Посвящается памяти академика
Виктора А. Амбарцумяна

ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ[1]

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 33, No. 4, 1998

В настоящей статье метод инвариантного вложения применяется к одной задаче стохастической геометрии. В рамках теории трансляционно-инвариантных случайных процессов прямых второго порядка на плоскости, при некоторых предположениях факторизации, получены дифференциальные уравнения, описывающие распределение числа пересечений тестового отрезка прямыми процесса. Показано, что при дополнительном условии "достаточного перемешивания" уравнения имеют только пуассоновские решения.

ВВЕДЕНИЕ

Академик В. А. Амбарцумян часто указывал на то, что разновидности "принципа инвариантности", который он использовал в своих работах по рассеиванию света, могут быть эффективными и в других математических задачах (см. [1], Эпилог). Р. Белман и его последователи [2] развили и систематически использовали этот математический аппарат в ряде задач математической физики. Полностью признавая приоритет В. А. Амбарцумяна, они предложили называть этот метод методом "Инвариантного Вложения". Вне математической физики аналитическая процедура инвариантного вложения применялась в интегральной геометрии [3], где помогла раскрыть основные комбинаторные соотношения между мерами в

---

[1]Перепечатано из Докладов Национальной Академии Наук Армении, том 98, no. 3, 1998, который посвящен 90-летию академика В. А. Амбарцумяна

пространстве прямых и метриками.

В настоящей статье инвариантное вложение применяется в родственной области — стохастической геометрии. При некоторых предположениях факторизации получены дифференциальные уравнения для вероятностных распределений числа пересечений тестового отрезка прямыми случайного процесса прямых. Результат имеет место для случайных процессов прямых, трансляционно–инвариантных и обладающих первой и второй моментными мерами. Делаются также некоторые предположения гладкости.

§1 содержит необходимые предпосылки из теории трансляционно–инвариантных случайных процессов прямых. Доказательства свойств, приведенных в этом параграфе, могут быть получены с помощью "метода фиксированных реализаций" (см. [4]).

В §2 методом инвариантного вложения получены дифференциальные соотношения, содержащие вероятностные распределения типа Пальма для процессов прямых. В §3 рассматриваются маркированные точечные процессы пересечений, индуцированные на тестовой прямой прямыми процесса. Марки суть углы, под которыми происходят пересечения. Доказано, что если выполняется определенное условие независимости между точечным процессом пересечений и последовательностью углов пересечений, то эти соотношения преобразуются в дифференциальные уравнения. Как утверждается в заключительной Теореме, при дополнительных предположениях "достаточного перемешивания" и отсутствия корреляции между котангенсами углов пересечений, решением этих уравнений, для случайного числа пересечений на тестовом отрезке, получается пуассоновское распределение. В изотропном случае подобные вопросы рассматривались другими методами в [5], [4], Глава 10 и [6].

§1. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРЯМЫХ

Рассмотрим случайный процесс прямых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Он определяется как случайный точечный процесс в пространстве прямых (см. [4]). Через g будем обозначать прямую в $\mathbb{R}^2$, а через $\{g_i\}$ — случайный процесс прямых — счетное случайное множество прямых. Буквой $\mathbb{M}$ обозначаем пространство *реализаций* процессов прямых, $m \in \mathbb{M}$. Через P будем обозначать вероятностное распределение $\{g_i\}$ (вероятностная мера на $\mathbb{M}$). Будем говорить, что прямая g "пересекает" отрезок γ, если $\gamma \cap g$ есть *внутренняя* точка отрезка γ.

Для заданного "тестового отрезка" γ рассмотрим событие

$$\binom{\gamma}{k} = \{\gamma \text{ пересекается точно } k \text{ прямыми из } \{g_i\}\}.$$

Для двух тестовых отрезков γ_1 и γ_2 и двух неотрицательных целых чисел k_1, k_2 пишем $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \binom{\gamma_1}{k_1} \cap \binom{\gamma_2}{k_2}$. Это обозначение обобщается на любое число тестовых отрезков. Для вероятностей таких событий используется обозначение вида $P\binom{\gamma}{k}$. Единственную (с точностью до постоянного множителя) меру в пространстве прямых, инвариантную относительно евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$, обозначаем dg.

Определение 1. Процесс прямых $\{g_i\}$ принадлежит классу Ti2, если его вероятностное распределение P инвариантно относительно группы параллельных переносов плоскости (трансляционно- инвариантно) и первые и вторые моментные меры процесса прямых $\{g_i\}$ имеют вид $f_1\,dg$ и $f_2\,dg_1\,dg_2$ (если $g_1 \neq g_2$) соответственно, с непрерывными плотностями f_1 и f_2.

Перечислим свойства процессов прямых из класса Ti2, используемые в методе инвариантного вложения в §2. Их доказательства опускаются, так как их можно легко получить методом "фиксированных реализаций" (см. [4]).

Пусть γ — произвольный отрезок на плоскости. Пусть он служит осью прямоугольника R (Рис. 1), v_1 и v_2 — его боковые стороны (так называемые *вертикальные окна*). Два отрезка h_1 и h_2, составляющие продолжение γ, назовем *горизонтальными окнами*. Длины окон, вертикальных и горизонтальных, равны l, и мы будем предполагать, что l *стремится к нулю*.

Свойство P1 : для каждого окна w, вертикального или горизонтального

$$P\binom{w}{1} = O(l), \quad P\binom{w}{2} = O(l^2) \text{ и } P\binom{w}{k} = o(l^2) \text{ для } k > 2.$$

Будем использовать следующие краткие обозначения

$$H = \binom{h_1}{1} \quad \text{и } V = \binom{v_1}{1}.$$

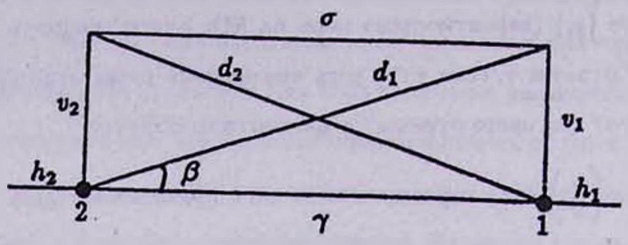

Рис. 1

Интенсивность точечного процесса пересечений индуцированного прямыми $\{g_i\}$ на горизонтальных (λ_H) или вертикальных (λ_V) тестовых прямых определяются следующим образом :

$$\lambda_H = \lim_{l\to 0} l^{-1}P(H) \text{ и } \lambda_V = \lim_{l\to 0} l^{-1}P(V).$$

Свойство P2 : существуют следующие пределы :

$$\lim_{l\to 0} l^{-2}P(HH) = c_{HH}, \quad \lim_{l\to 0} l^{-2}P(A) = c_A \text{ и } \lim_{l\to 0} l^{-2}P(B) = c_B,$$

где $HH = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Событие $A \subset \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ имеет место, если v_1 и v_2 пересекаются одной и той же прямой из $\{g_i\}$, B есть дополнение к A относительно $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. B выполняется, когда пересечения производятся двумя различными прямыми из $\{g_i\}$.

Свойство P3 :

$$\sum_{j_1+j_2\geq 3} P\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = o(l^2).$$

Нам понадобятся понятия распределений типа Пальма Π_V, Π_H, Π_B и Π_{HH} процесса прямых $\{g_i\}$ (о геометрической теории распределений Пальма см. [4]). Каждое из этих распределений Π_Z определяется при $l \to 0$, как предельное условное распределение $\{g_i\}$, при соответствующем условии $Z \in \{H, V, B, HH\}$. Существует процесс прямых, распределение которого есть Π_Z.

Отметим, что Π_B и Π_{HH} сосредаточены на множестве реализаций, в которых имеются две прямые, проходящие через концы 1 и 2 отрезка γ. Последние две прямые параметризируем углами ψ_1 и ψ_2, измеряемыми как показано на Рис. 2.

Поэтому Π_B и Π_{HH} суть вероятностные меры в пространстве $(0,\pi)\times(0,\pi)\times\mathrm{M}$. В частности, можно говорить об их значениях на событиях типа $\binom{\gamma}{k}\cap\{\Theta_1\}\cap\{\Theta_2\}$, где Θ_1, $\Theta_2 \subset (0,\pi)$, $\{\Theta_i\}$ обозначает событие $\psi_i \in \Theta_i$ в точке i. Вероятностные распределения Π_H и Π_V сосредаточены на множестве реализаций, обладающих прямой проходящей через конец 1 отрезка γ, т.е. определены на $(0,\pi)\times\mathrm{M}$. В частности, значения Π_H и Π_V определены на событиях типа $\binom{\gamma}{k}\cap\{\Theta_1\}$.

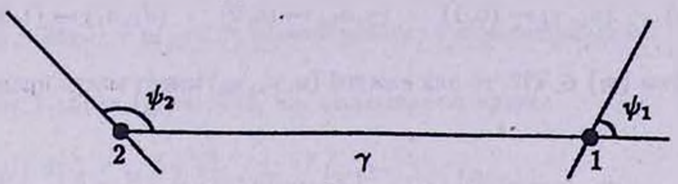

Рис. 2

Обозначим через E_Z математическое ожидание относительно вероятностной меры Π_Z.

Свойство P4. Пусть $F(\Psi_1,\mathrm{m})$ — ограниченная функция, определенная на $(0,\pi)\times\mathrm{M}$. Если $\{g_i\}\in$ Ti2, тогда для любого отрезка γ

$$\lambda_H E_H\left[F(\psi_1,\mathrm{m})\,|\cot\psi|\right] = \lambda_V E_V\, F(\psi_1,\mathrm{m}).$$

Свойство P5. Пусть $F(\Psi_1,\Psi_2,\mathrm{m})$— ограниченная функция, определенная на $(0,\pi)\times(0,\pi)\times\mathrm{M}$. Если $\{g_i\}\in$ Ti2, то для любого отрезка γ

$$c_{HH}E_{HH}\left[F(\psi_1,\psi_2,\mathrm{m})|\cot\psi_1\cot\psi_2|\right] = c_B E_B\, F(\psi_1,\psi_2,\mathrm{m}).$$

Для стороны u прямоугольника R, $u\neq v_1$, определим событие

$$\binom{v_1}{u} = \{\text{существует только одна прямая в } \{g_i\}, \text{ которая пересекает } v_1 \text{ и выходит из } R \text{ через } u\} \subset \binom{v_1}{1},$$

которое обобщается и на пересечения таких событий. Через S_1 обозначим интервал $(0,\pi/2)$, а через S_2 интервал $(\pi/2,\pi)$. Вместе со сторонами γ и σ рассмотрим две диагонали d_1 и d_2 прямоугольника R на Рис. 1.

Свойство P6. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждой (u, u_1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{l\to 0} l^{-2} P\begin{pmatrix} u & v_1 \\ k & u_1 \end{pmatrix} = c_V \Pi_V\left[\begin{pmatrix} \gamma \\ k-r \end{pmatrix} \cap \{S_i\}\right].$$

Отображение

$$(u, u_1) \mapsto (r, i)$$

определяется следующим образом :

$$(\gamma,\gamma) \mapsto (1,1) \qquad (d_1,\gamma) \mapsto (0,1) \qquad (\gamma, d_1) \mapsto (0,2) \qquad (d_1, d_1) \mapsto (1,2).$$

Свойство P7. Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то для каждой (u, u_1, u_2) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{l\to 0} l^{-2} P\begin{pmatrix} u & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = c_B \Pi_B\left[\begin{pmatrix} \gamma \\ k-r \end{pmatrix} \cap \{S_i\} \cap \{S_j\}\right].$$

Отображение

$$(u, u_1, u_2) \mapsto (r, i, j)$$

задается таблицей

$$(\gamma,\gamma,\gamma) \mapsto (2,1,2) \quad (\gamma,\gamma,\sigma) \mapsto (1,1,1) \quad (\gamma,\sigma,\gamma) \mapsto (1,2,2) \quad (\gamma,\sigma,\sigma) \mapsto (0,2,1)$$

$$(\sigma,\gamma,\gamma) \mapsto (0,1,2) \quad (\sigma,\gamma,\sigma) \mapsto (1,1,1) \quad (\sigma,\sigma,\gamma) \mapsto (1,2,2) \quad (\sigma,\sigma,\sigma) \mapsto (2,2,1)$$

$$(d_1,\gamma,\gamma) \mapsto (1,1,2) \quad (d_1,\gamma,\sigma) \mapsto (0,1,1) \quad (d_1,\sigma,\gamma) \mapsto (2,2,2) \quad (d_1,\sigma,\sigma) \mapsto (1,2,1)$$

$$(d_2,\gamma,\gamma) \mapsto (1,1,2) \quad (d_2,\gamma,\sigma) \mapsto (2,1,1) \quad (d_2,\sigma,\gamma) \mapsto (0,2,2) \quad (d_2,\sigma,\sigma) \mapsto (1,2,1)$$

Предельное условие, получаемое из события A, имеет специальный статус. Фактически, из метода фиксированных реализаций следует существование распределения Пальма Π_A только для процессов прямых, которые инвариантны относительно группы евклидовых движений (параллельные переносы и вращения). Для $\{g_i\} \in$ Ti2 существование предела

$$x_k = \lim_{l\to 0}[P(A)]^{-1} P(\begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A) = c_A^{-1} \lim_{l\to 0} l^{-2} P(\begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A) \tag{1}$$

вытекает из Предложении 2 следующего параграфа. В (1) отрезок χ определяется следуюлцим образом : если событие A произошло, то $\{g_i\}$ содержит прямую, пересекающую прямые v_1 и v_2, и в качестве χ мы берем отрезок этой прямой между вертикальными окнами.

§2. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

Настоящий параграф содержит два предложения для процессов прямых из класса Ti2. Доказательство Предложения 1, основанное на свойствах P1 и P4, мы оставляем читателю, т.к. это доказательство есть упрощенная ("первого порядка") версия доказательства Предложения 2, которое мы приводим полностью. Используем обозначение

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ для первой и

$\Delta^2 y_k = y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}$ для второй разности относительно k.

Предложение 1. *Если $\{g_i\} \in$ Ti2, то существует предел*

$$\lim_{l\to 0}(\lambda_V l)^{-1}\left[P\begin{pmatrix} d_1 \\ k \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix}\right] = \Pi_V\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k-1 \end{pmatrix} \cap \{S_2\}\right) + \\ + \Pi_V\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_1\}\right) - \Pi_V\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_2\}\right) - \Pi_V\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k-1 \end{pmatrix} \cap \{S_1\}\right), \tag{2}$$

где S_1 — интервал $(0, \pi/2)$, S_2 — интервал $(\pi/2, \pi)$.

Предложение 2. *Если $\{g_i\} \in$ Ti2 и существует предел*

$$L_k(\gamma) = \lim_{l\to 0} l^{-2}\left[P\begin{pmatrix} d_1 \\ k \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \sigma \\ k \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} d_2 \\ k \end{pmatrix}\right],$$

то существуют (1), причем

$$L_k(\gamma) = -2c_A\,\Delta x_k + c_B \Delta^2 y_k, \tag{3}$$

где

$$y_k = \Pi_B\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_1\} \cap \{S_1\}\right) + \Pi_B\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_2\} \cap \{S_2\}\right) - \\ - \Pi_B\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_1\} \cap \{S_2\}\right) - \Pi_B\left(\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} \cap \{S_2\} \cap \{S_1\}\right), \tag{4}$$

S_1 и S_2 как в Предложении 1.

Доказательство : Для удобства записи мы иногда используем обозначение (см. Рис. 1) $\gamma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$. Для каждого выбора τ из совокупности $\{\sigma_1, \sigma_2, d_1, d_2\}$ представим $\begin{pmatrix} \tau \\ k \end{pmatrix}$ как объединение несовместных событий

$$\begin{pmatrix} \tau \\ k \end{pmatrix} = \bigcup_{j_1, j_2 \geq 0} \begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix}.$$

Из свойства P3, при $l \to 0$

$$\sum_{j_1+j_2\ge 3} P\begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix} = o(l^2),$$

и следовательно

$$P\begin{pmatrix} \tau \\ k \end{pmatrix} = \sum_{0\le j_1+j_2\le 2} P\begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix} + o(l^2). \tag{5}$$

Прямая, которая входит в треугольник через одну из сторон, выходит из треугольника через одну из остальных сторон. Следовательно, имеют место тождества

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & v_1 & v_2 \\ k & 0 & j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & v_1 & v_2 \\ k & 0 & j_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

и аналогичные тождества для σ_2. В выражении

$$D = P\begin{pmatrix} d_1 \\ k \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} \sigma \\ k \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} d_2 \\ k \end{pmatrix}$$

заменяем вероятности на их разложения (5). Далее, вероятность каждого события $\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix}$, где либо $j_1 = 0$, либо $j_2 = 0$, заменим, используя (6) (или аналог (6) для σ_2). В полученной сумме вероятности каждого из событий $\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & j_1 & j_2 \end{pmatrix}$, где хотя бы один из индексов j_1 или j_2 равен нулю, встречаются дважды с противоположными знаками. Таким образом, эти слагаемые сокращаются и мы получим

$$D = -\sum_{i=1,2} P\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2} P\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} + o(l^2). \tag{7}$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} = \bigcup_{(u_1,u_2)\in U} \begin{pmatrix} \tau & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $U = \{v_2, \gamma, \sigma\} \times \{v_1, \gamma, \sigma\}$, причем события в объединении несовместны. Следовательно, используя (8), вероятности в (7) могут быть заменены суммами вероятностей событий. Из свойства P3 для пар $(u_1, u_2) = (v_2, \gamma)$, (v_2, σ), (γ, v_1) и (σ, v_1) имеем

$$P\begin{pmatrix} \gamma & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} = o(l^2),$$

и (7) принимает вид

$$D = -\sum_{i=1,2} P\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1,2} P\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{i=1,2}\left[\sum_{(u_1,u_2)\in U_1}\left[-P\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix}\right]\right] + o(l^2), \qquad (9)$$

где в последней сумме $U_1 = \{\gamma,\sigma\}\times\{\gamma,\sigma\}$. Отметим, что $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = A$. Разделим (9) на l^2 и перейдем к пределу при $l \to 0$. Используя P7, легко проверить, что

$$\lim_{l\to 0} l^{-2}\sum_{i=1,2}\left[\sum_{(u_1,u_2)\in U_1}\left[-P\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & u_1 & u_2 \end{pmatrix}\right]\right] = c_B\Delta^2 y_k.$$

Согласно определению отрезка χ

$$\begin{pmatrix} \sigma_i \\ k \end{pmatrix} \cap A = \begin{pmatrix} \chi \\ k \end{pmatrix} \cap A \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} d_i \\ k \end{pmatrix} \cap A = \begin{pmatrix} \chi \\ k-1 \end{pmatrix} \cap A.$$

Существование пределов, $i = 1, 2$

$$\lim_{l\to 0} l^{-2} P\begin{pmatrix} \sigma_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} = c_A x_k \quad \text{and} \quad \lim_{l\to 0} l^{-2} P\begin{pmatrix} d_i & v_1 & v_2 \\ k & v_2 & v_1 \end{pmatrix} = c_A x_{k-1}$$

следует из существования пределов $L_k(t,\alpha)$ (сначала для x_0, потому что $x_{-1} = 0$ и затем последовательно для всех x_k). Предложение 2 доказано.

§3. ФАКТОРИЗАЦИЯ И УСЛОВИЕ ДОСТАТОЧНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Согласно требованию трансляционной инвариантности, вероятности $P\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix}$ зависят только от длины t и направления α отрезка γ. Таким образом, можно использовать "функциональное" обозначение

$$P\begin{pmatrix} \gamma \\ k \end{pmatrix} = p_k(t,\alpha)$$

и левая часть (2) приводится к виду

$$\lim_{l\to 0}\frac{p_k(\sqrt{t^2+l^2}, \alpha+\beta) - p_k(t,\alpha)}{l} = t^{-1}\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial\alpha},$$

а для (3), применяя разложение Тейлора, находим

$$L_k(\gamma) = \lim_{l\to 0} \frac{p_k(\sqrt{t^2+l^2}, \alpha+\beta) - 2p_k(t,\alpha) + p_k(\sqrt{t^2+l^2}, \alpha-\beta)}{l^2} =$$

$$= t^{-1}\cdot\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t} + t^{-2}\cdot\frac{\partial^2 p_k(t,\alpha)}{\partial\alpha^2}. \tag{10}$$

Справедливость (10) требует *предположения гладкости*, см. Теорему. Возвращаясь к правым частям (2) и (3), преобразуем их, используя свойства P4 и P5. Имеет место замечательное свойство

$$\lambda_V \Pi_V\left(\binom{\gamma}{k}\cap\{S_1\}\right) - \lambda_V \Pi_V\left(\binom{\gamma}{k}\cap\{S_2\}\right) = \lambda_H E_H I\binom{\gamma}{k}\cot\psi_1, \tag{11}$$

где I — индикаторная функция соответствующего события (зависимость от $\mathrm{m}\in\mathrm{M}$ явно не указывается). Аналогично, для величин y_k в (8) имеем

$$y_k = E_{HH} I\binom{\gamma}{k}\cot\psi_1\cot\psi_2.$$

Рассмотрим следствия некоторых факторизационных предположений F1, F2 и F3. Последние выражаются в терминах вероятностного распределения случайного маркированного точечного процесса пересечений $\{P_i,\psi_i\}_g$, индуцированного прямыми из $\{g_i\}$ на тестовой прямой g. Здесь $P_i = g\cap g_i$, а марка ψ_i есть угол, под которым происходит пересечение в точке P_i. Отметим, что Условия F1, F2 и F3 вместе существенно слабее, чем хорошо известная в стохастической геометрии *независимость Кокса* (см. [5]). Говорим, что $\{P_i,\psi_i\}_g$ обладает независимостью Кокса, если для тестовой прямой g любого направления α, последовательность углов $\{\psi_i\}$ не зависит от точечного процесса $\{P_i\}$, и $\{\psi_i\}$ есть последовательность независимых углов. Все дважды стохастические пуассоновские процессы прямых $\{g_i\}$ управляемые случайной мерой вида $\xi\cdot f_1(\phi)dg$, (ξ - случайный множитель), обладают этим свойством.

Условие F1 : для любого направления α, любых t и k случайные величины $\cot\psi_1$ и $I\binom{\gamma}{k}$ некоррелированы, т.е.

$$E_H I\binom{\gamma}{k}\cot\psi_1 = \Pi_H\binom{\gamma}{k} E_H\cot\psi_1.$$

Имеем

$$\lambda(\alpha) = \int \sin\psi f_1(\phi)d\psi,$$

где f_1 — плотность первой моментной меры прямых $\{g_i\}$ (из условия трансляционной инвариантности следует, что f_1 зависит только от направления ϕ прямой g), ψ — угол между направлениями ϕ и α. Следовательно, плотность случайного угла ψ_1 есть $(\lambda(\alpha))^{-1}\sin\psi f_1(\phi)d\psi$. Таким образом

$$E_H \cot\psi_1 = (\lambda(\alpha))^{-1}\cdot\int \cos\psi f_1(\phi)d\psi = -(\lambda(\alpha))^{-1}\lambda'(\alpha),$$

где $\lambda'(\alpha)$ обозначает первую производную по α. Используя так называемые формулы Пальма для точечных процессов в одномерном случае (см. [4]) получаем

$$\lambda(\alpha)\left[\Pi_H\begin{pmatrix}\gamma\\k-1\end{pmatrix} - \Pi_H\begin{pmatrix}\gamma\\k\end{pmatrix}\right] = \frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t}. \tag{12}$$

Итак, при Условии F1, соотношение (2) преобразуется к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial\alpha} = t\cdot(\lambda(\alpha))^{-1}\lambda'(\alpha)\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t}. \tag{13}$$

Уравнение (13) легко решается стандартным методом характеристик. Его общее решение имеет вид

$$p_k(t,\alpha) = q_k(\lambda(\alpha)t), \tag{14}$$

где $q_k(\cdot)$ — некоторая функция от одного аргумента.

Условие F2 : для любого α, любых t и k случайные переменные $\cot\psi_1$ $\cot\psi_2$ и $I\begin{pmatrix}\gamma\\k\end{pmatrix}$ некоррелированы, т.е.

$$E_{HH} I\begin{pmatrix}\gamma\\k\end{pmatrix}\cot\psi_1\cot\psi_2 = \Pi_{HH}\begin{pmatrix}\gamma\\k\end{pmatrix}E_{HH}\cot\psi_1\cot\psi_2.$$

Легко получить второго порядка аналог (12) :

$$c_{HH}\Delta^2\Pi_{HH}\begin{pmatrix}\gamma\\k\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 p_k(t,\alpha)}{\partial t^2}.$$

Таким образом, при Условии F2, (3) сводится к виду

$$t\cdot\frac{\partial p_k(t,\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial^2 p_k(t,\alpha)}{\partial\alpha^2} = -2\,c_A t^2\,\Delta x_k + t^2 a(t,\alpha)\frac{\partial^2 p_k(t,\alpha)}{\partial t^2}, \tag{15}$$

где $a(t,\alpha) = E_{HH}\cot\psi_1\cot\psi_2$.

Заметим [4], что $c_A(\gamma) = t^{-1}f_1(\alpha)$ и $2f_1(\alpha) = \lambda(\alpha) + \lambda''(\alpha)$. Подставляя (14) в (15), получим

$$(\lambda+\lambda'')\,q_k' + t[(\lambda')^2 - \lambda^2\cdot a(t,\alpha)]\,q_k'' = -(\lambda+\lambda'')\,\Delta x_k. \tag{16}$$

Условие F3 : для любого направления α и любого t

$$E_{HH}\cot\psi_1\cot\psi_2 = E_H\cot\psi_1 E_H\cot\psi_2 = [\lambda'(\alpha)]^2[\lambda(\alpha)]^{-2}.$$

При Условии F3 уравнение (16) преобразуется к виду

$$q_k' = -\Delta x_k. \tag{17}$$

Эта бесконечная система уравнений легко решается при дополнительном предположении

$$x_k = P\binom{\gamma}{k} = p_k(t,\alpha), \tag{18}$$

которое означает, что в пределе события A и $\binom{\chi}{k}$ независимы. Назовем (18) предположением *достаточного перемешивания*. Грубо говоря, (18) означает, что условие, что χ лежит на одной из прямых из $\{g_i\}$, может быть игнорировано. В пределе, когда $l \to 0$, χ получает длину t и направление α.

При условии (18) решениями уравнения (17), удовлетворяющими начальным условиям $q_0(0) = 1$ и $q_k(0) = 0$ для $k > 0$, являются пуассоновские вероятности с единичным параметром $q_k(t) = \dfrac{t^k}{k!}e^{-t}$. Этот результат сформулируем особо.

Теорема. *Пусть $\{g_i\} \in$ Ti2 обладает гладкими вероятностями пересечений $p_k(t,\alpha)$. Если для каждого направления α и $t > 0$ удовлетворяются факторизационные Условия F1, F2 и F3, и выполняется условие достаточного перемешивания, то $p_k(t,\alpha)$ суть пуассоновские вероятности с параметром $\lambda(\alpha)t$, где $\lambda(\alpha)$ есть* sin*–преоброзование плотности первой моментной меры.*

Заметим в заключение, что если условие достаточного перемешивания не выполнено, то Теорема не верна, так как любой коксовский процесс прямых $\{g_i\} \in$ Ti2 со случайным множителем ξ имеет вероятности $p_k(t,\alpha)$ вида смеси пуассоновских распределений. Последние сводятся к пуассоновским вероятностям, когда ξ

не случайно. Но в этом случае процесс прямых $\{g_i\}$ будет пуассоновским. Для пуассоновского $\{g_i\}$ условие достаточного перемешивания удовлетворяется.

ABSTRACT. In the present paper the invariant imbedding is applied to a problem from Stochastic Geometry. Under certain factorization assumptions, we derive differential equations for the probabilities which describe distribution of the number of intersections of a test segment by the lines from translation invariant random line process in the plane. It is shown that under additional "sufficient mixing" condition the equations have only Poisson solutions.

ЛИТЕРАТУРА

1. A Life in Astrophysics, Selected works by V. A. Ambartsumian, Editor R. V. Ambartzumian, Allerton Press, New York, 1998.
2. R. E. Bellman, R. E. Calaba and M. C. Prestrud, "Invariant Imbedding & Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness", published by Elsevier, 1963.
3. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, "Введение в стохастическую геометрию" Москва, Наука, 1989.
5. R. Davidson, "Construction of line processes : second order properties", In : "Stochastic Geometry", E. F. Harding and D. G. Kendall (Editors), J. Wiley & Sons, London, New York, Toronto, 1974.
6. V. K. Oganian, " Combinatorial decompositions and homogeneous geometrical processes", Acta Appl. Math., Holland, vol. 9, no. 1 — 2, ст. 71 — 81, 1987.

Институт математики
НАН Армении
E–mail : rhambart@aua.am