

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасын, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 3, 1998

В статье выявлена связь между обычными и обобщенными задачами Римана-Гильберта и указаны эффективные методы решения обобщенной задачи. Полученные результаты применены к задаче Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – двусвязная область, ограниченная контурами Γ_1 и Γ_2 , где Γ_1 – окружность $|z| = r_0$, $z = x + iy$, а Γ_2 – достаточно гладкая простая замкнутая кривая, охватывающая окружность Γ_1 . Обозначим

$$\Gamma_1^+ = \{z \in \Gamma_1 : \operatorname{Im} z \geq 0\}, \quad \Gamma_1^- = \{z \in \Gamma_1 : \operatorname{Im} z \leq 0\}.$$

Рассмотрим следующую обобщенную задачу Римана-Гильберта : найти аналитическую в области D функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и удовлетворяющую следующим условиям :

$$\operatorname{Re} [a(z)\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (1.1)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}) + g(z), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (1.2)$$

где $a(z)$ и $f(z)$ – заданные функции на Γ_2 , $f(z)$ вещественна, а $g(z)$ – заданная функция на Γ_1^+ , причем

$$a(z) \neq 0, \quad z \in \Gamma_1, \quad (1.3)$$

$$g(r_0) = g(-r_0) = 0. \quad (1.4)$$

Предполагается, что функции $a(z)$, $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ_2 и Γ_1^+ , соответственно (см. [1]). В (1.2) и в дальнейшем $\bar{z}$ означает комплексно сопряженную z . Подставляя $z = \pm \tau_0$ в (1.2), получим условие (1.4). Это означает, что условие (1.4) необходимо для разрешимости задачи (1.1), (1.2). При $f = 0$ и $g = 0$ задачу (1.1), (1.2) называют *однородной*. В предельном случае, когда $\tau_0 = 0$, задача (1.1), (1.2) приводится к классической задаче Римана–Гильберта в односвязной области, ограниченной контуром Γ_2 (см. [1]).

Основная цель данной работы – выявить связь между обычными и обобщенными задачами Римана–Гильберта и указать эффективные методы решения обобщенной задачи. Полученные результаты используются при решении задачи Пуанкаре для уравнения Лапласа.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наряду с задачами (1.1), (1.2) рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача А. Найти функцию $\psi(z)$, аналитичную в области $|z| > 1$, непрерывную на Γ_1 , исчезающую на бесконечности (т.е. $\psi(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$) и удовлетворяющую граничному условию (см. (1.2))

$$\psi(z) = \psi(\bar{z}) + g(z), \quad z \in \Gamma_1^+. \quad (2.1)$$

Определим $g(z)$ на Γ_1^- по формуле

$$g(z) = -g(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^-, \quad (2.2)$$

и положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad |z| \neq 1. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. Задача А имеет единственное решение $\psi(z) = F(z)$.

Доказательство. Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\psi(z) = \psi\left(\frac{1}{z}\right) + g(z), \quad z \in \Gamma_1. \quad (2.4)$$

Функция $\psi(z^{-1})$ аналитична в круге $|z| < 1$. Поэтому функции $\psi(z)$ и $\psi(z^{-1})$ определяются из граничного условия (2.4) по формуле (см. [1])

$$\psi(z) = F(z), \quad |z| > 1, \quad (2.5)$$

$$\psi\left(\frac{1}{z}\right) = F(z), \quad |z| < 1. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) можно записать в виде

$$\psi(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| > 1. \quad (2.7)$$

Из (2.2) следует, что $F(0) = 0$ и

$$F(z) = F\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \neq 1. \quad (2.8)$$

Из (2.5), (2.7) и (2.8) следует справедливость леммы 2.1.

Пусть $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad |z| = 1. \quad (2.9)$$

Пусть G — односвязная область, ограниченная контуром Γ_2 .

Лемма 2.2. Существует единственная функция $\Phi_0(z)$, аналитичная в G , непрерывная в замкнутой области $\bar{G} = G \cup \Gamma_2$ и такая, что

$$\varphi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_0\left(\frac{1}{z}\right). \quad (2.10)$$

Доказательство. Согласно формуле Коши (см. [3], стр. 54) $\varphi(z)$ допускает представление

$$\varphi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (2.11)$$

где $\Phi_1(z)$ аналитична в G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$, а $\Phi_2(z)$ аналитична в $|z| > 1$, непрерывна в $|z| \geq 1$ и исчезает на бесконечности. Подставляя $\varphi(z)$ из (2.11) в (2.9), получим

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \Phi_1(\bar{z}) + \Phi_2(\bar{z}), \quad |z| = 1. \quad (2.12)$$

Поскольку $\bar{z} = z^{-1}$ при $|z| = 1$, условие (2.12) принимает вид

$$\Phi_1(z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi_1\left(\frac{1}{z}\right) - \Phi_2(z), \quad |z| = 1. \quad (2.13)$$

Функция $\Phi_1(z) - \Phi_2(z^{-1})$ аналитична в круге $|z| < 1$, а $\Phi_1(z^{-1}) - \Phi_2(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и стремится к $\Phi_1(0)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Из (2.13) следует, что $\Phi_1(z^{-1}) - \Phi_2(z)$ является аналитическим продолжением $\Phi_1(z) - \Phi_2(z^{-1})$ через окружность Γ_1 . Поэтому, согласно теореме Лиувилля (см. [3]) имеем

$$\Phi_1(z) - \Phi_2\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi_1(0), \quad |z| < 1, \quad (2.14)$$

$$\Phi_1\left(\frac{1}{z}\right) - \Phi_2(z) = \Phi_1(0), \quad |z| > 1. \quad (2.15)$$

Равенства (2.14) и (2.15) эквивалентны. Подставляя $\Phi_2(z)$ из (2.15) в (2.11), получим представление (2.10), где $\Phi_0(z) = \Phi_1(z) - \Phi_1(0)/2$.

Теперь докажем, что в представлении (2.10) функция $\Phi_0(z)$ определяется через $\varphi(z)$ единственным образом, т.е. если $\varphi(z) \equiv 0$, то $\Phi_0(z) \equiv 0$. Действительно, если $\varphi(z) \equiv 0$, то из (2.10) имеем $\Phi_0(z) = -\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right)$ при $|z| = 1$. Следовательно

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\Phi_0(0), \quad |z| < 1, \\ -\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) &= -\Phi_0(0), \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно записать в виде $\Phi_0(z) = \Phi_0(0)$, $|z| < 1$. Следовательно, $\Phi_0(z) \equiv 0$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть $a(z) \equiv 1$, $f(z) \equiv 0$, $g(z) \equiv 0$. Тогда общее решение задачи (1.1), (1.2) определяется формулой $\varphi(z) = ic_0$, где c_0 — произвольная вещественная постоянная.

Доказательство. Из условия (1.1) следует, что функции $(i\varphi(z))^n$ ($n = 1, 2, \dots$) принимают вещественные значения при $z \in \Gamma_2$. Поэтому функции $i(i\varphi(z))^n$ также удовлетворяют условиям (1.1), (1.2). Если $\varphi(z)$ не является постоянной, то эти функции линейно независимы. Следовательно, если $\varphi(z) \neq \text{const}$, то задача (1.1), (1.2) имеет, по крайней мере, счетную систему линейно независимых решений. Теперь докажем, что их число конечно. Согласно лемме 2.2 решение $\varphi(z)$ задачи (1.1), (1.2) можно представить в виде (2.10). Подставляя $\varphi(z)$ из (2.11) в (2.9), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) \right] = 0, \quad z \in \Gamma_2. \quad (2.16)$$

Согласно формуле Коши

$$\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt. \quad (2.17)$$

Так как $|t| > 1$ при $t \in \Gamma_2$, то функция $t - z^{-1} \neq 0$ при $t \in \Gamma_2, z \in \Gamma_2$. Подставляя $\Phi(z^{-1})$ из (2.17) в (2.16), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right] = 0, \quad z \in \Gamma_2. \quad (2.18)$$

Таким образом, для аналитической в G функции $\Phi_0(z)$ получим частный случай (2.18) задачи Римана-Гильберта-Пуанкаре (см. [1], стр. 285). Известно [1], что эта задача имеет только конечное число линейно независимых решений. Это означает, что если $\varphi(z)$ — решение задачи (1.1) — (1.2), то $\varphi(z) = c$, где c — постоянная. Подставляя $\varphi(z) = c$ в (1.1), получим $\varphi(z) = ic_0$, где c_0 — вещественная постоянная. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть функция $\Phi(z)$ представляется в виде (2.10) и $\Phi^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда эта функция удовлетворяет также условиям $\Phi^{(k)}(-i) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, n$.

Доказательство. Из (2.10) следует, что функция $\Phi(z)$ аналитична в некоторой ε -окрестности окружности $|z| = 1$ и имеет место равенство

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right), \quad 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon. \quad (2.19)$$

Дифференцируя обе части (2.19) k раз ($k = 0, 1, \dots, n$) и подставляя $z = -i$, а затем используя равенства $\Phi^{(k)}(i) = 0$, получим $\Phi^{(k)}(-i) = 0$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Если функция

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^n c_k \left(z + \frac{1}{z}\right)^k, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.20)$$

удовлетворяет условиям $\omega^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, то $c_k = 0$ и, следовательно, $\omega(z) \equiv 0$.

Доказательство. Подставляя $z = i$ в (2.20) и используя условие $\omega(i) = 0$, получим $c_0 = 0$. Дифференцируя $\omega(z)$ в $z = i$, получим $c_1 = 0$. Аналогично получим $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$. Лемма 2.5 доказана.

Пусть $\alpha(z)$ – дробно-линейная функция такая, что

$$|\alpha(z)| \leq q < 1, \quad \text{при } |z| \leq 1. \quad (2.21)$$

Рассмотрим уравнения

$$z = \overline{\alpha(z)}, \quad |z| < 1, \quad (2.22)$$

$$z = \beta(z) \equiv \overline{\alpha(\overline{\alpha(z)})}, \quad |z| < 1. \quad (2.23)$$

Ясно, что функция $\beta(z)$ также дробно-линейная и $|\beta(z)| \leq q, |z| \leq 1$. Из теоремы Руше (см. [3]) следует, что уравнение (2.23) в круге $|z| < 1$ имеет единственное решение.

Лемма 2.6. Уравнение (2.22) в круге $|z| < 1$ имеет единственное решение, совпадающее с решением уравнения (2.23).

Доказательство. Из условия (2.21) и принципа неподвижной точки Шаудера следует, что функция $\overline{\alpha(z)}$ имеет неподвижную точку z_0 в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Имеем $z_0 = \overline{\alpha(z_0)}$. Из (2.21) следует, что

$$z_0 = \beta(z_0), \quad |z_0| \leq q < 1. \quad (2.24)$$

Так как уравнение (2.23) в круге $|z| < 1$ имеет только одно решение, то из (2.24) следует, что уравнение (2.22) в этом круге также имеет одно решение и оно совпадает с решением уравнения (2.23). Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. Пусть $P(z) \neq \text{const}$ – многочлен, $P(0) \neq 0$. Тогда для любых натуральных чисел m_1 и m_2 функции $z^k, k = 0, 1, \dots, m_1, \frac{z^{j-1}}{P^j(z)}, j = 1, \dots, m_2$ линейно независимы в поле вещественных чисел.

Доказательство очевидно.

Из леммы 2.7 следует, что совокупность функций

$$z^k, \quad iz^k \quad (k = 0, 1, \dots, m_1); \quad \frac{z^{j-1}}{P^j(z)}, \quad \frac{iz^{j-1}}{P^j(z)} \quad (j = 1, \dots, m_2)$$

линейно независима в поле вещественных чисел. Из леммы 2.2 непосредственно следует

Лемма 2.8. Решение $\varphi(z)$ задачи (1.1), (1.2) при $g \equiv 0$ аналитично в некоторой окрестности окружности $|z| = 1$.

§3. ЗАДАЧА (1.1), (1.2)

1. Сначала исследуем обобщенную задачу Римана-Гильберта (1.1), (1.2), когда $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$. В этом случае, согласно лемме 2.3, однородная задача (1.1), (1.2) имеет одно линейно независимое решение $\varphi(z) = i$. Здесь линейную зависимость и независимость мы понимаем в поле вещественных чисел. Подставляя (2.10) в (1.1) и используя (2.17), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.1)$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в области G и непрерывна в $\bar{G}$. Так как однородная задача (1.1), (1.2) имеет одно линейно независимое решение, то однородная задача (3.1) также имеет одно линейно независимое решение $\Phi_0(z) = i$.

Известно (см. [1]), что индекс задачи (3.1) равен 1. Следовательно, неоднородная задача (3.1) всегда разрешима. Учитывая, что задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче (3.1), мы заключаем, что неоднородная задача (1.1), (1.2) также всегда разрешима.

2. Пусть граничные условия имеют вид

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \varphi(z) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.2)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (3.3)$$

где $n \neq 0$ — некоторое целое число. Пусть $n \geq 1$. Обозначим

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n, \quad (3.4)$$

где $\varphi(z)$ — решение задачи (3.2), (3.3). Ясно, что функция $\varphi_n(z)$ аналитична в области D , непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет граничным условиям (1.1), (1.2). Таким образом, для аналитической функции $\varphi_n(z)$ получим рассмотренную выше задачу. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение последней. Тогда общее решение определяется формулой $\varphi_n(z) = \varphi_0(z) + ic_0$, где c_0 — произвольная вещественная постоянная. Подставляя $\varphi_n(z)$ в (3.4), получим

$$\varphi(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n = \varphi_0(z) + ic_0. \quad (3.5)$$

Подставляя $z = i$ в (3.5), получим $\varphi_0(i) + ic_0 = 0$. Отсюда $c_0 = -\operatorname{Im} \varphi_0(i)$ и

$$\operatorname{Re} \varphi_0(i) = 0. \quad (3.6)$$

Согласно лемме 2.8 функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ аналитичны в некоторой окрестности окружности $|z| = 1$. Поэтому из (3.5) и $\varphi_0(i) + ic_0 = 0$ имеем

$$\varphi_0^{(k)}(i) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

Таким образом, условия (3.6) и (3.7) необходимы для разрешимости задачи (3.2), (3.3). Если эти условия выполнены и $\psi_0(z) \equiv \varphi_0(z) - \varphi_0(i)$, то из (3.3) и (3.7) получим

$$\psi_0(z) = \psi_0(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+ \quad \text{и} \quad \psi_0^{(k)}(i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.8)$$

Согласно леммам 2.2 и 2.4 имеем $\psi_0^{(k)}(-i) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1$. Из (3.5) получим

$$\varphi(z) = \psi_0(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^{-n}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) следует, что функция $\varphi(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Таким образом, условия (3.6) и (3.7) необходимы и достаточны для разрешимости задачи (3.2), (3.3). Более того, при выполнении этих условий задача (3.2), (3.3) имеет единственное решение, определяемое формулой (3.9).

3. Пусть $n = -m$, где m — натуральное число. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение задачи (1.1), (1.2), где $a(z) \equiv 1, g(z) \equiv 0$. Тогда легко проверить, что функция $\varphi(z) = \varphi_0(z)(z + z^{-1})^m$ является частным решением задачи (3.2), (3.3). Следовательно, в этом случае неоднородная задача (3.2), (3.3) всегда разрешима. Теперь построим полную систему линейно независимых решений неоднородной задачи (3.2), (3.3). Пусть $\psi_{1k}(z)$ и $\psi_{2k}(z)$ — частные решения задачи (1.1), (1.2), когда

$$f = \operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^{n+k} \right] \quad \text{и} \quad f = \operatorname{Re} \left[i \left(z + \frac{1}{z} \right)^{n+k} \right],$$

соответственно, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Легко проверить, что система функций

$$\begin{aligned} \varphi_{1m}(z) &= i \left(z + \frac{1}{z} \right)^m, \\ \varphi_{1k}(z) &= \psi_{1k}(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^m - \left(z + \frac{1}{z} \right)^k, \\ \varphi_{2k}(z) &= \psi_{2k}(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^m - i \left(z + \frac{1}{z} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

является решением однородной задачи (3.2), (3.3). Докажем что эта система линейно независима в поле вещественных чисел. Пусть

$$\sum_{k=0}^m a_k \varphi_{1k} + \sum_{k=0}^{m-1} b_k \varphi_{2k} \equiv 0, \quad (3.11)$$

где a_k и b_k — некоторые вещественные постоянные. Подставляя (3.10) в (3.11), получим $\omega(z) = \omega_0(z)(z + z^{-1})^m$, где

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k + ib_k) \left(z + \frac{1}{z} \right)^k,$$

$$\omega_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1} (a_k \psi_{1k}(z) + ib_k \psi_{2k}(z)) + ia_m.$$

Следовательно, $\omega^{(k)}(i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Используя лемму 2.5, получим $a_k = b_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\omega(z) \equiv 0$. Из (3.11) имеем $a_m = 0$ и, следовательно, система функций (3.10) линейно независима.

Докажем, что (3.10) образует полную систему решений однородной задачи (3.2), (3.3). Подставляя (2.10) в (3.2), получим

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \left(\Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\Phi_0(t)}{t - z^{-1}} dt \right) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2. \quad (3.12)$$

Задача (3.2), (3.3) эквивалентна задаче (3.12). Следовательно, задача (3.12) всегда разрешима. Известно (см. [1]), что индекс задачи (3.12) равен $2m + 1$. Следовательно, число линейно независимых решений однородных задач (3.12) и (3.2), (3.3) равно $2m + 1$. Это означает, что система (3.10) является поной.

4. Теперь рассмотрим граничные условия

$$\operatorname{Re} \left[a_0(z) \left(z + \frac{1}{z} \right)^n \varphi(z) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.13)$$

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad z \in \Gamma_1^+, \quad (3.14)$$

где n — целое число, функция $a_0(z)$ удовлетворяет условию (1.3) и индекс этой функции на Γ_2 равен нулю. Без потери общности можно предположить, что $|a_0(z)| = 1$ при $z \in \Gamma_2$. Пусть $\varphi_0(z)$ — частное решение задачи (1.1), (1.2) при $f(z) = \operatorname{arg}(a_0(z))$, $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$. Так как функция $f(z) = \operatorname{arg}(a_0(z))$

непрерывна на Γ_2 и удовлетворяет условию Гёльдера, то для любого $z \in \Gamma_2$ имеем

$$a_0(z) = \exp(\ln a_0(z)) = \exp[i \arg(a_0(z))] = \exp[i \operatorname{Re} \varphi_0(z)] = \exp[i \varphi_0(z) + \operatorname{Im} \varphi_0(z)].$$

Следовательно

$$a_0(z) = \omega_0(z) \exp[\operatorname{Im} \varphi_0(z)], \quad z \in \Gamma_2, \quad (3.15)$$

где $\omega_0(z) = \exp[i \varphi_0(z)]$. Подставляя (3.15) в (3.13), получим

$$\operatorname{Re} \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^n \psi(z) \right] = f_0(z),$$

где

$$\psi(z) = \omega_0(z) \varphi(z), \quad f_0(z) = f(z) \exp[-\operatorname{Im} \varphi_0(z)].$$

Поскольку $\omega_0(z) \neq 0$ при $z \in \overline{D}$ и $\omega_0(z) = \omega_0(\bar{z})$, то условие (3.14) можно записать в виде $\psi(z) = \psi(\bar{z})$. Таким образом, задача (3.13), (3.14) сводится к задаче (3.2), (3.3).

5. Теперь рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в самом общем случае. Пусть $F(z)$ определяется формулой (2.3). Подставляя $\varphi(z) = \psi(z) + F(z)$ в (1.1) и (1.2), получим аналогичную задачу при $g \equiv 0$. Таким образом, решение обобщенной задачи Римана–Гильберта (1.1), (1.2) сводится к нахождению частного решения этой задачи при $a(z) = 1$, $g(z) = 0$.

§4. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Задачу (1.1), (1.2) при $a(z) \equiv 1$, $g(z) \equiv 0$ можно свести к интегральному уравнению Фредгольма. Подставляя (2.10) в (1.1), получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z) + \Phi_0 \left(\frac{1}{z} \right) \right] = f(z), \quad z \in \Gamma_2, \quad (4.1)$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в G и непрерывна в $\overline{G} = G \cup \Gamma_2$. Таким образом, задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ эквивалентна задаче (4.1). Мы показали (см. (2.16)), что неоднородная задача (4.1) всегда разрешима, а общее решение однородной задачи

(4.1) определяется формулой $\Phi_0(z) = ic$, где c — произвольная вещественная постоянная. Будем искать решение задачи (4.1) в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\mu(t)}{t-z} dt, \quad (4.2)$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на Γ_2 . Пусть $t, t_0 \in \Gamma_2$, n — внешняя нормаль к Γ_2 в точке t , (r, n) — угол между n и $\overrightarrow{tt_0}$, (R, n) — угол между n и $\overrightarrow{tt_0^{-1}}$. Подставляя (4.2) в (4.1) и переходя к пределу при $z \rightarrow t_0$, получим (см. [1])

$$\mu(t_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} K(t_0, t) \mu(t) ds = f(t_0), \quad (4.3)$$

где ds — элемент длины дуги Γ_2 и

$$K(t_0, t) = \frac{1}{r} \cos(r, n) + \frac{1}{R} \cos(R, n), \quad r = |t - t_0|, \quad R = \left| t - \frac{1}{t_0} \right|.$$

Если Γ_2 — достаточно гладкий контур, то $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по t и t_0 . Поэтому всякое непрерывное решение уравнения (4.3) удовлетворяет условию Гельдера, ибо мы подчиняем этому условию функцию $f(t)$.

Докажем, что однородное уравнение (4.3) имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $\mu(t)$ — какое-либо его решение. Тогда функция $\Phi_0(z)$, определенная формулой (4.2), является решением однородной задачи (4.1). Поэтому $\Phi_0(z) = ic$, где c — некоторая вещественная постоянная, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{\mu(t)}{t-z} dt = ic, \quad z \in G. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что $\mu(t) \equiv 0$ (см. [1]). Следовательно, уравнение Фредгольма (4.3) имеет единственное решение.

§5. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА

В КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом параграфе мы укажем эффективные методы решения задачи (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ в некоторых классах кольцеобразных областей.

5.1. Пусть Γ_2 — окружность $|z| = R$, $R > 1$ и D — кольцо $1 < |z| < R$. В §4 при помощи подстановки (2.10) задачу (1.1), (1.2) мы свели к задаче (4.1), где

$\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$. Если $|z| = R$, то $z^{-1} = \bar{z}R^{-2}$. Поэтому граничное условие (4.1) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} [\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})}] = f(z), \quad |z| = R. \quad (5.1)$$

Ясно, что $\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})}$ аналитична в круге $|z| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq R$. Из (5.1) имеем

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(\bar{z}R^{-2})} = F(z) + id, \quad |z| < R, \quad (5.2)$$

где $F(z)$ — интеграл Шварца (см. [3])

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t+z}{t-z} f(t) \frac{dt}{t},$$

а d — произвольная вещественная постоянная. В дальнейшем будем считать, что $d = 0$. Делая в (5.2) замену $\Phi_0(z) = \Phi(z) + F(z)$, получим

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z}R^{-2})} = -\overline{F(\bar{z}R^{-2})}, \quad |z| < R. \quad (5.3)$$

Функция $F(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $|z| \leq R$, так как функция $f(t)$ удовлетворяет этому условию на окружности $|z| = R$ (см. [1], стр. 70). Пусть

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (5.4)$$

$$\Phi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

являются разложениями Тейлора функций F и Φ . Согласно неравенству Коши [3]

$$|a_n| \leq \frac{\|F\|}{R^n}, \quad \|F\| = \max_{|z| \leq R} |F(z)|. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$c_n + \bar{c}_n R^{-n} = -\bar{a}_n R^{-2n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.6)$$

Так как $f(t)$ — вещественная функция, то a_0 — вещественная постоянная. При $n = 0$ уравнение (5.6) имеет решение $c_0 = -a_0/2$. При $n > 0$ (5.6) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$c_n = -\frac{\bar{a}_n - a_n R^{-n}}{R^{2n}(1 - R^{-2n})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Из (5.5) и (5.7) получим

$$|c_n| \leq \frac{R^{-3n}}{(1-R^{-1})} \|F\|. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.7) в (5.4), получим частное решение уравнения (5.3). Таким образом, частное решение задачи (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ определяется формулой

$$\varphi(z) = F(z) + F\left(\frac{1}{z}\right) + \Phi(z) + \Phi\left(\frac{1}{z}\right), \quad (5.9)$$

где $\Phi(z)$ — ряд (5.4), коэффициенты которого определяются формулой (5.7).

Полагая

$$\varphi_m(z) = F(z) + F\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k(z^k + z^{-k}),$$

с учетом (5.8) и (5.9), получим

$$|\varphi(z) - \varphi_m(z)| \leq \frac{R^{-3m}}{(1-R^{-1})(1-R^{-3})}, \quad z \in \bar{D}.$$

5.2. Пусть теперь D — область, ограниченная окружностями $|z| = 1$ и $|z - z_0| = R$, $z_0 \neq 0$, причем $R > 1 + |z_0|$. В этом случае задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ сводится к задаче (4.1), где $\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$. В (4.1) делая замену переменной $z = z_0 + R\zeta$, получим

$$\operatorname{Re} \left[\Phi_0(z_0 + R\zeta) + \Phi_0\left(\frac{1}{z_0 + R\zeta}\right) \right] = f_0(\zeta), \quad |\zeta| = 1, \quad (5.10)$$

где $f_0(\zeta) = f(z_0 + R\zeta)$. Ясно, что функция $\psi(z) = \Phi_0(z_0 + Rz)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Имеем

$$\Phi_0(z) = \psi\left(\frac{z - z_0}{R}\right), \quad |z - z_0| \leq R. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получим

$$\operatorname{Re} [\psi(z) + \psi(\alpha(z))] = f_0(z), \quad |z| = 1, \quad (5.12)$$

где

$$\alpha(z) = \frac{1}{R(z_0 + Rz)} - \frac{z_0}{R}.$$

При $|z| = 1$ имеем $\bar{z} = 1/z$ и $\alpha(z) = \bar{\beta}(\bar{z})$, где

$$\beta(z) = \frac{z}{R(R + \bar{z}_0 z)} - \frac{\bar{z}_0}{R}.$$

Так как $R > 1 + |z_0|$, функция $\beta(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и

$$|\beta(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Следовательно, граничное условие (5.12) запишется в виде $\operatorname{Re} \Phi(z) = f_0(z)$, где

$$\Phi(z) = \psi(z) + \overline{\psi(\beta(z))}.$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Поэтому (см. (5.2))

$$\psi(z) + \overline{\psi(\beta(z))} = F_0(z) + id, \quad (5.13)$$

где F_0 — интеграл Шварца с $f = f_0$. Функции

$$\gamma_0(z) = \frac{z}{R(R + z_0 z)} - \frac{z_0}{R}, \quad \gamma(z) = \beta(\overline{\beta(z)}) = \gamma_0(\beta(z))$$

линейно независимы и удовлетворяют неравенствам

$$|\gamma_0(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |\gamma(z)| \leq \frac{1 + |z_0|}{R} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Если $z_0 \neq 0$, то функция $\gamma(z)$ имеет вид

$$\gamma(z) = \frac{Az + B}{z - C}, \quad |C| > 1, \quad (5.14)$$

где A, B и C — некоторые постоянные, зависящие от z_0 и R . Согласно лемме 2.6 уравнения $z = \overline{\beta(z)}$ и $z = \gamma(z)$ имеют одинаковые решения в круге $|z| < 1$.

Используя (5.14), перепишем уравнение $z = \gamma(z)$ в виде

$$z^2 - (A + C)z - B = 0. \quad (5.15)$$

Так как $|\gamma(z)| < 1$ при $|z| = 1$, то уравнение $z = \gamma(z)$ не имеет решения на окружности $|z| = 1$. Следовательно, уравнение (5.15) имеет одно решение в круге $|z| < 1$ и одно — вне замкнутого круга $|z| \leq 1$. Пусть ζ_0 , $|\zeta_0| < 1$ — решение уравнения (5.15). Согласно лемме 2.6 имеем $\zeta_0 = \overline{\beta(\zeta_0)}$. Решение уравнения (5.13)

ищем в виде

$$\psi(z) = c + (z - \zeta_0)\psi_0(z), \quad (5.16)$$

где c — вещественная постоянная, а $\psi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Подставляя (5.16) в (5.13), получим

$$2c + (z - \zeta_0)\psi_0(z) + (\beta(z) - \bar{\zeta}_0)\overline{\psi_0(\beta(z))} = F_0(z) + id. \quad (5.17)$$

Подстановка $z = \zeta_0$ дает

$$c = \frac{1}{2} \operatorname{Re} F_0(\zeta_0), \quad d = -\operatorname{Im} F_0(\zeta_0). \quad (5.18)$$

Из определения β и $\zeta_0 = \overline{\beta(\zeta_0)}$ имеем

$$\beta(z) - \bar{\zeta}_0 = \beta(z) - \beta(\zeta_0) = \frac{z - \zeta_0}{(R + \bar{z}_0 z)(R + \bar{z}_0 \zeta_0)}.$$

Подставляя c, d и $\beta(z) - \bar{\zeta}_0$ в (5.17), получим

$$\psi_0(z) = \delta(z)\psi_0(\overline{\beta(z)}) + F_1(z), \quad (5.19)$$

где

$$\delta(z) = -\frac{1}{(R + \bar{z}_0 z)(R + \bar{z}_0 \zeta_0)}, \quad F_1(z) = \frac{F_0(z) - F_0(\zeta_0)}{z - \zeta_0}.$$

Так как $R > 1 + |z_0|$ и $|\zeta_0| < 1$, то

$$|\delta(z)| \leq \frac{1}{(R - |z_0|)^2} < 1, \quad |z| \leq 1.$$

Поэтому норма оператора $K(\psi_0) = \delta(z)\psi_0(\overline{\beta(z)})$ меньше 1 и уравнение (5.19) имеет единственное решение, записываемое рядом Неймана (см. [4])

$$\psi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + \dots, \quad (5.20)$$

где $K^n(F) = K(K^{n-1}(F))$ и

$$|K^n(F_1)| \leq \frac{1}{(R - |z_0|)^{2n}} \|F_1\|.$$

Ряд (5.20) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq 1$ как убывающая геометрическая прогрессия. Таким образом, частное решение задачи (1.1), (1.2) при $a = 1, g = 0$ определяется при помощи формул (2.10), (5.11), (5.16), (5.18) и (5.20).

5.3. Пусть теперь Γ_2 – эллипс, охватывающий окружность $|z| = 1$. Параметрическое уравнение этого эллипса можно записать в виде

$$z = \alpha(t) \equiv A \left(t + \frac{\mu}{t} \right) = A(t + \mu \bar{t}), \quad |t| = 1,$$

где A и μ – положительные постоянные такие, что $A(1 - \mu) > 1$. Выше мы показали, что задача (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ эквивалентна задаче (4.1), где $\Phi_0(z)$ аналитична в односвязной области G , ограниченной контуром Γ_2 и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$. Решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau + c, \quad z \in G, \quad (5.21)$$

где c – вещественная постоянная, функция $\psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Пусть $|t| = 1$. Имеем $\alpha(t) \in \Gamma_2$. Переходя к пределу в (5.21) при $z \rightarrow \alpha(t)$ и используя формулы Сохоцкого–Племеля (см. [1]), получим

$$\Phi_0(\alpha(t)) = \frac{1}{2} t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau) \alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau + c, \quad (5.22)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Согласно формуле Коши имеем

$$z \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad |z| < 1.$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow t$, получим

$$t \psi(t) = \frac{1}{2} t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau \psi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad |t| = 1. \quad (5.23)$$

Из (5.22) и (5.23) имеем

$$\Phi_0(\alpha(t)) = t \psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_1(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + c, \quad |t| = 1, \quad (5.24)$$

где

$$K_1(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}.$$

Функция $K_1(t, \tau)$ бесконечно дифференцируема по t и τ при $|\tau| = 1$, $|t| = 1$. Поэтому интеграл (5.24) можно понимать в смысле Римана. Подставляя $z = (\alpha(t))^{-1}$ в (5.21), получим

$$\Phi_0 \left(\frac{1}{\alpha(t)} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_2(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + c, \quad |t| = 1, \quad (5.25)$$

где

$$K_2(z, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - (\alpha(t))^{-1}}.$$

Подставляя $\alpha(t) = A(t + \mu t^{-1})$, получим

$$K_1(z, \tau) = \frac{\mu \bar{t} \bar{\tau}^2}{1 - \mu \bar{t} \bar{\tau}}, \quad K_2(z, \tau) = \frac{A(1 - \mu \bar{\tau}^2)}{A(\tau + \mu \bar{\tau}) - \bar{t} A^{-1}(1 + \mu \bar{t}^2)^{-1}}. \quad (5.26)$$

Функция $K_3(z, \tau) = \overline{K_1(z, \tau)} + \overline{K_2(z, \tau)}$ аналитична по комплексным переменным t и τ при $|\tau| \leq 1$ и $|t| \leq 1$. Условие (4.1) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \left[\bar{\Phi}_0(\alpha(t)) + \bar{\Phi}_0 \left(\frac{1}{\alpha(t)} \right) \right] = f(\alpha(t)), \quad |t| = 1. \quad (5.27)$$

Обозначим

$$\psi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau K_j(t, \tau) \psi(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} (\psi_j(t)) = \operatorname{Re} (\overline{\psi_j(t)}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 \overline{K_j(t, \tau) \psi(\tau)} d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Подставляя $\Phi_0(\alpha(t))$ из (5.24) и (5.25) в (5.27), получим

$$\operatorname{Re} \left[t\psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c \right] = f(\alpha(t)), \quad |t| = 1. \quad (5.28)$$

Функция в квадратных скобках аналитична в круге $|t| < 1$ и определяется интегралом Шварца

$$t\psi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c = F_0(t) + ic_0, \quad |t| < 1, \quad (5.29)$$

где

$$F_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau + t}{\tau - \bar{t}} f(\alpha(t)) \frac{d\tau}{\tau},$$

а c_0 — произвольная вещественная постоянная. Подставляя $t = 0$ в (5.29), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2c = F_0(0) + ic_0. \quad (5.30)$$

Из (5.29) и (5.30) имеем

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_4(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau + 2F_1(t), \quad |t| < 1, \quad (5.31)$$

где

$$K_4(t, \tau) = \frac{1}{t} [K_3(0, \tau) - K_3(t, \tau)], \quad F_1(t) = \frac{1}{t} [F_0(t) - F_0(0)].$$

Из (5.26) следует, что

$$K_4(t, \tau) = -\frac{\mu\tau^2}{1 - \mu t\tau} - \frac{\tau^2(1 - \mu\tau^2)(1 + \mu t^2)^{-1}}{A(1 + \mu\tau^2)[A(1 + \mu\tau^2) - A^{-1}t\tau(1 + \mu t^2)^{-1}]}. \quad (5.32)$$

Из (5.30) имеем

$$2c = F_0(0) - \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau \right], \quad (5.33)$$

$$c_0 = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{\tau}^3 K_3(0, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau \right].$$

Таким образом, задачу (1.1), (1.2) при $a = 1$, $g = 0$ мы свели к решению интегрального уравнения Фредгольма (5.31).

Докажем, что однородная задача (5.31) имеет только тривиальное решение. Пусть $\psi(t)$ — решение однородного уравнения (5.31), и пусть c определяется формулой (5.33). Тогда $\Phi_0(z)$, определенная формулой (5.21), является решением однородной задачи (4.1) и, следовательно, общее решение однородной задачи (4.1) определяется формулой $\Phi_0(z) = ic_1$, где c_1 — вещественная постоянная. Следовательно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\tau\psi(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau + c = ic_1, \quad z \in G. \quad (5.34)$$

Из формулы Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau = 1, \quad z \in G.$$

Следовательно, равенство (5.34) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\omega(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - z} d\tau = 0, \quad z \in G, \quad (5.35)$$

где $\omega(t) = t\psi(t) + c - ic_1$ аналитична в круге $|t| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|t| \leq 1$. Из равенства (5.35) следует (см. [5]), что $\omega(t) = 0$ при $|t| < 1$. Поэтому $c = c_1 = 0$ и $\psi(t) \equiv 0$.

Теперь укажем простой метод решения уравнения (5.31). Из (5.32) имеем

$$|K_4(t, \tau)| \leq q = \frac{\mu}{1-\mu} + \frac{1+\mu}{[A^2(1-\mu)^2-1](1-\mu)}, \quad |t| < 1, \quad |\tau| < 1. \quad (5.36)$$

Определим оператор M формулой

$$M(\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \tau^3 K_4(t, \tau) \overline{\psi(\tau)} d\tau.$$

Из (5.36) имеем $|M(\psi)| \leq q \|\psi\|$. Поэтому при $q < 1$

$$\psi(t) = F_1(t) + M(F_1) + M^2(F_1) + \dots$$

является решением уравнения (5.31). В качестве приближения возьмем сумму

$$\psi_n(t) = F_1(t) + M(F_1) + \dots + M^{n-1}(F_1).$$

Для погрешности приближения имеем оценку

$$|\psi(t) - \psi_n(t)| \leq \frac{q^n}{1-q} \|F_1\|, \quad |t| \leq 1.$$

Заметим, что $q < 1$, если $0 \leq \mu \leq 1/4$, $A \geq 8/3$. Пусть теперь $q \geq 1$. Используя тождество

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{m-1} t^k + \frac{t^m}{1-t}, \quad |t| \leq 1,$$

функцию K_4 , определенную формулой (5.32), можно представить в виде

$$K_4(t, \tau) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\tau) t^k + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{b_k(\tau) t^{k-1}}{(1+\mu t^2)^k} + K_5(t, \tau), \quad (5.37)$$

где

$$a_k(\tau) = -(\mu\tau)^{k+1}, \quad b_k(\tau) = -\frac{\tau^{k+1}(1-\mu\tau^2)}{A^{2k}(1+\mu\tau^2)^{k+1}},$$

$$K_5(t, \tau) = -\frac{(\mu\tau)^{m+1}t^m\tau}{1-\mu t\tau} - \frac{A^{-2n}t^{n-1}\tau^{n+1}(1-\mu\tau^2)(1-\mu t^2)^{-n}(1+\mu\tau^2)^{-n-1}}{1-t\tau[A^2(1+\mu\tau^2)(1+\mu t^2)]^{-1}}.$$

Имеет место оценка

$$|K_5(t, \tau)| \leq q_{mn} = \frac{\mu^{m+1}}{1-\mu} + \frac{A^2(1-\mu^2)}{A^{2n}(1-\mu)^{2n}[A^2(1-\mu)^2-1]}.$$

Ясно, что для достаточно больших m и n всегда имеем $q_{mn} < 1$: Из леммы 2.7 следует, что совокупность функций $\{t^k\}_0^{m-1}$, $\{t^{k-1}(1+\mu t^2)^{-k}\}_1^{n-1}$ линейно независима в поле комплексных чисел. Используя разложение (5.37), уравнение (5.31) можно решать по известной схеме, указанной в [6].

§6. МЕТОД СВЕДЕНИЯ

Пусть $z = \alpha_0(t)$ — функция, взаимнооднозначно отображающая единичную окружность $|t| = 1$ на некоторый контур Γ_0 , сохраняя ориентацию, и пусть $\alpha'_0(t) \neq 0$. Мы предполагаем, что контур Γ_0 охватывает точку $z = 0$. Обозначим $\rho = \min_{|t|=1} |\alpha_0(t)|$ и рассмотрим функцию

$$z = \beta(t) \equiv A\alpha_0(t) + \frac{B}{\alpha_0(t)}, \quad |t| = 1, \quad (6.1)$$

где A и B — ненулевые комплексные постоянные такие, что $|B| < |A|\rho^2$. Функция $z = \beta(t)$ взаимнооднозначно отображает единичную окружность $|t| = 1$ на некоторый замкнутый простой контур L , охватывающий точку 0, и $\beta'(t) \neq 0$. Уравнение (6.1) можно считать параметрическим уравнением контура L .

Пусть G — область, ограниченная контуром L . Рассмотрим в G следующую задачу Римана-Гильберта [1]: найти аналитическую в G функцию $\psi(z)$, непрерывную в замкнутой области $L \cup G$ и удовлетворяющую граничному условию

$$\operatorname{Re} [b(z)\psi(z)] = g(z), \quad z \in L, \quad (6.2)$$

где $b(z)$ и $g(z)$ — заданные функции на L , $g(z)$ — вещественнозначна и $b(z) \neq 0$, $z \in L$. Предполагается, что $b(z)$ и $g(z)$ удовлетворяют условию Гельдера. Ниже мы сведем задачу (6.2) к некоторой обобщенной задаче Римана-Гильберта. Параметрическое уравнение (6.1) можно записать в виде

$$z = \frac{1}{2}B_0[A_0\alpha_0(t) + (A_0\alpha_0(t))^{-1}], \quad |t| = 1,$$

где $B_0 = 2\sqrt{AB}$, $A_0 = \sqrt{A/B}$. Из $|B| < |A|\rho^2$ имеем $|A_0|\rho > 1$. Обозначим через L_0 контур, параметрическое уравнение которого определяется формулой

$$z = \beta_0(t) \equiv \frac{1}{2}[A_0\alpha_0(t) + (A_0\alpha_0(t))^{-1}], \quad |t| = 1, \quad (6.3)$$

и пусть G_0 — область, ограниченная контуром L_0 . Область G_0 является образом области G при отображении $\zeta = B_0^{-1}z$ ($z \in G$, $\zeta \in G_0$). Так как $0 \in G$, то $0 \in G_0$. Перепишем (6.3) в виде

$$z = \beta_0(z) = \alpha(A_0\alpha_0(t)), \quad |t| = 1, \quad (6.4)$$

где $\alpha(z) = 1/2(z + z^{-1})$ — функция Жуковского (см. [3]), конформно отображающая внешность единичной окружности на внешность отрезка $[-1, 1]$. Так как

$$|A_0\alpha_0(t)| > |A_0|\rho > 1, \quad |t| = 1,$$

то из (6.4) следует, что L_0 не содержит точки отрезка $[-1, 1]$. С другой стороны, так как $O \in G_0$, то отрезок $[-1, 1]$ целиком лежит в G_0 . Функцию $\psi(z)$ можно представить в виде $\psi(z) = \psi_0(z/B_0)$, где $\psi_0(z)$ аналитична в G_0 и непрерывна в $\bar{G}_0 = L_0 \cup G_0$. Подставляя $\psi(z) = \psi_0(z/B_0)$ в (6.2) и делая замену $\zeta = B_0^{-1}z$, получим

$$\operatorname{Re} [b(B_0\zeta)\psi_0(\zeta)] = g(B_0\zeta), \quad \zeta \in L_0. \quad (6.5)$$

Пусть Γ — контур, параметрическое уравнение которого определяется формулой $z = A_0\alpha_0(t)$, $|t| = 1$. Так как $|A_0|\rho > 1$, то контур Γ охватывает единичную окружность $|z| = 1$. Из (6.4) следует, что $\zeta \in L_0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = \alpha(z)$, $z \in \Gamma$. Подставляя $\zeta = \alpha(z)$ в (6.5), получим

$$\operatorname{Re} [b(B_0\alpha(z))\psi_0(\alpha(z))] = g(B_0\alpha(z)), \quad z \in \Gamma. \quad (6.6)$$

Пусть D — область, ограниченная контуром Γ и окружностью $|z| = 1$. Функция $\zeta = \alpha(z)$ отображает окружность $|z| = 1$ на отрезок $[-1, 1]$, а контур Γ на контур L_0 . Поэтому функция $\zeta = \alpha(z)$ взаимно однозначно отображает область D на область G_0 без отрезка $[-1, 1]$. Поэтому функция $\varphi(z) = \psi_0(\alpha(z))$ аналитична в области D и непрерывна в $\bar{D}$. Граничное условие (6.6) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} [a(z)\varphi(z)] = f(z), \quad z \in \Gamma, \quad (6.7)$$

где

$$a(z) = b(B_0\alpha(z)), \quad f(z) = g(B_0\alpha(z)).$$

Так как $\alpha(z) = \alpha(\bar{z})$ при $|z| = 1$, то

$$\varphi(z) = \varphi(\bar{z}), \quad |z| = 1, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (6.8)$$

Таким образом, аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ является решением обобщенной задачи (6.7), (6.8). Из определения φ имеем

$$\psi_0(z) = \varphi\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad (6.9)$$

где под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимаем ту ветвь, которая аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z} = 1.$$

Ясно, что функция $\psi_0(z)$ аналитична в G_0 без отрезка $[-1, 1]$. Из (6.8) следует, что $\psi_0(z)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, аналитична всюду в G_0 . Из (6.9) имеем

$$\psi(z) = \varphi \left(\frac{z}{B_0} + \sqrt{\frac{z^2}{B_0^2} - 1} \right). \quad (6.10)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6.1. Задача Римана-Гильберта (6.2) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение обобщенная задача Римана-Гильберта (6.7), (6.8), причем общее решение задачи (6.2) определяется формулой (6.10), где $\varphi(z)$ — общее решение обобщенной задачи (6.7), (6.8).

Параметрическое уравнение контура Γ , как правило, более простое, чем параметрическое уравнение контура L . Поэтому во многих случаях удобно решать обобщенную задачу (6.7), (6.8) вместо задачи (6.2).

§7. ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Контур L называется *аналитическим*, если он может быть задан параметрическим уравнением $z = \alpha_0(t)$, $|t| = 1$, где $\alpha_0(t)$ — функция комплексной переменной t , аналитичная в некоторой окрестности окружности $|t| = 1$ и удовлетворяющая условию $\alpha'_0(t) \neq 0$ при $|t| = 1$. Пусть G — область, ограниченная контуром L . Не ограничивая общности, будем предполагать, что G содержит точку $z = 0$. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре (см. [1]): найти в G решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7.1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$a_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_0(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in L, \quad (7.2)$$

где $a_0(x, y)$, $b_0(x, y)$ и $f(x, y)$ — заданные вещественные функции и $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$. Предполагается, что функции $a_0(x, y)$, $b_0(x, y)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют условию Гельдера на L . Как известно ([3]), любое решение уравнения Лапласа можно представить в виде $u(x, y) = \operatorname{Re} \varphi_0(z)$, где $z = x + iy$, а функция $\varphi_0(z)$ аналитична в G и удовлетворяет условию $\operatorname{Im} \varphi_0(0) = 0$. Следовательно

$$\varphi_0(z) = \int_0^z \psi(\zeta) d\zeta + c, \quad (7.3)$$

где c — произвольная вещественная постоянная, а функция $\psi(z)$ аналитична в G и непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$. Из (7.3) и $u = \operatorname{Re} \varphi_0$ имеем

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left[\int_0^z \psi(\zeta) d\zeta \right] + c.$$

Подставляя $u(x, y)$ в (7.2), получим

$$\operatorname{Re} [a(z)\psi(z)] = f(z), \quad a(z) = a_0(x, y) + ib_0(x, y), \quad z \in L. \quad (7.4)$$

Таким образом, задача Пуанкаре (7.1), (7.2) сводится к задаче Римана-Гильберта (7.4). Для случая, когда G — круг или полуплоскость, в [1] указан простой метод ее решения. В общем случае задачу (7.4) можно свести к этим случаям при помощи конформного отображения G на круг или полуплоскость. В [2] задача (7.4) сводится к сингулярному интегральному уравнению. Применяя результаты §5 и §6, здесь мы укажем эффективные методы решения задачи Пуанкаре для некоторых областей, ограниченных аналитическими кривыми.

1. Пусть границей G является эллипс

$$x = A \cos \theta, \quad y = B \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (7.5)$$

Пусть $t = e^{i\theta}$. тогда

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

Следовательно, параметрическое уравнение (7.5) можно записать в виде

$$z = A \cos \theta + iB \sin \theta = \frac{A+B}{2}t + \frac{A-B}{2t}, \quad |t| = 1.$$

Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D , ограниченной окружностями $|z| = \sqrt{(A+B)(A-B)^{-1}}$ и $|z| = 1$. Эта задача полностью решена в §5, п. 1.

2. Пусть параметрическое уравнение контура L имеет вид

$$z = A(t - \mu) + \frac{B}{t - \mu}, \quad |t| = 1,$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$, $|\mu| < 1$ и $|A| > |B|(1 - \mu)^2$. Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D , ограниченной окружностями

$$\left| z + \mu \sqrt{\frac{A}{B}} \right| < \sqrt{\frac{|A|}{|B|}}$$

и $|z| = 1$ (см. §5, п. 2).

3. Пусть параметрическое уравнение контура Γ имеет вид

$$z = A \left(t + \frac{\mu}{t} \right) + B \left(t + \frac{\mu}{t} \right)^{-1}, \quad |t| = 1,$$

где A, B и μ — комплексные постоянные, не равные нулю и такие, что $|\mu| < 1$, $|A| > |B|(1 - |\mu|)^2$. Пусть область D ограничена окружностью $|z| = 1$ и эллипсом

$$z = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(t + \frac{\mu}{t} \right), \quad |t| = 1.$$

Согласно теореме 6.1 задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D (см. §5, п. 3).

4. Пусть параметрическое уравнение контура Γ имеет вид

$$z = A \left(t + \sum_{k=1}^m c_k t^{-k} \right) + B \left(t + \sum_{k=1}^m c_k t^{-k} \right)^{-1},$$

где A, B и c_k — комплексные постоянные такие, что

$$\sum_{k=0}^m |c_k| < 1, \quad \sum_{k=0}^m k |c_k| < 1, \quad |A| > |B| \left(1 - \sum_{k=0}^m |c_k| \right)^{-2}.$$

Пусть Γ_2 задано уравнением

$$z = \sqrt{\frac{A}{B}} \left(t + \sum_{k=0}^m c_k t^{-k} \right), \quad |t| = 1.$$

Задача (7.4) сводится к обобщенной задаче Римана-Гильберта в области D между окружностью $|z| = 1$ и контуром Γ_2 .

ABSTRACT. A relationship between the classical and generalized Hilbert-Riemann problems is derived. Some effective methods of resolution of the generalized problem are presented. The results are applied in the Poincare problem for Laplace equation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.
2. Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1970.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
5. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.
6. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.

29 марта 1997

Армянский государственный
инженерный университет
E-mail : htersian@seua.am