусть $Br\{P_i\}$ — минимальное (конечное) кольцо (кольцо Бюффона) подмножеств $\mathbf{G}$, содержащее все множества $[\rho_{ij}]$. Две точки $P_i$ и $P_j$ называются соседними, если отрезок $\rho_{ij}$ не содержит других точек из множества $\{P_i\}$. Каждой паре $P_i$, $P_j$ соседей соответствует прямая

$$g_{ij} = \text{ прямая проходит через } P_i \text{ и } P_j$$

и четыре *локально непересекающиеся* подмножества $\mathbf{G}$ :

$$1 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в правой от } g \text{ полуплоскости } \},$$

$$2 = \{g \in \mathbf{G} : \text{все точки из } \{P_i\} \cap g_{ij} \text{ лежат в левой от } g \text{ полуплоскости } \},$$

$$3 = \{g \in \mathbf{G}\colon \text{ точка } P_i \text{ лежит в правой , а } P_j \text{ в левой от } g \text{ полуплоскости } \}.$$

$$4 = \{g \in \mathbf{G}\colon \text{ точка } P_i \text{ лежит в левой, а } P_j \text{ в правой от } g \text{ полуплоскости } \}.$$

Так как прямые $g \in \mathbf{G}$ ненаправленные, то говоря о левой или правой полуплоскостях, ограниченных прямой $g \in \mathbf{G}$, мы подразумеваем следующее : каждой прямой $g_{ij}$ мы приписываем направление, скажем от $P_i$ к $P_j$, если $i < j$. По непрерывности, оно однозначно определяет направление прямых $g$ из окрестности прямой $g_{ij}$.

Как обычно $I_A(g) = 1$, если $g \in A$ и 0, в противном случае. Через $\mu$ обозначим $\mathbb{M}_2$–инвариантную меру в $\mathbf{G}$.

**Теорема. (Р. В. Амбарцумян [3], [16]).** *Значение меры $\mu(C)$ для каждого подмножества $C \in Br\{P_i\}$ представимо в виде линейной комбинации расстояний $\rho_{ij}$ между соседними точками $P_i$ и $P_j$, с целочисленными коэффициентами :*

$$\mu(C) = \sum_{i<j} c_{ij}(C)\,|\rho_{ij}|, \tag{4.1}$$

*где сумма $\sum_{i<j}$ берется по всем парам соседних точек из множества $\{P_i\}$. Целые числа $c_{ij}$ вычисляются по "четырех индикаторной" формуле :*

$$c_{ij}(C) = I_C(\overset{+}{i},\overset{-}{j}) + I_C(\overset{-}{i},\overset{+}{j}) - I_C(\overset{-}{i},\overset{-}{j}) - I_C(\overset{+}{i},\overset{+}{j}). \tag{4.2}$$

В (4.2)

$$I_C(\overset{+}{i},\overset{+}{j}) = I_{C\cap 1}(g),\ I_C(\overset{-}{i},\overset{-}{j}) = I_{C\cap 2}(g),\ I_C(\overset{+}{i},\overset{-}{j}) = I_{C\cap 3}(g),\ I_C(\overset{-}{i},\overset{+}{j}) = I_{C\cap 4}(g).$$

Применим разложение (4.1), (4.2) в следующей постановке. Пусть задана система непересекающихся замкнутых интервалов $\gamma_1,\dots,\gamma_n \subset g(\alpha)$. Рассмотрим прямоугольник $R$, основанием которого является минимальный отрезок, содержащий $\gamma_1,\dots,\gamma_n$. Через $D_i \subset R$ обозначим замкнутый прямоугольник, чье основание есть $\gamma_i$ (см. Рис. 2), вертикальные стороны прямоугольников $D_1,\dots,D_n$ обозначим через $v_1,\dots,v_{2n}$, $|v_1| = \dots = |v_{2n}| = l$.

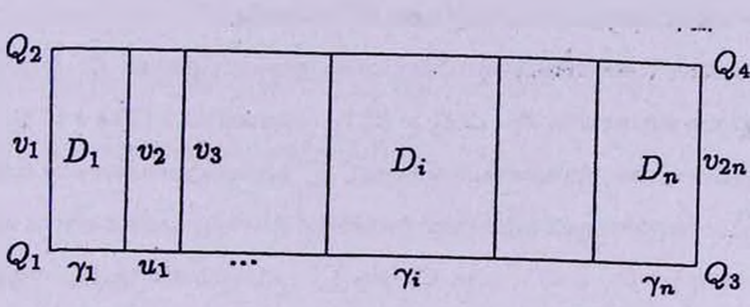


**Рис. 2**

Через $\tau_{ir}$, $r = 1, 2, \dots$ обозначим случайные хорды прямоугольника $D_i$, образованные прямыми из $\{g_i\}$. Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{2n} [v_i] = [v_1] \cap [v_{2n}]$, где $[v] = \{g \in \mathbf{G} :\ g \cap v \neq \emptyset\}$. Пусть $\chi_j(g) = g \cap D_j$, $j = 1,\dots,n$. Определим

$$B_{k_1,\dots,k_m} = B_{\bar{k}} = \{g \in \mathbf{G} :\ \text{точно } k_j \text{ хорды } \tau_{jr} \text{ пересекают } \chi_j(g),\ j = 1,\dots,n\}$$

и рассмотрим множества

$$\{P_j\} = \text{ множество концов хорд } \tau_{ir} \text{ и } \{Q_m\} = \text{ вершины прямоугольника } R.$$

Нетрудно доказать, что

$$A \cap B_{\bar{k}} \in Br\{\{P_j\} \cup \{Q_m\}\}.$$

Следовательно, разложение (4.1) можно записать для инвариантной меры множества $C = A \cap B_{\bar{k}}$. Для каждой реализации $\mathrm{m} = \{g_i\}$, для которой $\{P_i\} \bigcap \{Q_m\} = \emptyset$, коллинеарными триадами в $\{P_i\} \bigcup \{Q_m\}$ могут быть или $\{P_i, P_j, P_k\} \subset g_s \in \mathrm{m}$, или $\{Q_m, Q_j, P_k\}$. Результат имеет вид :

$$\mu(A \cap B_{\bar{k}}) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i(\mathrm{m}), \tag{4.3}$$

где

$$\xi_1(\mathrm{m}) = \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_4) + \sqrt{T^2 + l^2} \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_1, Q_3) - T \cdot I_{\bar{k}}(Q_2, Q_4), \tag{4.4}$$

$$\xi_2(\mathrm{m}) = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{r \in A} |\tau_{ir}| \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(\tau_{ir}), \tag{4.5}$$

$$\xi_3(\mathrm{m}) = \sum\nolimits^{*} |P_i, P_j| \cdot [I_d(P_i, P_j) - I_s(P_i, P_j)] I_A(P_i, P_j)\, \Delta^2_{rq} I_{\bar{k}}(P_i, P_j), \tag{4.6}$$

$$\xi_4(\mathrm{m}) = \sum_{Q_m} \sum_{P_j} |Q_m, P_j| \cdot I_A(Q_m, P_j)\, [I_d(Q_m, P_j) - I_s(Q_m, P_j)] \cdot \Delta_i I_{\bar{k}}(Q_m, P_j). \tag{4.7}$$

Выше мы использовали следующие обозначения :

$T$ — длина горизонтального основания прямоугольника $R$; $I_{\bar{k}}(g) = I_{B_{\bar{k}}}(g)$ — индикатор множества $B_{\bar{k}}$; $\Delta_i Y_{\bar{k}}$ и $\Delta^2_{ij} Y_{\bar{k}}$ определены в (2.4) и (2.8).

В двойной сумме, определяющей $\xi_2(\mathrm{m})$, $\sum_{r \in A}$ распространяется по всем хордам $\tau_{ir}$, продолжения которых пересекают отрезки $v_1$ и $v_{2n}$, вторая сумма распространяется по всем $D_i$, $i = 1, ..., n$. Сумма $\sum^*$, определяющая $\xi_3$, распространяется по 2-х элементным подмножествам $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$, для которых $P_i$ и $P_j$ принадлежат разным прямым из $\{g_i\}$ и лежат на разных вертикальных окнах. Для определения индикаторов $I_d$ и $I_s$ в (4.6) рассмотрим хорды $\tau_{rl}$ и $\tau_{qm}$, для которых точки $P_i$ и $P_j$ являются концами. По определению, $I_d(P_i, P_j) = 1$, если хорды $\tau_{rl}$ и $\tau_{qm}$ лежат в разных полуплоскостях, ограниченных прямой, проходящей через точки $P_i$ и $P_j$ ; $I_s(\cdot) = 1 - I_d(\cdot)$. Символ $\Delta^2_{rq}$ относится к прямоугольникам $D_r$ и $D_q$, на вертикальных сторонах которых лежат точки $P_i$ и $P_j$.

В (4.7) индикаторы $I_d$ и $I_s$ имеют аналогичный смысл, отрезок, концом которого является точка $Q_m$, суть $v_1$ или $v_{2n}$. Символ $\Delta_i$ относится к прямоугольнику $D_i$, на вертикальной стороне которого лежит точка $P_j$. Пары точек или отрезков в аргументе индикаторов $I_{\bar{k}}$, $I_A$, $I_d$ или $I_s$ обозначают соответствующие прямые из $\mathbf{G}$.

## §5. АНАЛИЗ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для $\mathbf{P} \in$ Ti2, комбинаторное разложение (4.3) выполняется с вероятностью $\mathbf{P} = 1$. Таким образом, мы можем усреднить (4.3) относительно распределения $\mathbf{P}$. Для математического ожидания относительно $\mathbf{P}$ будем использовать обозначение $\mathbf{E_P}$. Величины $\mathbf{E_P}\xi_i$ $(i = 1, ..., 4)$ зависят от параметра $l$ и при $l \to 0$ их главные члены имеют порядок $l^2$. Аналогичное утверждение справедливо для $\mu(A \cap B_{\overline{k}})$ из (4.3). В этом параграфе мы выводим дифференциальное тождество для $p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)$, приравнивая члены, пропорциональные $l^2$ в правой и левой частях усредненного уравнения (4.3).

**Анализ $\mathbf{E_P}\mu(A \cap B_{\overline{k}})$.** По теореме Фубини имеем

$$\mathbf{E_P}\mu(A \cap B_{\overline{k}}) = \int_A \mathbf{E_P} I_{\overline{k}}(g)\, dg = \int_A p_{\overline{k}}(\chi_1(g), ..., \chi_n(g), \widetilde{\alpha})\, dg. \tag{5.1}$$

Здесь $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(g)$ — направление прямой $g$ (так что при $l \to 0$ множество значений $\widetilde{\alpha}$ стягивается к точке $\alpha$) и

$$p_{\overline{k}}(\chi_1(g), ..., \chi_n(g), \widetilde{\alpha}) = \mathbf{E_P} I_{\overline{k}}(g) = \mathbf{P}(g \in B_{\overline{k}}) = p_{\overline{k}}(\overline{\chi}(g), \overline{u}(g), \widetilde{\alpha}). \tag{5.2}$$

Используя (1.2), выделим главный член в (5.1) :

$$\mathbf{E_P}\mu(A \cap B_{\overline{k}}) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) \cdot \frac{1}{T} \cdot l^2 + o(l^2). \tag{5.3}$$

**Анализ $\mathbf{E_P}\xi_1(\mathbf{m})$.** Имеем

$$\mathbf{E_P}\xi_1(\mathbf{m}) = \sqrt{T^2 + l^2}\left[p_{\overline{k}}\left(\frac{\overline{t}}{\cos\phi}, \frac{\overline{u}}{\cos\phi}, \alpha + \phi\right) + p_{\overline{k}}\left(\frac{\overline{t}}{\cos\phi}, \frac{\overline{u}}{\cos\phi}, \alpha - \phi\right)\right] - \\ - 2T\, p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha),$$

где $\cos\phi = (1 + l^2/T^2)^{-1/2}$, откуда следует

$$\mathbf{E_P}\xi_1(\mathbf{m}) = p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) \cdot \frac{l^2}{T} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial t_i} \frac{t_i}{T} \cdot l^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial u_i} \frac{u_i}{T} \cdot l^2 + \\ + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)}{\partial \alpha^2} \frac{l^2}{T} + o(l^2). \tag{5.4}$$

**Анализ $\mathbf{E_P}\xi_2(\mathbf{m})$.** Значение меры $m_1$ на множестве $[v_1] \cap [v_{2n}]$ равно $f(\alpha)\dfrac{l^2}{T} + o(l^2)$, следовательно

$$\mathbf{E_P}\xi_2(\mathbf{m}) = \frac{2f(\alpha)}{T} \sum_{i=1}^{n} t_i\, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha)\, l^2 + o(l^2), \tag{5.5}$$

где $\pi_{\overline{k}}(\overline{t}, \overline{u}, \alpha) = \Pi_A\left(\dfrac{\overline{\gamma}}{\overline{k}}\right)$.

**Анализ** $\mathbf{E_P}\xi_3(\mathbf{m})$. Нам понадобится следующая простая лемма интегральной геометрии.

**Лемма 4.**

$$\int_{v_q}\int_{v_r} |P_i, P_j|\, I_A(g)\, dx_q\, dx_r = \frac{(y_q - y_r)^2}{T}\, l^2 + o(l^2),$$

*где* $x_q$, $x_r$ *— одномерные координаты точек* $P_i$ *и* $P_j$ *на* $v_q$ *и* $v_r$*, соответственно,* $g$ *— прямая, содержащая* $x_q$ *и* $x_r$*.*

Для $P_1 \in v_q$ и $P_2 \in v_r$, имеем

$$I_d(P_1, P_2) - I_s(P_1, P_2) = S(q, r)\ [I(R \times R) + I(L \times L) - I(R \times L) - I(L \times R)]\,,$$

где $S(q, r) = +1$, если $y_q$ — левый конец $\gamma_r$, а $y_r$ — правый конец $\gamma_r$, или наоборот, и $S(q, r) = -1$, в противном случае ; $R = (0, \pi/2)$, $L = (\pi/2, \pi)$. По лемме 4 имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E_P}\xi_3(\mathbf{m}) = \\ &= \frac{1}{T}\sum_{q<r}(y_q - y_r)^2\, c_{q,r,vv}\, S(q, r)\, \Big[\Delta^2_{ij}\Pi_{q,r,vv}\Big(\Big(\frac{\overline{\gamma}}{k}\Big) \times \Big(R \times R \bigcup L \times L\Big)\Big) - \\ &- \Delta^2_{rq}\Pi_{i,j,vv}\Big(\Big(\frac{\overline{\gamma}}{k}\Big) \times \Big(L \times R \bigcup R \times L\Big)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{5.6}$$

где суммирование распространяется по упорядоченным парам концов $\{y_q\}$ интервалов из системы $\overline{\gamma}$. Здесь и ниже мы используем краткие обозначения

$$c_{y_q,y_r,vv} = c_{q,r,vv}\,, \quad \Pi_{y_q,y_r,vv} = \Pi_{q,r,vv}\,.$$

**Анализ** $\mathbf{E_P}\xi_4(\mathbf{m})$. Пусть

$$\xi_4(\mathbf{m}) = \sum_{q=1}^{2n}\eta_q(\mathbf{m}),$$

где

$$\eta_q(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^{4}\sum_{P_j\in v_q} K(Q_m, P_j),$$

$$K(Q, P) = |Q, P| \cdot I_A(Q, P)[I_d(Q, P) - I_s(Q, P)] \cdot \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q, P),$$

*а* $\Delta_i$ *соответствует отрезку* $\gamma_i$ *с концом* $y_q$. Рассмотрим события :
$\begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ k & 0 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно $v_q$ пересекается $k$ прямыми из $\{g_i\}$, а все остальные вертикальные окна (т.е. окна из $\overline{v_q}$) не имеют пересечений ;

$\begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A$ = вертикальное окно $v_q$ пересекается одной прямой $g_0 \in \{g_i\}$, которая пересекает, по крайней мере, одно вертикальное окно из $\overline{v_q}$, и ни одна другая прямая из $\{g_i\}$ не пересекает ни одно из вертикальных окон;

$\bigcup_{b\neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = вертикальное окно $v_q$ пересекается прямой из $\{g_i\}$ и существует точно одно окно $v_b \neq v_q$, которое пересекается другой прямой из $\{g_i\}$.

**Лемма 5.** *Пусть $\overline{Z}$ — событие, дополнительное к*

$$Z = \bigcup_{q=1}^{2n} \left[ \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\bigcup} \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bigcup \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A \bigcup_{b\neq q} \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

*Для* $\mathrm{P} \in$ *Ti2*, $P(\overline{Z}) = o(l^2)$.

Доказательство следует из (1.1), (1.2).

С точностью до случайного слагаемого, математическое ожидание которого есть $o(l^2)$, имеем следующее представление (см. Лемму 5) :

$$\eta_q(\mathbf{m}) = \eta_{q1}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^{4} \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) + \eta_{qA}(\mathbf{m}) + \sum_{m=1}^{4} \sum_{b\neq q} \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}), \tag{5.7}$$

где использованы индикаторные функции $I$ следующих событий :

$$\eta_{q1}(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^{4} K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \eta_{q2}^{(m)}(\mathbf{m}) = \sum_{P_1, P_2 \in v_q} K(Q_m, P_j) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & \overline{v_q} \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\eta_{qA}(\mathbf{m}) = \sum_{m=1}^{4} K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q \\ 1 \end{pmatrix}_A; \qquad \eta_{qb}^{(m)}(\mathbf{m}) = K(Q_m, P_1) \cdot I \begin{pmatrix} v_q & v_b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Анализ $\mathrm{E_P}\eta_{q1}(\mathbf{m})$.** Разделим $v_q$ на три подинтервала $v_{q,1}$, $v_{q,2}$ и $v_{q,3}$ (см. Рис 3.). Если событие $\begin{pmatrix} v_{q,3} & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ произошло, то $I_{\overline{k}}(Q_3, P_j) = I_{\overline{k}}(Q_4, P_j)$, и выражения $[I_d(Q_3, P_j) - I_s(Q_3, P_j)]$ и $[I_d(Q_4, P_j) - I_s(Q_4, P_j)]$ имеют разные знаки. Так как $|Q_3, P_j| - |Q_4, P_j| = O(l^2)$ и $\mathrm{P}\begin{pmatrix} v_{q,3} & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O(l)$, получаем

$$\mathrm{E_P} \sum_{m=1}^{4} K(Q_m, P_1) I \begin{pmatrix} v_{q,3} & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = o(l^2). \tag{5.8}$$

Пусть $g_1$ — прямая из $\mathbf{m} \in \begin{pmatrix} v_{q,1} & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, пересекающая $v_{q,1}$, $P_1 = v_{q,1} \bigcap g_1$. Аналогично, пусть $g_2$ — прямая из $\mathbf{m} \in \begin{pmatrix} v_{q,2} & \overline{v_q} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, пересекающая $v_{q,2}$, $P_2 =$

$v_{q,2} \bigcap g_2$. Рассмотрим выражение

$$\mathbf{E_P}\left[|Q_1,P_1|\, I\begin{pmatrix} v_{q,1} & \overline{v_q} \\ 1 & 0\end{pmatrix} [I_d(Q_1,P_1)-I_s(Q_1,P_1)]\cdot\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1,P_1)+\right.$$

$$\left.+|Q_2,P_2|\, I\begin{pmatrix} v_{q,2} & \overline{v_q} \\ 1 & 0\end{pmatrix} [I_d(Q_2,P_2)-I_s(Q_2,P_2)]\cdot\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2,P_2)\right]=$$

$$=\int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} |Q_1,x|\,[I_d(Q_1,x)-I_s(Q_1,x)]\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x,\psi}\left[I\begin{pmatrix}\overline{v_q}\\ 0\end{pmatrix}\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1,x)\right] f(\psi)\sin\psi\, d\psi+ \tag{5.9}$$

$$+\int_{v_{q,2}} dx \int_{\Psi(x)} |Q_2,x|\,[I_d(Q_2,x)-I_s(Q_2,x)]\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x,\psi}\left[I\begin{pmatrix}\overline{v_q}\\ 0\end{pmatrix}\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2,x)\right] f(\psi)\sin\psi\, d\psi,$$

где $\mathbf{E}_{x,\psi}$ — математическое ожидание относительно распределения Пальма $\Pi_g$ для $g=(x,\psi)$. Множество направлений $\Psi(x)$ зависит от $x$ и соответствует условию $\{g_{x,\psi}$ не пересекает окна $\overline{v_q}\}$.

Заменяя $|Q_1,x|$ и $|Q_2,x|$ общим предельным значением $y_q$ и используя трансляционную инвариантность, перепишем (5.9) в виде (обозначения $Q_2'$ и $v_q'$ показаны на Рис. 3)

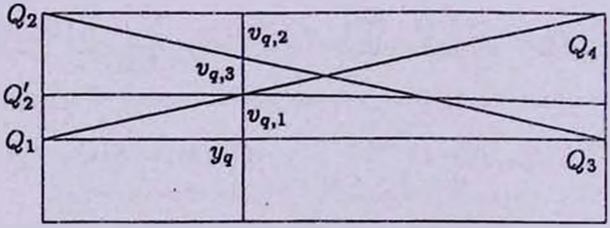


**Рис. 3. Прямоугольник $R'$ получается из $R$ с помощью сдвига вниз. В $R'$ верхняя горизонтальная сторона содержит верхний конец $v_{q,1}$.**

$$y_q\int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)} [I_d(Q_1,x)-I_s(Q_1,x)]\,\mathbf{E}_{x,\psi}\left[I\begin{pmatrix}\overline{v_q}\\ 0\end{pmatrix}\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_1,x)\right] f(\psi)\sin\psi\, d\psi+$$

$$+\,y_q\int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi'(x)} [I_d(Q_2',x)-I_s(Q_2',x)]\times$$

$$\times\mathbf{E}_{x,\psi}\left[I\begin{pmatrix}\overline{v_q'}\\ 0\end{pmatrix}\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2',x)\right] f(\psi)\sin\psi\, d\psi+o(l^2), \tag{5.10}$$

где $\Psi'(x) = \Psi(x')$, и $x' = x + |Q_2'Q_2|$. Интервалы $v_q'$ суть образы $v_q$ при том же сдвиге.

На множестве $\Psi(x) \bigcap \Psi'(x)$ имеем $[I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] = -[I_d(Q_2', x) - I_s(Q_2', x)]$. Таким образом, (5.10) имеет вид (знак последнего слагаемого неважен)

$$\begin{aligned} & y_q \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)\cap\Psi'(x)^c} [I_d(Q_1, x) - I_s(Q_1, x)] \times \\ & \times E_{x,\psi} \left[ I\begin{pmatrix} \overline{v_q} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin\psi\, d\psi + \\ & + y_q \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi'(x)\cap\Psi(x)^c} [I_d(Q_2', x) - I_s(Q_2', x)] \times \\ & \times E_{x,\psi} \left[ I\begin{pmatrix} \overline{v_q'} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q_2', x) \right] f(\psi) \sin\psi\, d\psi \pm \\ & \pm y_q \int_{v_{q,1}} dx \int_{\Psi(x)\bigcap\Psi'(x)} E_{x,\psi} \left[ I\begin{pmatrix} \overline{v_q} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q_1, x) - \right. \\ & \left. - I\begin{pmatrix} \overline{v_q'} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q_2', x) \right] f(\psi) \sin\psi\, d\psi + o(l^2). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Рассмотрим последнее слагаемое. На событии $\begin{pmatrix} \overline{v_q'} \\ 0 \end{pmatrix} \bigcap \begin{pmatrix} \overline{v_q} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v_q' \cup v_q} \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем $I_{\overline{k}}(Q_1, x) = I_{\overline{k}}(Q_2', x)$, и подынтегральное выражение равно нулю. С другой стороны

$$\begin{aligned} & \int_{v_{q,1}} dx \int_{(0,\pi)} \mathrm{E}_{x,\psi} \left[ I\begin{pmatrix} \overline{v_q} \\ 0 \end{pmatrix} I\begin{pmatrix} \overline{v_q'} \\ 0 \end{pmatrix}^c \Delta_i\, I_{\overline{k}}(Q_1, x) \right] f(\psi) \sin\psi\, d\psi = \\ & = c_1\, l^2 \sum_r \Delta_i \Pi_{g,r,vv} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ k \end{pmatrix} + o(l^2), \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $c_1$ не зависит от $l$.

По замечанию в §1 получаем тот же результат для $\begin{pmatrix} \overline{v_q} \\ 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} \overline{v_q'} \\ 0 \end{pmatrix}^c \Delta_i I_{\overline{k}}(Q_2', x)$. Таким образом, последняя сумма в (5.11) есть $o(l^2)$.

Вернемся к первым двум интегралам в (5.11). Так как каждое множество интегрирования стягивается к точке $(0, \alpha)$ на $x, \psi$– плоскости, которая соответствует горизонтальной прямой $g(\alpha)$, для каждого интеграла главный член пропорционален $l^2\, \Delta_i \Pi_{g(\alpha)} \begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ k \end{pmatrix} = l^2\, \Delta_i \pi_{\overline{k}}(\overline{l}, \overline{u}, \alpha)$. Важно отметить, что коэффициент пропорциональности зависит только от расположения отрезков на Рис. 2 и не зависит от выбора вероятностного распределения $\mathrm{P} \in \mathrm{Ti2}$.

Приходим к аналогичному заключению для

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left[|Q_3,P_1|\,I\begin{pmatrix} v_{q,1} & \overline{v_q} \\ 1 & 0\end{pmatrix}[I_d(Q_3,x)-I_s(Q_3,x)]\cdot\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_3,P_1)+\right.$$
$$\left.+|Q_4,P_2|\,I\begin{pmatrix} v_{q,2} & \overline{v_q} \\ 1 & 0\end{pmatrix}[I_d(Q_4,x)-I_s(Q_4,x)]\cdot\Delta_i I_{\overline{k}}(Q_4,P_2)\right], \tag{5.13}$$

как и для $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\eta_{q',1}(\mathrm{m})$, предполагая, что $y_{q'}$ — конец отрезка $\gamma_i$, отличный от $y_q$. Приходим к следующей лемме.

**Лемма 6.**

$$E_P\sum_{q=1}^{2n}\eta_{q1}(\mathrm{m}) = 2\,\frac{f(\alpha)}{T}\sum_{i=1}^{n}C_i'\,\Delta_i\pi_{\overline{k}}(\overline{l},\overline{u},\alpha)\,l^2+o(l^2), \tag{5.14}$$

*где $C_i'$ — константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1,\ldots,y_{2n}$.*

**Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\eta_{qA}(\mathrm{m})$.** Очевидно, что $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\begin{pmatrix} v_q \\ 1\end{pmatrix}_A = O(l^2)$ (см. §1) и предельное положение прямой из $\{g_i\}$, пересекающей $v_q$ есть тестовая прямая $g(\alpha)$. Следовательно, $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\sum\limits_{q=1}^{2n}\eta_{qA}(\mathrm{m})$ имеет вид (5.14) с некоторыми новыми коэффициентами $C_i''$. Этот результат вместе с (5.14) приводит к следующей лемме.

**Лемма 7.**

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\sum_{q=1}^{2n}(\eta_{q1}(\mathrm{m})+\eta_{qA}(\mathrm{m})) = 2\,\frac{f(\alpha)}{T}\sum_{i=1}^{n}C_i\,\Delta_i\pi_{\overline{k}}(\overline{l},\overline{u},\alpha)\,l^2+o(l^2), \tag{5.15}$$

*где $C_i$ — константы, зависящие только от взаимного расположения точек $y_1,\ldots,y_{2n}$.*

Точные значения постоянных $C_i$ будут вычислены в конце этого параграфа.

**Анализ $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\eta_{qb}^{(m)}(\mathrm{m})$.** Начнем с $Q_1$ (т.е. $m=1$). Случайные точки $x\in v_q$ и $z\in v_b$, в которых происходят пересечения, асиптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на $v_q$ или $v_b$. Для выполнения $I_A=1$ точка $x$ должна принадлежать интервалу $I\subset v_q$ (см. Рис. 4). Пусть для соответствующих углов пересечения имеем $\Psi_q\in R$ и $\Psi_b\in R$. Тогда область изменения $I\times v_b$ разбивается на два подмножества. На одном из двух условное математическое ожидание $I_{\overline{k}}$ равно $\Pi_{q,b,vv}\left(\begin{pmatrix}\overline{\gamma}\\ \overline{k}\end{pmatrix}_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i-1 & k_j-1\end{pmatrix}\times R\times R\right)$, а на другом оно равно

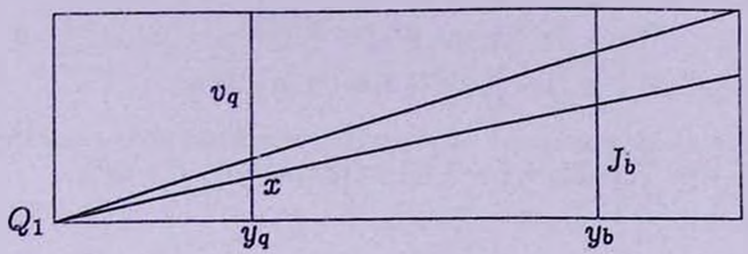


Рис. 4.

$\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j-1\end{pmatrix}\times R\times R\right)$. Вероятности упомянутых множеств пусть будут $p^{(1)}(R,R)$ и $1-p^{(1)}(R,R)$. Ситуация для случаев $\Psi_1\in L$ и $\Psi_2\in L$, $\Psi_1\in L$ и $\Psi_2\in R$ и наконец $\Psi_1\in R$ и $\Psi_2\in L$ аналогична, поэтому имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\eta^{(m)}_{qb}(\mathrm{m}) =\\
&= -S(q,b)\,c_{q,b,vv}\,\Delta_i\Bigg[p^{(1)}(R,R)\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\times R\times R\right)+\\
&+(1-p^{(1)}(R,R))\,\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\times R\times R\right)-\\
&\qquad -p^{(1)}(L,L)\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j-1\end{pmatrix}\times L\times L\right)-\\
&\qquad -(1-p^{(1)}(L,L))\,\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j-1\end{pmatrix}\times L\times L\right)-\\
&\qquad -p^{(1)}(L,R)\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\times L\times R\right)-\\
&\qquad -(1-p^{(1)}(L,R))\,\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j\end{pmatrix}\times L\times R\right)+\\
&\qquad +p^{(1)}(R,L)\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j-1\end{pmatrix}\times R\times L\right)+\\
&\qquad +(1-p^{(1)}(R,L)\,\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\overline{\gamma} \atop k\right)_{ij}\cap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ k_i & k_j-1\end{pmatrix}\times R\times L\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что

$$
p^{(1)}(R,R)=1-p^{(1)}(L,L)=p^{(1)}(L,R)=1-p^{(1)}(R,L)=\frac{1}{l|I|}\int_I\int_J dxdz=\frac{y_b\,y_q^2\,l^2}{2T^2}
$$

(отрезки $I \subset v_q$, $J = J_b(x) \subset v_b$ показаны на Рис. 4). После суммирования находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E_P}\left[\eta_{qb}^{(1)}(\mathrm{m})\right] = -S(q,b)\left\{\frac{y_q^2}{T}\left[1-\frac{y_b}{2T}\right][\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j-1)-\right. \\ \left. -\ \mathcal{E}(q,b,k_i,k_j-1)] - \frac{y_b\,y_q^2}{2T^2}[\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j)-\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)]\right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \tag{5.16}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(q,b,r,s) = c_{q,b,vv}\left[\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ r & s\end{pmatrix}\times(R\times R)\bigcup(L\times L)\right)-\right. \\ \left. -\Pi_{q,b,vv}\left(\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)_{ij}\bigcap\begin{pmatrix}\gamma_i & \gamma_j\\ r & s\end{pmatrix}\times(R\times L)\bigcup(L\times R)\right)\right]. \end{aligned}$$

Аналогично, для вершин $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E_P}\left[\eta_{qb}^{(2)}(\mathrm{m})\, I\begin{pmatrix}v_q & v_b\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = -S(q,b)\left\{\frac{y_q^2}{T}\left[1-\frac{y_b}{2T}\right][\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)-\right. \\ \left. -\ \mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j)] - \frac{y_b\,y_q^2}{2T^2}[\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j-1)-\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j-1)]\right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E_P}\left[\eta_{qb}^{(3)}(\mathrm{m})\, I\begin{pmatrix}v_q & v_b\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = \\ &= -S(q,b)\left\{\frac{(T-y_q)^2}{T}\left[1-\frac{T-y_b}{2T}\right][\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j-1)-\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j-1)]-\right. \\ &\left. -\frac{(T-y_b)(T-y_q)^2}{2T^2}[\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j)-\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)]\right\} l^2 + o(l^2), \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E_P}\left[\eta_{qb}^{(4)}(\mathrm{m})\, I\begin{pmatrix}v_q & v_b\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = \\ &= -S(q,b)\left\{\frac{(T-y_q)^2}{T}\left[1-\frac{T-y_b}{2T}\right][\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)-\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j)]-\right. \\ &\left. -\frac{(T-y_b)(T-y_q)^2}{2T^2}[\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j-1)-\mathcal{E}(q,b,k_i-1,k_j-1)]\right\} l^2 + o(l^2). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Используя (5.16) — (5.19), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E_P}\sum_{m=1}^{4}\eta_{qb}^{(m)}(\mathrm{m}) = -\frac{S(q,b)\,l^2}{T}\Delta_{ij}^2\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)\left\{y_q^2-\frac{y_b\,y_q^2}{T}+\right. \\ &\left. +\ (T-y_q)^2-\frac{(T-y_q)^2(T-y_b)}{T}\right\}+o(l^2) = \\ &= -\frac{S(q,b)\,l^2}{T}\Delta_{ij}^2\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)\left\{y_q^2(T-y_b)+(T-y_q)^2 y_b\right\}+o(l^2) = \\ &= -\frac{S(q,b)\,l^2}{T}\Delta_{ij}^2\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)\left\{(y_q-y_b)^2+Ty_b-y_b^2\right\}+o(l^2). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Вместе с дуальным результатом

$$\mathbf{E_P}\sum_{m=1}^{4}\eta_{b_q}(\mathrm{m}) = -\frac{S(q,b)\,l^2}{T}\,\Delta_{ij}^2\mathcal{E}(q,b,k_i,k_j)\,\left\{(y_q-y_b)^2+Ty_q-y_q^2\right\}+o(l^2) \tag{5.21}$$

приходим к следующей лемме. Используем следующее обозначение

$$\Omega(q,b)=\Pi_{q,b,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}\times(R\times R\cup L\times L)\right)-\Pi_{q,b,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}\times(L\times R\cup R\times L)\right).$$

**Лемма 8.**

$$E_P\sum_{q=1}^{2n}\sum_{m=1}^{4}\sum_{b\neq q}\eta_{qb}^{(m)}(\mathrm{m}) =$$
$$= -2\mathbf{E_P}\xi_3(\mathrm{m})-\frac{1}{T}\sum_{q=2}^{2n-1}y_q\,(T-y_q)\sum_{b\neq q}S(q,b)\,c_{q,b,vv}\,\Delta_{ij}^2\Omega(q,b)l^2+o(l^2). \tag{5.22}$$

**Анализ $\mathbf{E_P}\eta_{q2}(\mathrm{m})$.** Начнем с $Q_1$ (т.е. $m=1$). Случайные точки $x_1,x_2\in v_q$, в которых происходят пересечения, асимптотически независимы и каждая из них равномерно распределена на $v_q$. Для выполнения $I_A=1$, $x_1$ должна принадлежать интервалу $I\subset v_q$ (см. Рис. 4). Пусть для соответствующих углов пересечения имеем $\Psi_1\in R$ и $\Psi_2\in R$. Тогда область изменения $I\times v_q$ разбивается на два подмножества. На одном из двух условное математическое ожидание индикатора $I_{\overline{k}}$ равно $\Pi_{q,q,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}_i\cap\binom{\gamma_i}{k_i-1}\times R\times R\right)$, а на другом оно равно $\Pi_{q,q,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}_i\cap\binom{\gamma_i}{k_i}\times R\times R\right)$. Вероятности вышеупомянутых множеств пусть будут $p^{(1)}(R,R)$ и $1-p^{(1)}(R,R)$. Ситуация для случаев $\Psi_1\in L$ и $\Psi_2\in L$, $\Psi_1\in L$ и $\Psi_2\in R$ и наконец $\Psi_1\in R$ и $\Psi_2\in L$ аналогична. Рассуждая как и в предыдущем случае, получим

$$\mathbf{E_P}\left[\eta_{q2}^{(1)}(\mathrm{m})\right]=$$
$$=y_q\left\{\frac{-y_q^2\,l^2}{2T^2}\,\Delta_{ii}^2\mathcal{E}(q,k_i,k_j)+\frac{y_q\,l^2}{T}\,[\mathcal{E}(q,k_i-2)-\mathcal{E}(q,k_i-1)]\right\}l^2+o(l^2), \tag{5.23}$$

где

$$\mathcal{E}(q,k_i)=c_{q,q,vv}\,\Bigg[\Pi_{q,q,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}_i\bigcap\binom{\gamma_i}{k_i}\times(R\times R)\bigcup(L\times L)\right)-$$
$$-\Pi_{q,q,vv}\left(\binom{\overline{\gamma}}{k}_i\bigcap\binom{\gamma_i}{k_i}\times(R\times L)\bigcup(L\times R)\right)\Bigg].$$

Аналогично, для вершин $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ получаем

$$\mathbf{E_P}\left[\eta_{q2}^{(2)}(\mathbf{m})\right] = \\ = y_q\left\{\frac{-y_q^2\,l^2}{2T^2}\,\Delta_{ii}^2\mathcal{E}(q,k_i,k_j) + \frac{y_q\,l^2}{T}\,[\mathcal{E}(q,k_i)-\mathcal{E}(q,k_i-1)]\right\}l^2+o(l^2), \tag{5.24}$$

$$\mathbf{E_P}\left[\eta_{q2}^{(3)}(\mathbf{m})\right] = (T-y_q)\left\{\frac{-(T-y_q)^2\,l^2}{2T^2}\,\Delta_{ii}^2\mathcal{E}(q,k_i,k_j)+ \\ + \frac{(T-y_q)\,l^2}{T}\,[\mathcal{E}(q,k_i-2)-\mathcal{E}(q,k_i-1)]\right\}l^2+o(l^2), \tag{5.25}$$

$$\mathbf{E_P}\left[\eta_{q2}^{(4)}(\mathbf{m})\right] = (T-y_q)\left\{\frac{-(T-y_q)^2\,l^2}{2T^2}\,\Delta_{ii}^2\mathcal{E}(q,k_i,k_j)+ \\ + \frac{(T-y_q)\,l^2}{T}\,[\mathcal{E}(q,k_i)-\mathcal{E}(q,k_i-1)]\right\}l^2+o(l^2). \tag{5.26}$$

**Лемма 9.**

$$\mathbf{E_P}\sum_{q=1}^{2n}\eta_{2q}(\mathbf{m}) = \frac{1}{T}\sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q)\,c_{q,q,vv}\Delta_{ii}^2\,\Omega(q,q)\,l^2+o(l^2). \tag{5.27}$$

Таким образом, анализ математических ожиданий случайных величин в (4.3) закончен. Приравнивая коэффициенты порядка $l^2$, из (5.3) – (5.6), (5.14), (5.17), (5.22), (5.23) и (5.27) получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial t_i}t_i + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial u_i}u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial\alpha^2} = \\ = -2\,f(\alpha)\sum_{i=1}^{n}(t_i+C_i)\,\Delta_i\pi_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha) + \sum_{i<j}(y_i-y_j)^2\,c_{i,j,vv}\,S(i,j)\,\Delta_{r_q}^2\Omega(i,j) - \Xi, \tag{5.28}$$

где

$$\Xi = -\sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q)\sum_{b\neq q}S(q,b)\,c_{q,b,vv}\,\Delta_{ij}^2\,\Omega(q,b) + \sum_{q=2}^{2n-1} y_q(T-y_q)\,c_{q,q,vv}\,\Delta_{ii}^2\Omega(q,q). \tag{5.29}$$

Остается вычислить значения постоянных $C_i$. Умножим (5.28) на $k_i$ и просуммируем по $\overline{k}$.

Так как $\sum_{\overline{k}} k_i\,p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha) = \lambda(\alpha)\,t_i$ и все члены, содержащие вторую разность, обращаются в нуль, получаем

$$\lambda(\alpha)t_i + \lambda''(\alpha)t_i = -2\,f(\alpha)(t_i+C_i).$$

Используя $\lambda''(\alpha)+\lambda(\alpha) = 2\,f(\alpha)$ (см. [4]), получим $C_i = -2\,t_i$.

## §6. УСЛОВИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ

Используя Лемму 2 для

$$F(\mathrm{m},\Psi_1,\Psi_2)=I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cdot\left[I\,(R\times R)+I\,(L\times L)-I\,(R\times L)-I\,(L\times R)\right],$$

произведения $c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)$ в (5.28), (5.29) можно записать в терминах горизонтальных окон. Получим

$$\begin{gathered}c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)=c_{i,j,hh}\,\Big[E_{i,j,hh}\Big(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\left[I\,(R\times R)+I\,(L\times L)-\right.\\ \left.-\;I\,(R\times L)-I\,(L\times R)\right]\Big)\,|\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2|\Big]\,.\end{gathered}\tag{6.1}$$

Вместе с элементарным тождеством

$$\left[I\,(R\times R)+I\,(L\times L)-I\,(R\times L)-I\,(L\times R)\right]|\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2|=\cot\Psi_1\cdot\cot\Psi_2,$$

из (6.1) следует

$$c_{i,j,vv}\,\Omega(i,j)=c_{i,j,hh}\,\left[E_{i,j,hh}\left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2\right)\right].\tag{6.2}$$

Рассмотрим следствия из факторизационных Условий a) и b) (см. (3.9)). При выполнении Условий a) и b), получаем

$$\begin{gathered}E_{i,j,hh}\left(I\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2\right)=\\ =\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\,E_{i,j,hh}\,(\cot\Psi_1\,\cot\Psi_2)=\frac{\lambda'(\alpha)^2}{\lambda(\alpha)^2}\,\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right).\end{gathered}\tag{6.3}$$

Докажем, что при выполнении Условий a) и b) выражение $\Xi=0$. Действительно, используя обобщенные формулы Пальма, получаем

$$\begin{gathered}\Xi=-\sum_{q=2}^{2n-1}y_q(T-y_q)\sum_{b\neq q}S(q,b)\left[\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}-\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_u}-\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_j\,\partial u_v}+\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial u_u\,\partial u_v}\right]+\\ +\sum_{q=2}^{2n-1}y_q(T-y_q)\left[\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}-\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_i}-\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_{i-1}}+\frac{\partial^2p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_{i-1}}\right],\end{gathered}$$

где в двойных суммах $u=i$, если $q=iR$ и $u=i-1$, если $q=iL$ (см. §2). Аналогично, $v=j$, если $q=jR$ и $v=j-1$, если $q=jL$.

Для любого $i\neq j$ наличие множителя $S(q,b)$ обращает в нуль члены, соответствующие $b=jL$ и $b=jR$. Также и в двойной сумме, если $i=j$, то $y_q$ и $y_b$ суть концы одного и того же интервала $\gamma_i$, поэтому $S(q,b) = S(b,q) = +1$. Так как частные производные в первой и во второй строчках выражения $\Xi$ встречаются с разными знаками, то получаем $\Xi = 0$.

Остается преобразовать слагаемое (см. (5.28))

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{i<j}(y_i - y_j)^2\, c_{i,j,vv}\, S(i,j)\, \Delta^2_{rq}\Pi_{i,j,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) =$$

$$= \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j\\ i<j}}\Bigg[(y_{iL} - y_{jR})^2\, c_{iL,jR,hh}\, \Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) +$$

$$+ (y_{iR} - y_{jL})^2\, c_{iR,jL,hh}\, \Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\Bigg] -$$

$$- \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{\substack{\gamma_i,\gamma_j\\ i<j}}\Bigg[(y_{iR} - y_{jR})^2\, c_{iR,jR,hh}\, \Delta^2_{ij}\Pi_{iR,jR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right) +$$

$$+ (y_{iL} - y_{jL})^2\, c_{iL,jL,hh}\, \Delta^2_{ij}\Pi_{iL,jL,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right)\Bigg] +$$

$$+ \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2\, c_{iL,iR,hh}\, \Delta^2_{ii}\Pi_{iL,iR,hh}\left(\frac{\overline{\gamma}}{k}\right).$$

Используя (2.7), (2.9) — (2.11) и

$$-(y_{iL} - y_{jL})^2 - (y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{jL})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 = 2\, t_i\, t_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iL} - y_{jR})^2 - (y_{iL} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 = -2\, t_i\, u_j,$$

$$-(y_{iR} - y_{jR})^2 + (y_{iR} - y_{(j+1)L})^2 + (y_{(i+1)L} - y_{jR})^2 - (y_{(i+1)L} - y_{(j+1)L})^2 = 2\, u_i\, u_j,$$

вышеупомянутое слагаемое можно переписать в виде

$$\frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2 + 2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j + \\ + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j + 2\sum_{i<j}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\Bigg]. \tag{6.4}$$

Таким образом, при выполнении Условий a), b) формула (5.28) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial t_i}t_i + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial u_i}u_i + \frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial\alpha^2} =$$

$$= 2 f(\alpha)\sum_{i=1}^{n} t_i\,\Delta_i\pi_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha) + \frac{[\lambda'(\alpha)]^2}{[\lambda(\alpha)]^2}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}t_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_j^2}u_j^2 + \\ +2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}t_i\,t_j + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}t_i\,u_j + 2\sum_{i\neq j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}u_i\,u_j\Bigg]. \tag{6.5}$$

## §7. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

В этом параграфе к Условиям a) и b) мы добавляем "условие достаточного перемешивания" в). Следовательно, в (6.5) можем подставить

$$\pi_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)=p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha),$$

что приводит (6.5) к дифференциальному уравнению с начальным условием

$$p_{\overline{0}}(\overline{0},\overline{u},\alpha)=1 \quad \text{и} \quad p_{\overline{k}}(\overline{0},\overline{u},\alpha)=0, \quad \text{если} \quad \overline{k}\not\equiv\overline{0}.$$

**Теорема.** *Пусть для случайного процесса прямых $\{g_i\}$ из класса Ti2 маркированный точечный процесс $\{x_i,\Psi_i\}_\alpha$ удовлетворяет Условию a). Если для некоторого направления $\alpha$ выполнены Условия b) и c), то для того же значения $\alpha$ точечный процесс $\{x_i\}_\alpha$ необходимо пуассоновский, т. е.*

$$p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\frac{[\lambda(\alpha)\,t_i]^{k_i}}{k_i!}\,e^{-\lambda(\alpha)\,t_i}.$$

**Доказательство** : Используя $p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)=q_{\overline{k}}(\lambda(\alpha)\,\overline{t},\lambda(\alpha)\,\overline{u})$ (см (3.11)) находим

$$\frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial t_i}=\lambda(\alpha)\,\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial t_i},\quad \frac{\partial p_{\overline{k}}}{\partial u_i}=\lambda(\alpha)\,\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial u_i} \tag{7.1}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p_{\overline{k}}(\overline{t},\overline{u},\alpha)}{\partial\alpha^2}&=\lambda''(\alpha)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial t_i}\,t_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial u_i}\,u_i\right]+\\&+[\lambda'(\alpha)]^2\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 q_{\overline{k}}}{\partial t_i^2}\,t_i^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 q_{\overline{k}}}{\partial u_j^2}\,u_j^2+2\sum_{i<j}\frac{\partial^2 q_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial t_j}\,t_i\,t_j+\right.\\&\left.+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 q_{\overline{k}}}{\partial t_i\,\partial u_j}\,t_i\,u_j+2\sum_{i\neq j=1}^{n-1}\frac{\partial^2 q_{\overline{k}}}{\partial u_i\,\partial u_j}\,u_i\,u_j\right].\end{aligned} \tag{7.2}$$

Подставляя (7.1) и (7.2) в (6.5) и используя $\lambda''(\alpha)+\lambda(\alpha)=2\,f(\alpha)$ (см. [4]), получим уравнение для функций $q_{\overline{k}}$ :

$$[\lambda(\alpha)]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial t_i}\,t_i+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial q_{\overline{k}}}{\partial u_i}\,u_i\right]=-\sum_{i=1}^{n}t_i\,\Delta_i q_{\overline{k}}. \tag{7.3}$$

Это уравнение не содержит производных по $\alpha$. В терминах производящих функций

$$\Phi(z_1,...,z_n;t_1,...,t_n;u_1,...,u_{n-1})=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}q_{\overline{k}}(\lambda(\alpha)\,\overline{t},\lambda(\alpha)\,\overline{u})\,z_1^{k_1}\,z_2^{k_2}....z_n^{k_n}$$

(7.3) запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial \Phi}{\partial t_i} + \sum_{i=i}^{n-1} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} = \lambda(\alpha) \left[\sum_{i=1}^{n} t_i (z_i - 1) \Phi\right]. \tag{7.4}$$

Решим (7.4) для начальных условий

$$\Phi(z_1, ..., z_n; 0, ..., 0; u_1, ..., u_{n-1}) \equiv 1.$$

Для пуассоновского $\{x_i\}_a$

$$\Phi(z_1, ..., z_n; t_1, ..., t_n; u_1, ..., u_{n-1}) = \exp\left[\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^{n} t_i (z_i - 1)\right], \tag{7.5}$$

и легко проверить, что это выражение удовлетворяет (7.4). Следовательно, функция

$$\begin{aligned} &\exp\left[-\lambda(\alpha) \sum_{i=1}^{n} t_i (z_i - 1)\right] \Phi(z_1, ..., z_n; t_1, ..., t_n; u_1, ..., u_{n-1}) = \\ &= F(z_1, ..., z_n; t_1, ..., t_n; u_1, ..., u_{n-1}) \end{aligned} \tag{7.6}$$

удовлетворяет

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial F}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0 \tag{7.7}$$

и начальным условиям

$$F(z_1, ..., z_n; 0, ..., 0; u_1, ..., u_{n-1}) \equiv 1.$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера для однородных функций порядка 0. Каждое решение (7.7) имеет свойство

$$F(z_1, ..., z_n; k\,t_1, ..., k\,t_n; k\,u_1, ..., k\,u_{n-1}) = F(z_1, ..., z_n; t_1, ..., t_n; u_1, ..., u_{n-1}), k > 0.$$

Среди них только $F(\bar{t}, \bar{z}) \equiv 1$ удовлетворяет (7.8). Теорема доказана.

**ABSTRACT.** The paper studies second order homogeneous line processes in the plane, especially the marked point processes of intersections that they induce on test lines, the marks being the angles at which the intersections with a test line occur. By the methods of "Invariant Imbedding" and integration of a formula from Combinatorial Integral geometry, we obtain two differential relations between the joint probabilities for numbers of intersections that occur in a system of disjoint intervals on a test line, and the first and the second order Palm probabilities of the same events. Analyzing these relations, conditions of Poissonity of $n$–dimensional distributions for any $n \geq 1$ are derived.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Р. В. Амбарцумян (Редактор), "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии (Сборник Статей), Изд. Академии Наук Арм. ССР, Ереван, 1980.
2. В. К. Оганян, "Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных процессов отрезков, в [1], стр. 81 — 106, 1980.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
5. R. V. Ambartzumian, W. Weil (editors), Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Teubner Texte zur Mathematik, vol. 65, 1984.
6. V. K. Oganian, "On Palm distributions of processes of lines in the plane", in [5], pp. 124 – 132, 1984.
7. V. K. Oganian, " Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, pp. 71 — 81, 1987.
8. В. К. Оганян, А. Абдалла, "Маркированные точечные процессы пересечений, порожденные случайными процессами прямых на плоскости", Изв. НАН Армении, Математика том 28, № 5, стр. 67 — 77, 1993.
9. D. Stoyan, W. S. Kendall and J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, John Wiley, Chichester, 1987.
10. E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), Stochastic Geometry, J. Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1974.
11. В. К. Оганян, "О распределении длины "типичной" стороны случайной мозаики", Изв. АН Армении, Математика, том 19, стр. 248 – 256, 1984.
12. R. V. Ambartzumian, "Invariant imbedding in stochastic geometry", Dokl. Akad. Nauk Armenii, vol. 98, no. 3, pp. 185 — 196, 1998 ; Перепечатано в этом номере Известий АН Армении, Математика.
13. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Меккс, Безгранично делимые точечные процессы, Москва, Наука, 1982.
14. В. В. Степанов, Дифференциальные уравнения, Москва, Физ. Мат. ГИЗ., 1950.
15. R. V. Ambartzumian, "Stochastic geometry from the standpoint of integral geometry," Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792 – 823, 1977.
16. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$", Известия НАН Армении, Математика, том 27, № 5, стр. 1 — 21, 1992.
17. R. V. Ambartzumian, "Factorization in integral and stochastic geometry," Teubner Texte zur Mathematik, in [5], pp. 14 – 33, 1984.
18. O. Kallenberg, Random Measures, Akademie Verlag, Berlin, Reading, Mass., 1983.
19. Л. А. Сантало, Интегральная геометрия и геометрические вероятности, Москва, Наука, 1983.


22 июля 1998

Институт математики
НАН Армении
Ереванский государственный университет
E-mails : rhambart@aua.am
victo@aua.am