АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ И СДВИГАМИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 3, 1998

В работе рассмотрены дифференциальные уравнения первого порядка с особенностями высокого порядка и сдвигами. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих уравнений, а также формулы для решений. Полученные результаты применены к задаче Пуанкаре.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D^+ – единичный круг $|z| < 1$, Γ – окружность $|z| = 1$, D^- – область $|z| > 1$, $z = x + iy$. В D^+ рассмотрим уравнение

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z)\,\varphi(\beta(z)) = f(z), \qquad z \in D^+, \tag{0.1}$$

где функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ аналитичны в D^+, $n \geq 2$ – натуральное число.

Мы предполагаем, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}^+ = D^+ \bigcup \Gamma$ и

$$\beta(z) \in \overline{D}^+ \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}^+, \tag{0.2}$$

$$\beta(0) = 0, \tag{0.3}$$

$$\beta'(0) \neq 0. \tag{0.4}$$

Не ограничивая общности предположим, что

$$\alpha(0) \neq 0. \tag{0.5}$$

Решение уравнения (0.1) ищем в классе функций, аналитичных в D^+ и непрерывно дифференцируемых в $\overline{D}^+$. Уравнение (0.4) при $f \equiv 0$ называется однородным.

Замечание 1. При $n = 0, 1$, делая замену переменной

$$\varphi(z) = \int_0^z \Psi(t)\,dt + c,$$

уравнение (0.1) можно свести к интегральному уравнению типа Вольтерра, рассмотренному в [1]. Поэтому эти случаи не рассматриваются.

В работе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 0.1. *Однородное уравнение (0.1) имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородного уавнения (0.1) необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_\Gamma f(z)\,\Psi_j(z)\,dz = 0, \qquad j = 1, ..., n-1, \tag{0.6}$$

где $\Psi_1(z)$, ..., $\Psi_{n-1}(z)$ – некоторые линейно независимые аналитические функции в D^-, исчезающие на бесконечности. Эти функции зависят от натурального числа n и функций $\alpha(z)$, $\beta(z)$, но не зависят от $f(z)$.

Будем говорить, что функция $\Psi(z)$ исчезает на бесконечности, если $\Psi(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Если особо не отмечено, линейную зависимость или независимость будем понимать в поле комплексных чисел.

Работа состоит из шести параграфов. В §1 мы доказываем теорему 0.1. В §2 предложен простой метод решения уравнения (0.1). В §3 и §5 дается явная формула для решения уравнения (0.1) и более общего уравнения без сдвигов. В §4 рассмотрен случай $\beta'(0) = 0$. В §6 полученные результаты применяются к уравнению Лапласа в задаче Пуанкаре.

§1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.1

Пусть $\varphi(z)$ – решение однородного уравнения

$$z^n\,\varphi'(z) - \alpha(z)\,\varphi(\beta(z)) = 0. \tag{1.1}$$

Докажем, что если

$$\varphi^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, ..., m-1, \tag{1.2}$$

то

$$\varphi^{(m)}(0) = 0. \tag{1.3}$$

Из (1.2) имеем

$$\varphi(z) = z^m\, \Psi(z), \tag{1.4}$$

где $\Psi(z)$ аналитична в D^+.

Подставляя $\varphi(z)$ из (1.4) в (1.1), получим

$$z^{m+n}\, \Psi'(z) + m z^{m+n-1}\, \Psi(z) - \alpha(z)\, \beta^m(z)\; \Psi(\beta(z)) = 0, \qquad z \in D^+. \tag{1.5}$$

Разделив обе части (1.5) на z^m и переходя к пределу при $z \to 0$, имеем

$$\Psi(0) = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.4) и (1.6) следует (1.3). Подставляя в (1.1) $z = 0$, получим $\varphi(0) = 0$. Из (1.2) и (1.3) следует, что $\varphi'(0) = 0$. Аналогично, $\varphi^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$.

Для доказательства второй части теоремы 0.1 рассмотрим следующую краевую задачу Гильберта (задача сопряжения, [2], стр. 146) :

$$z^n\, \varphi'(z) - \alpha(z)\, \varphi(\beta(z)) = \omega(z) + g(z), \qquad z \in \Gamma, \tag{1.7}$$

где $\varphi(z)$ и $\omega(z)$ – искомые функции, аналитичные в D^+ и D^-, соответственно, а $g(z)$ – заданная функция на окружности $|z| = 1$. Предполагаем, что $\varphi(z)$ бесконечно дифференцируема в области $\overline{D^+}$, $\omega(z)$ исчезает на бесконечности и непрерывна в $\overline{D^-} = D^- \bigcup \Gamma$, а $g(z)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ ([2], стр. 20).

Имеет место тождество

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \int_0^z (\zeta\, \varphi'(\zeta) + \varphi(\zeta))\; d\zeta. \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует, что аналитическую функцию $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta, \tag{1.9}$$

где $\Psi(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D^+}$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (1.9) в (1.7), получим

$$z^{n-1}\, \Psi(z) - z^{n-2} \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta - \alpha(z)\, \frac{1}{\beta(z)} \int_0^{\beta(z)} \Psi(\zeta)\, d\zeta = \omega(z) + g(z), \qquad z \in \Gamma. \tag{1.10}$$

Таким образом, задача (1.7) сводится к задаче Гильберта (1.10), не содержащей производных искомой функции. Такие задачи полностью изучены в [2] при помощи сингулярных интегральных уравнений. Мы будем использовать некоторые результаты этой работы. Сначала докажем, что однородная задача (1.10) (при $g \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Пусть $(\Psi(z), \omega(z))$ – решение однородной задачи (1.10). Тогда $(\varphi(z), \omega(z))$ – решение задачи (1.7) (при $g \equiv 0$), где $\varphi(z)$ определяется формулой (1.9). Из (1.7) следует, что при $g \equiv 0$ функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением аналитической функции $z^n\, \varphi'(z) - \alpha(z)\, \varphi(\beta(z))$ вне окружности $|z| = 1$ на всю комплексную плоскость. Так как функция $\omega(z)$ исчезает на бесконечности, то согласно теореме Лиувилля $\omega(z) = 0$, $z \in D^-$ и

$$z^n\, \varphi'(z) - \alpha(z)\, \varphi(\beta(z)) = 0, \qquad z \in D^+. \tag{1.11}$$

Следовательно, $\varphi(z) \equiv 0$ – единственное решение (1.11) и однородная задача (1.10) имеет только нулевое решение. Индекс задачи (1.10) равен $1 - n$ (см. [2]). Отсюда следует, что для разрешимости неоднородной задачи (1.10), $n-1$ условия вида (см. [2])

$$\int_{|z|=1} g(z)\, \omega_j(z)\, dz = 0, \qquad j = 1, \ldots, n-1, \tag{1.12}$$

являются необходимыми и достаточными, где $\omega_1(z)$, ..., $\omega_{n-1}(z)$ – некоторые линейно независимые функции на Γ, не зависящие от $g(z)$.

Используя (1.12), покажем, что функции $\omega_j(z)$ – граничные значения функций, аналитичных в D^- и исчезающих на бесконечности. Возьмем в качестве $g(z)$ функцию

$$g(z) = \omega_0(z), \tag{1.13}$$

где $\omega_0(z)$ аналитична в D^-, непрерывна в замкнутой области $\overline{D^-}$ и исчезает на бесконечности. Ясно, что для такого $g(z)$ задача (1.10) имеет решение $\varphi(z) = 0$, $\omega(z) = -\omega_0(z)$. Следовательно, функция $g(z) = \omega_0(z)$ удовлетворяет условиям (1.12), т.е.

$$\int_{|z|=1} \omega_0(z)\, \omega_j(z)\, dz = 0, \qquad j = 1, \ldots, n-1. \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что $\omega_j(z)$ – граничные значения функций, аналитичных в D^- и исчезающих на бесконечности ([2]).

Теперь докажем, что условия (1.12) при $g(z) = f(z)$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (0.1). Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (0.1). Тогда задача (1.7) при $g(z) = f(z)$ имеет решение $(\varphi(z), 0)$. Следовательно, функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условиям (1.12). Пусть теперь функция $g(z) = f(z)$ удовлетворяет условию (1.12). Тогда задача (1.7) имеет решение $(\varphi(z), \omega(z))$. Из (1.7) следует, что при $g(z) = f(z)$ функция $\omega(z)$ является аналитическим продолжением в область D^- аналитической в круге $|z| < 1$ функции

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z)\,\varphi(\beta(z)) - f(z).$$

Отсюда и из теоремы Лиувилля следует, что

$$z^n \varphi'(z) - \alpha(z)\,\varphi(\beta(z)) - f(z) = 0, \qquad z \in D^+.$$

Следовательно, уравнение (0.1) имеет решение. Теорема 0.1 доказана. Мы также доказали, что при $g(z) = f(z)$ уравнение (0.1) эквивалентно задаче (1.7).

§2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (0.1)

Если в (1.7) функция $g(z)$ совпадает с $f(z)$ в (0.1), то уравнение (0.1) эквивалентно задаче (1.7). Поэтому делая замену переменной (1.9), уравнение (0.1) можно свести к задаче (1.10) и решить методом сингулярных интегральных уравнений (см. [2], стр. 511). В этом параграфе мы предлагаем более простой метод. Решение уравнения (0.1) ищем в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{m-1} z^{m-1} + \Phi(z), \tag{2.1}$$

где $m \geq n$ – натуральное число, c_0, c_1, ...,c_{m-1} – постоянные, а $\Phi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leq 1$ и

$$\Phi^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2.2}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (2.1) в (0.1), получим

$$z^n \Phi'(z) - \alpha(z)\,\Phi(\beta(z)) = F(z), \tag{2.3}$$

где

$$F(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m-1} k\, c_k\, z^{n+k-1} + \alpha(z) \sum_{k=0}^{m-1} c_k\, \beta^k(z). \tag{2.4}$$

Поскольку $\beta(0) = 0$ и функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (2.2), то левая часть формулы (2.4) также удовлетворяет этим условиям. Следовательно, из (2.3) имеем

$$F^{(k)}(0) = 0, \qquad j = 0, 1, ..., m-1. \tag{2.5}$$

Подставляя функцию $F(z)$ из (2.4) в (2.5), для постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ получим систему алгебраических уравнений

$$\alpha_0(0)\, c_0 = f(0), \tag{2.6}$$

$$\alpha(0)\ (\beta'(0))^j\ c_j + \sum_{k=0}^{j-1} a_{jk}\, c_k = -\frac{f^{(j)}(0)}{j!}, \qquad j = 1, ..., m-1, \tag{2.7}$$

где

$$a_{jk} = \frac{1}{j!}\, \Psi_k^{(j)}(0), \tag{2.8}$$

$$\Psi_k(z) = -k\, z^{n+k-1} + \alpha(z)\, \beta^k(z). \tag{2.9}$$

Так как $\alpha(0) \neq 0$, $\beta'(0) \neq 0$, то можно считать, что функция $F(z)$ и постоянные $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ известны, условия (2.5) — (2.7) выполнены. Решение системы (2.6), (2.7) имеет вид

$$c_j = \sum_{k=0}^{j} b_{jk}\, f^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, ..., m-1, \tag{2.10}$$

где b_{jk} – постоянные, не зависящие от $f(z)$.

Обозначим через $\Phi_0(z)$ функцию

$$\Phi_0(z) = \Phi(z) + \sum_{j=m-n+1}^{m-1} c_j\, z^k. \tag{2.11}$$

Из (2.2) и (2.11) имеем

$$\Phi_0^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., m-n, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{k!}\, \Phi_0^{(k)}(0) = c_k, \qquad k = m-n+1, ..., m-1. \tag{2.13}$$

Из (2.1), (2.11) и (2.13) получим

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{m-n}\, z^{m-n} + \Phi_0(z), \tag{2.14}$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} c_k\, z^k, \tag{2.15}$$

$$\Phi(\beta(z)) = \Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!}\beta^k(z). \tag{2.16}$$

Подставляя $\Phi(z)$ и $\Phi(\beta(z))$ из (2.15) и (2.16) в уравнение (2.3), получим

$$z^n\,\Phi_0'(z) - \alpha(z)\left[\Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!}\beta^k(z)\right] = F_0(z), \tag{2.17}$$

где

$$F_0(z) = F(z) + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} k\,c_k\,z^{k+n-1}. \tag{2.18}$$

Так как $F(z)$ удовлетворяет условию (2.5), то

$$F_0^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{2.19}$$

Разделив обе части (2.17) на z^n и интегрируя от 0 до z, получим

$$\Phi_0(z) = K(\Phi_0) + F_1(z), \tag{2.20}$$

где K – оператор, действующий в классе аналитических в $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих условию (2.12) и

$$K(\Phi_0) = \int_0^z \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta^n}\left[\Phi_0(\beta(\zeta)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!}\beta^k(\zeta)\right] d\zeta, \tag{2.21}$$

$$F_1(z) = \int_0^z \frac{F_0(\zeta)\,d\zeta}{\zeta^n}. \tag{2.22}$$

Решение уравнения (2.20) будем искать в пространстве функций, аналитичных в D^+, непрерывных в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющих условию (2.12). Определим норму функции $\Phi_0(z)$ в этом классе формулой

$$\|\Phi_0\| = \max_{|z|\le 1} |\Phi_0(z)|. \tag{2.23}$$

Из (2.19) следует, что $F_1^{(k)}(0) = 0$ при $k = 0, ..., m-n$. Если $\Phi_0(z)$ удовлетворяет условию (2.12), то $K(\Phi_0)$ также удовлетворяет этому условию. Уравнение (0.1) имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение (2.20) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.13). Для обоих решений справедливо (2.14), где c_0, $c_1, ..., c_{m-1}$ – постоянные, определенные формулой (2.10). При таком выборе $m \ge n$ и

$$\frac{n\,\|\alpha\|}{m-n+1} < 1, \tag{2.24}$$

покажем, что уравнение (2.20) при дополнительных условиях (2.12) имеет единственное решение. Для этого оценим норму оператора $K(\Phi_0)$ в классе аналитических функций, удовлетворяющих условию (2.12). Пусть $\Phi_0(z)$ – аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leq 1$ и удовлетворяет условию (2.12). Тогда функция

$$\omega_0(z) = \frac{\alpha(z)}{z^m} \left[\Phi_0(\beta(z)) - \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{k!} \beta^k(z)\right] \tag{2.25}$$

аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в $|z| \leq 1$. Согласно принципу максимума модуля (см. [3]) имеем

$$|\omega_0(z)| \leq \max_{|\zeta|=1} |\omega_0(\zeta)| = \|\alpha\| \left(\|\Phi_0\| + \sum_{k=m-n+1}^{m-1} \frac{|\Phi_0^{(k)}(0)|}{k!}\right). \tag{2.26}$$

Из неравенства Коши имеем (см. [3], стр. 64)

$$\frac{|\Phi_0^{(k)}(0)|}{k!} \leq \|\Phi_0\|. \tag{2.27}$$

Из (2.26) и (2.27) следует, что

$$|\omega_0(z)| \leq n\, \|\alpha\|\, \|\Phi_0\|, \tag{2.28}$$

$$|z^{m-n}\, \omega_0(z)| \leq n\, |z|^{m-n}\, \|\alpha\|\, \|\Phi_0\|. \tag{2.29}$$

В (2.21) присутствует функция $z^{m-n}\, \omega_0(z)$. Поэтому из (2.29) имеем

$$|K(\Phi_0)| \leq \frac{|z|^{m-n+1}}{m-n+1}\, n\, \|\alpha\|\, \|\Phi_0\|, \qquad |z| \leq 1. \tag{2.30}$$

Следовательно, для нормы оператора K справедлива оценка

$$\|K\| \leq \frac{n\,\|\alpha\|}{m-n+1} < 1. \tag{2.31}$$

Таким образом, уравнение (2.20) в классе аналитических функций имеет единственное решение, которое задается рядом Неймана ([4], стр. 47)

$$\Phi_0(z) = F_1(z) + K(F_1) + K^2(F_1) + ..., \tag{2.32}$$

где $K^j(F_1)$ – j–я степень K.

Ряд (2.32) сходится равномерно в замкнутом круге $|z| \leq 1$ как убывающая геометрическая прогрессия и

$$||\Phi_0|| \leq c\,||F_1||, \qquad ||K^j(F_1)|| \leq q^j\,||F_1||, \tag{2.33}$$

где

$$q = \frac{n\,||\alpha||}{m-n+1}, \qquad c = \frac{1}{1-q}. \tag{2.34}$$

Из (2.17) следует, что $\Phi_0(z)$ непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Условия (2.13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\Phi_0(z)}{z^{k+1}}\,dz = c_k, \qquad k = m-n+1, ..., m-1. \tag{2.35}$$

Подставляя $\Phi_0(z)$ из (2.32) в (2.35), получим

$$I_j(f) = 0, \qquad j = 1, ..., n-1, \tag{2.36}$$

где $I_j(f)$ – линейные ограниченные функционалы, определенные в классе аналитических функций.

Таким образом, условия (2.36) необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (0.1). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (2.36). Тогда решение уравнения (0.1) задается формулой (2.14), где c_0, c_1, ..., c_{m-n} и функция $\Phi_0(z)$ определяются формулами (2.10) и (2.32), соответственно. Согласно теореме 0.1 условия (2.36) линейно независимы, т.е. функционалы I_1, ..., I_{n-1} линейно независимы и их можно представить в виде (0.6).

§3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (0.1) С ОСОБЕННОСТЯМИ И БЕЗ СДВИГОВ

В этом параграфе мы получим явную формулу для решения уравнения (0.1) и условия разрешимости при $\beta(z) \equiv z$. Сначала рассмотрим уравнение

$$z^n\,\varphi'(z) - P_{n-1}(z)\,\varphi(z) = f(z), \tag{3.1}$$

где $P_{n-1}(z)$ – полином порядка не выше $n-1$

$$P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{n-1} z^{n-1}, \tag{3.2}$$

где $c_0 > 0$, $c_1, \ldots, c_{n-1}$ – постоянные.

Пусть D_0 – круг $|z| < 1$ без отрезка $[-1, 0]$. Решение уравнения (3.1) в интервале (0,1) получено в работе [5]. Так как D_0 – односвязная область и $z^n \neq 0$ при $z \in D_0$, то та же формула справедлива для решения уравнения (3.1) в области D_0. Мы выводим эту формулу для D_0. Пусть

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{c_k\, z^{k+1-n}}{k+1-n} + c_{n-1} \ln z, \tag{3.3}$$

$$\Psi_0(z) = \exp\left(\varphi_0(z)\right), \tag{3.4}$$

где $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ и $-\pi < \arg z \leq \pi$.

В области D_0 решение уравнения (3.1) можно записать в виде

$$\varphi(z) = \Psi_0(z) \left[c + \int_1^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^n\, \Psi_0(\zeta)}\, d\zeta \right], \qquad z \in D_0, \tag{3.5}$$

где c – комплексная постоянная. Так как $c_0 > 0$, то имеем

$$\lim_{x \to +0} |\Psi_0(x)| = +\infty, \qquad \lim_{x \to -0} \frac{1}{x^n\, \Psi_0(x)} = 0. \tag{3.6}$$

Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (3.1) в круге $|z| < 1$ так, что оно задается в D_0 формулой (3.5). Разделив обе части (3.5) на $\Psi_0(z)$ и переходя к пределу при $z = x \to +0$, получим

$$c = \int_0^1 \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^n\, \Psi_0(\zeta)}. \tag{3.7}$$

Следовательно, если (3.1) имеет решение в $|z| < 1$, то оно единственно и определяется формулой (3.5). Пусть $\varphi(z)$ определена формулой (3.5). Обозначим

$$\varphi^+(x) = \lim_{y \to +0} \varphi(x + iy), \qquad \varphi^-(x) = \lim_{y \to -0} \varphi(x + iy), \qquad -1 < x < 0$$

(эти пределы всегда существуют). Поскольку функция $\varphi(z)$ является решением уравнения (0.1) в D_0, то оно являестя также решением этого уравнения в $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(z)$ ограничена в D_0 и

$$\varphi^+(x) = \varphi^-(x), \qquad -1 < x < 0. \tag{3.8}$$

Таким образом, уравнение (0.1) имеет решение в $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда функция (3.5) ограничена в D_0 и выполнено условие (3.8).

Из теоремы 0.1 следует, что условие (0.6) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3.1), где $\Psi_1(z), \ldots, \Psi_{n-m}(z)$ – линейно независимые аналитические функции в $|z| > 1$, исчезающие на бесконечности. Так как коэффициенты уравнения (3.1) являются полиномами, то функции $\Psi_j(z)$ бесконечно дифференцируемы в $|z| \geq 1$ (см. [2]). Используя теорему 0.1, получим дифференциальное уравнение для $\Psi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n-1)$.

Пусть $\varphi_0(z)$ – аналитическая функция в $|z| < 1$, непрерывно дифференцируемая в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Рассмотрим аналитическую функцию

$$f_0(z) = z^n \varphi_0'(z) - P_{n-1}(z)\,\varphi_0(z).$$

Для $f(z) = f_0(z)$ уравнение (3.1) имеет решение $\varphi(z) = \varphi_0(z)$. Из теоремы 0.1 имеем

$$\int_{|z|=1} (z^n \varphi_0'(z) - P_{n-1}(z)\,\varphi_0(z))\ \Psi_j(z)\,dz = 0. \tag{3.9}$$

Интегрируя по частям, из (3.9) получим

$$\int_{|z|=1} \left(z^n \Psi_j'(z) + n\,z^{n-1}\,\Psi_j(z) + P_{n-1}(z)\,\Psi_j(z)\right)\ \varphi_0(z)\,dz = 0. \tag{3.10}$$

Так как (3.10) выполнено для любой аналитической в $|z| < 1$ функции, то

$$z^n \Psi_j'(z) + \left(n\,z^{n-1} + P_{n-1}(z)\right)\ \Psi_j(z) = \omega_j(z), \qquad |z| = 1, \tag{3.11}$$

где $\omega_j(z)$ – аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, непрерывная в замкнутом круге $|z| \leq 1$ (см. [2]).

Из (3.11) следует, что

$$\Phi_j(z) = z^n \Psi_j'(z) + \left(n\,z^{n-1} + P_{n-1}(z)\right)\ \Psi_j(z)$$

– аналитическое продолжение функции $\omega_j(z)$ во внешность окружности $|z| = 1$. Функция $\Psi_j(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и исчезает на бесконечности, так что

$$|\Phi_j(z)| \leq c\,|z|^{n-2}, \qquad |z| \geq 1, \tag{3.12}$$

где c – постоянная. Поэтому из теоремы Лиувилля имеем

$$z^n \Psi_j'(z) + \left(n\,z^{n-1} + P_{n-1}(z)\right)\ \Psi_j(z) = Q_j(z), \qquad |z| \geq 1, \tag{3.13}$$

где $Q_j(z)$ – полином порядка не выше $n-2$.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$z^n\,\Psi'(z) + \big(n\,z^{n-1} + P_{n-1}(z)\big)\,\Psi(z) = Q_{n-2}(z), \qquad |z| > 1, \tag{3.14}$$

где $Q_{n-2}(z)$ – полином порядка не выше $n-2$. Любую аналитическую в $|z|>1$ функцию $\Psi(z)$, убывающую на бесконечности и удовлетворяющую уравнению (3.14), назовем решением этого уравнения.

Теорема 3.1. *Для разрешимости уравнения (3.1) необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\Psi(z)\,dz = 0 \tag{3.15}$$

для любого решения $\Psi(z)$ уравнения (3.14).

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (3.1) имеет решение $\varphi(z)$, и пусть $\Psi(z)$ –решение уравнения (3.14). Тогда

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\Psi(z)\,dz = \int_{|z|=1} [z^n\,\varphi'(z) - P_{n-1}(z)\,\varphi(z)]\,\Psi(z)\,dz = \int_{|z|=1} \varphi(z)\times$$
$$\times\,\big[-z^n\,\Psi'(z) - n\,z^{n-1}\,\Psi(z) - P_{n-1}(z)\,\Psi(z)\big]\,dz = -\int_{|z|=1} \varphi(z)\,Q_{n-2}(z)\,dz = 0. \tag{3.16}$$

Последнее равенство в (3.16) следует из теоремы Коши (см. [3]).

Достаточность. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию (3.15). В (0.6) функция $\Psi_j(z)$ удовлетворяет уравнению (3.14) (см. (3.13)). Поэтому функция $f(z)$ удовлетворяет условиям (0.6) и, согласно теореме 0.1, уравнение (3.1) имеет решение. Теорема 3.1 доказана.

Вернувшись к уравнению (3.14), сделаем замену

$$\omega(z) = \frac{1}{z}\,\Psi(1/z), \qquad |z| < 1. \tag{3.17}$$

Ясно, что $\omega(z)$ аналитична в $|z|<1$ и непрерывно дифференцируема в $|z|\le 1$. Из (3.17) следует, что

$$\Psi(z) = \frac{1}{z}\,\omega(1/z), \qquad |z| > 1. \tag{3.18}$$

$$\Psi'(z) = -\frac{1}{z^2}\,\omega(1/z) - \frac{1}{z^3}\,\omega'(1/z). \tag{3.19}$$

Подставляя $\Psi(z)$ и $\Psi'(z)$ из (3.18) и (3.19) в (3.14) и заменив z на $1/z$, получим

$$z\,\omega'(z) - \gamma_{n-1}(z)\,\omega(z) = \delta_{n-2}(z), \qquad |z| < 1, \tag{3.20}$$

где $\gamma_{n-1}(z) = n - 1 + z^{n-1}P_{n-1}(1/z)$, а $\gamma_{n-2}(z)$ – полином порядка не выше $n-2$.

Так как $P_{n-1}(0) > 0$, то $\gamma_{n-1}(z)$ – полином порядка не выше $n-2$.

Любую аналитическую в $|z| < 1$ функцию $\omega(z)$, удовлетворяющую уравнению (3.20) с некоторым полиномом $\delta_{n-2}(z)$ порядка не выше $n-2$, назовем решением уравнения (3.20).

Подставляя $\Psi(z)$ из (3.18) в (3.15), получим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.1) :

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\omega(1/z)\,f(z)\,dz = 0, \tag{3.21}$$

где $\omega(z)$ – решение уравнения (3.20). Приведем простой метод решения уравнения (3.20). Пусть

$$\begin{gathered} P_{n-1}(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_{n-1} z^{n-1}, \quad m = n - 1 + c_{n-1}, \\ R_{n-1}(z) = \frac{c_0}{n-1} z^{n-1} + \frac{c_1}{n-2} z^{n-2} + \ldots + c_{n-2}, \quad \omega_0(z) = \exp\left(R_{n-1}(z)\right). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Поскольку $c_0 > 0$, то $R_{n-1}(z)$ – полином порядка $n-1$. В (3.20) положим

$$\omega(z) = \Phi(z)\omega_0(z). \tag{3.23}$$

Тогда имеем

$$z\,\Phi'(z) - m\,\Phi(z) = \frac{\delta_{n-2}(z)}{\omega_0(z)}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть

$$m \neq 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.25}$$

Общее решение уравнения (3.24) является линейной комбинацией $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ..., $\Phi_{n-2}(z)$, где $\Phi_k(z)$ – решение уравнения

$$z\,\Phi_k'(z) - m\,\Phi_k(z) = \frac{z^k}{\omega_0(z)}, \qquad |z| < 1 \quad k = 0, 1, .., n-2. \tag{3.26}$$

Положим

$$\Phi_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}\, z^j. \tag{3.27}$$

$$[\omega_0(z)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\, z^k, \tag{3.28}$$

где

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta^{-k-1}\, [\omega_0(\zeta)]^{-1}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=2} \zeta^{-k-1}\, [\omega_0(\zeta)]^{-1}\, d\zeta. \tag{3.29}$$

Справедливы неравенства Коши

$$|A_k| \le \frac{1}{2^k} \max_{|\zeta|=2} |\omega_0(\zeta)|^{-1} \le \frac{1}{2^k} \exp(B), \tag{3.30}$$

где

$$B = \frac{|c_0|}{n-1}\, 2^{n-1} + \frac{|c_1|}{n-1}\, 2^{n-2} + \ldots + |c_{n-1}|. \tag{3.31}$$

Подставляя $\Phi_k(z)$ и $[\omega_0(z)]^{-1}$ в (3.24), получим

$$c_{kj} = 0, \qquad j = 0, \ldots, k-1, \tag{3.32}$$

$$c_{kj} = \frac{A_{j-k}}{j-m}, \qquad j = k, k+1, \ldots. \tag{3.33}$$

Из (3.33) и (3.30) следует, что в замкнутом круге $|z| \le 1$ ряд (3.27) равномерно сходится как убывающая геометрическая прогрессия. Поэтому необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.21) можно записать в виде

$$\int_{|z|=1} f(z)\, \Phi_k(1/z)\, \omega_0(1/z)\, \frac{dz}{z} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2, \tag{3.34}$$

где $\Phi_k(z)$ – решение уравнения (3.26).

Случай 2. Пусть $m \ge 0$ – целое число. Тогда производная порядка m функции $z\,\Phi'(z) - m\,\Phi(z)$ в точке $z = 0$ равна нулю. Следовательно, для разрешимости уравнения (3.24) необходимо выполнение условия

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\frac{\delta_{n-2}(z)}{\omega_0(z)} \right) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{3.35}$$

Пусть

$$\delta_{n-2}(z) = b_0 + b_1\, z + \ldots + b_{n-2}\, z^{n-2}, \tag{3.36}$$

где $b_0, \ldots, b_{n-2}$ – произвольные постоянные.

Подставляя δ_{n-2} из (3.36) в (3.35), получим

$$\sum_{k=0}^{n-2} b_k\, \alpha_k^{(m)}(0) = 0, \tag{3.37}$$

где

$$\alpha_k(z) = \frac{z^k}{\omega_0(z)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2. \tag{3.38}$$

Для того, чтобы решить уравнение (3.24), нам понадобится следующая

Лемма 3.1.

$$\sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k^{(j)}(0)| \neq 0, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{3.39}$$

Доказательство приведено в конце этого параграфа.

Из (3.39) следует, что одно из чисел $\alpha_k^{(m)}(0)$ $(k = 0, \ldots; m-1)$ не равно нулю. Для определенности, пусть $\alpha_{n-2}^{(m)}(0) \neq 0$. Тогда из (3.37) имеем $b_0 = 0$ при $n = 2$ и

$$b_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-3} b_k\, d_k \quad \text{при} \quad n \geq 3, \tag{3.40}$$

где $d_k = -\dfrac{\alpha_k^{(m)}(0)}{\alpha_{n-2}^{(m)}(0)}$. Итак, в этом случае уравнение (3.24) запишется в виде

$$z\,\Phi'(z) - m\,\Phi(z) = 0 \quad \text{при} \quad n = 2, \tag{3.41}$$

$$z\,\Phi'(z) - m\,\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-3} b_k\,(\alpha_k(z) + d_k\,\alpha_{n-2}(z)) \quad \text{при} \quad n \geq 3. \tag{3.42}$$

Решение уравнения (3.41) имеет вид

$$\Phi(z) = c\,z^m, \tag{3.43}$$

где c – постоянная. Мы ищем частное решение уравнения

$$z\,\Psi_k'(z) - m\,\Psi_k(z) = \alpha_k(z) + d_k\,\alpha_{n-2}(z), \tag{3.44}$$

имеющее вид

$$\Psi_k(z) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq m}} \alpha_{kj}\, z^j. \tag{3.45}$$

Коэффициенты α_{kj} разложения (3.45) можно определить так же, как и в предыдущем случае. Тогда общее решение уравнения (3.42) примет вид

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-3} b_k \, \Psi_k(z) + c\, z^m. \tag{3.46}$$

Таким образом, в этом случае для разрешимости уравнения (3.21) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|z|=1} f(z)\, \omega_0(1/z)\, z^m \, \frac{dz}{z} = 0, \tag{3.47}$$

$$\int_{|z|=1} \Psi_k(z)\, f(z)\, \omega_0(1/z)\, dz = 0, \quad k = 0, ..., n-3. \tag{3.48}$$

Рассмотрим теперь уравнение (0.1) в общем случае и покажем, что оно можно свести к уравнению (3.1). Согласно предположению имеем $\alpha(0) \neq 0$. Без потери общности можно считать, что $\alpha(0) > 0$.

Положим

$$\varphi(z) = \varphi_0(z)\, \Phi(z), \tag{3.49}$$

где

$$\varphi_0(z) = \exp\left[\int_0^z \frac{1}{\zeta^n}\left(\alpha(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{(k)}(0)\, \frac{z^k}{k!}\right) d\zeta\right]. \tag{3.50}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (3.49) в (0.1), получим

$$z^n\, \Phi'(z) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{(k)}(0)\, \frac{z^k}{k!}\right) \Phi(z) = \frac{f(z)}{\varphi_0(z)}. \tag{3.51}$$

Уравнение (3.51) имеет вид (3.1).

Доказательство леммы 3.1. Пусть $\omega_0(z)$ и $\alpha_k(z)$ определены формулами (3.22) и (3.38), соответственно. Из формулы Лейбница имеем

$$\alpha_m^{(m)}(0) = \frac{m!}{\omega_0(0)} \neq 0.$$

Следовательно, (3.39) выполняется для $m \leq n-2$. Пусть $m \geq n-1$ и

$$\sum_{k=0}^{n-2} \left|\alpha_k^{(m)}(0)\right| = 0. \tag{3.52}$$

Это означает, что

$$\alpha_k^{(m)}(0) = 0, \qquad k = 0, ..., n-2. \tag{3.53}$$

Для функции (3.38) формула Лейбница дает

$$\alpha_k^{(m)}(0) = \frac{m!}{(m-k)!}\,\alpha_0^{(m-k)}(0), \qquad k = 0, ..., n-2. \tag{3.54}$$

Из (3.53) и (3.54) имеем

$$\alpha_0^{(m-k)}(0) = 0, \qquad k = 0, ..., n-2. \tag{3.55}$$

Из (3.22) и (3.38)

$$\alpha_0(z) = \exp\left(R_{n-1}(z)\right), \qquad \alpha_0'(z) = \alpha_0(z)\,R_{n-1}'(z), \tag{3.56}$$

$$\alpha_0^{(m+1)}(z) = \frac{d^m}{dz^m}\left(\alpha_0(z)\,R_{n-1}'(z)\right). \tag{3.57}$$

Так как $R_{n-1}'(z)$ – полином порядка $n-2$, то используя формулу Лейбница в (3.57) и учитывая (3.55), получим

$$\alpha_0^{(m+1)}(0) = 0. \tag{3.58}$$

Аналогично получим $\alpha_0^{(m+2)}(0) = 0$. Наконец, имеем

$$\alpha_0^{(j)}(0) = 0, \qquad j = m-n+2, m-n+3, ... \tag{3.59}$$

Следовательно, функция $\alpha_0(z)$ – полином, что противоречит формуле (3.56). Это противоречие доказывает формулу (3.39) для $j = n-1, n, ...$ Лемма 3.1 доказана.

§4. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Если условия (0.3) и (0.4) заменить на

$$\beta^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ..., \nu, \qquad \beta^{(\nu+1)}(0) \neq 0 \tag{4.1}$$

для некоторого натурального ν, то получим так называемый исключительный случай уравнения (0.1). Снова $n \geq 2$ натурально и $\alpha(0) \neq 0$.

Теорема 4.1. *Если* $q = \dfrac{n-1}{\nu}$ *– натуральное число и*

$$\frac{\alpha(0)}{q}\left[\frac{\beta^{(\nu+1)}(0)}{(\nu+1)!}\right]^q = 1, \tag{4.2}$$

то однородное уравнение (0.1) имеет единственное линейно независимое решение.

Доказательство. Пусть уравнение

$$z^n\,\varphi'(z)-\alpha(z)\,\varphi(\beta(z))=0,\qquad |z|<1 \tag{4.3}$$

имеет ненулевое решение $\varphi(z)$. Подставляя $z=0$ в (4.3), получим $\varphi(0)=0$. Следовательно

$$\varphi(z)=z^m\,\varphi_0(z), \tag{4.4}$$

где m – натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и $\varphi_0(0)\neq 0$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.4) в (4.3), получим

$$z^{n+m}\,\varphi_0'(z)+m\,z^{m+n-1}\,\varphi_0(z)-\alpha(z)\,\beta^m(z)\,\varphi_0(\beta(z))=0,\qquad |z|<1. \tag{4.5}$$

Из (4.1) следует, что

$$\beta(z)=\beta_0(z)\,z^{\nu+1}, \tag{4.6}$$

$$\beta^m(z)=\beta_0^m(z)\,z^{m(\nu+1)}, \tag{4.7}$$

где $\beta_0(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и

$$\beta_0(0)=\frac{\beta^{(\nu+1)}(0)}{(\nu+1)!}\neq 0. \tag{4.8}$$

Подставляя $\beta^m(z)$ из (4.7) в (4.5) и разделив обе части (4.5) на $z^{m(\nu+1)}$, получим

$$z^{n-m\,\nu-1}\,(z\,\varphi_0'(z)+m\,\varphi_0(z))=\alpha(z)\,\beta_0^m(z)\,\varphi_0(\beta(z)),\qquad |z|<1,\quad |z|\neq 0. \tag{4.9}$$

Так как $\alpha(0)\neq 0$, $\beta_0(0)\neq 0$, $\varphi_0(0)\neq 0$, $\beta(0)=0$, то из (4.9) имеем

$$n-m\nu-1=0, \tag{4.10}$$

$$m=\frac{n-1}{\nu}=q. \tag{4.11}$$

Следовательно, q – натуральное число. Подставляя m из (4.11) в (4.9), получим

$$z\,\varphi_0'(z)+q\,\varphi_0(z)=\alpha(z)\,\beta_0^q(z)\,\varphi_0(\beta(z)),\qquad |z|<1. \tag{4.12}$$

Переходя к пределу в (4.12) при $z \to 0$ и учитывая, что $\beta(0) = 0$, $\varphi_0(0) \neq \neq 0$, получим (4.2). Пусть q – натуральное число и выполнено условие (4.2). Представим решение уравнения (4.12) в виде

$$\varphi_0(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{\rho-1} z^{\rho-1} + z^\rho \varphi_1(z), \tag{4.13}$$

где ρ – некоторое натуральное число, c_0, c_1, ...,$c_{\rho-1}$ – постоянные, а $\varphi_1(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Подставляя $\varphi_0(z)$ из (4.13) в (4.12), получим

$$z^{\rho+1} \varphi_1'(z) + (q+\rho) z^\rho \varphi_1(z) - \alpha(z) \beta_0^q(z) \beta^\rho(z) \varphi_1(\beta(z)) = \Phi(z), \qquad |z| < 1, \tag{4.14}$$

где

$$\Phi(z) = \alpha(z) \beta_0^q(z) \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k \beta^k(z) - \sum_{k=0}^{\rho-1} (k+q) c_k z^k. \tag{4.15}$$

Производные (4.14) до порядка $\rho - 1$ в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, для разрешимости уравнения (4.14) относительно $\varphi_1(z)$ нобходимо выполнение условия

$$\Phi^{(j)}(0) = 0, \qquad j = 0, 1, ..., \rho - 1. \tag{4.16}$$

Из (4.2) следует равенство (4.16) для $j = 0$. Подставляя $\Phi(z)$ из (4.15) в (4.16) при $k = 1, ..., \rho - 1$, получим

$$j! (j+q) c_j - \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{jk} c_k = 0, \qquad j = 1, ..., \rho - 1, \tag{4.17}$$

где

$$\gamma_{jk} = \omega_k^{(j)}(0), \qquad \omega_k(z) = \alpha(z) \beta_0^q(z) \beta^k(z). \tag{4.18}$$

Система уравнений (4.17) для всякого c_0 имеет единственное решение

$$c_j = b_j c_0, \qquad j = 1, ..., \rho - 1, \tag{4.19}$$

где b_j – некоторые постоянные.

Подставляя c_j из (4.19) в (4.15), получим

$$\Phi(z) = c_0 \Phi_0(z), \tag{4.20}$$

где $\Phi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условию (4.16).

Разделив обе части (4.14) на z^ρ и учитывая формулы (4.6), (4.20), получим

$$z\,\varphi_1'(z) + (q+\rho)\,\varphi_1(z) - \alpha_0(z)\,\varphi_1(\beta(z)) = c_0\,\Phi_1(z), \tag{4.21}$$

где $\Phi_1(z) = \Phi_0(z)\,z^{-\rho}$, $\alpha_0(z) = \alpha(z)\,\beta_0^{q+\rho}(z)\,z^{\nu\,\rho}$.

Поскольку $|\beta(z)| \leq 1$ для $|z| \leq 1$, то

$$\|\beta_0\| = \max_{|z|=1}\left|\frac{\beta(z)}{z^{\nu+1}}\right| = \|\beta\| \leq 1, \quad \|\alpha_0\| \leq \|\alpha\|. \tag{4.22}$$

Пусть

$$\frac{\|\alpha\|}{q+p} < 1. \tag{4.23}$$

Докажем, что условие (4.23) обеспечивает однозначную разрешимость уравнения (4.21) с любой правой частью. Пусть $\Psi_1(z)$ – решение уравнения (4.21) при $c_0 = 1$. Тогда оно определяется формулой

$$\varphi_1(z) = c_0\,\Psi_1(z). \tag{4.24}$$

Из формул (4.4), (4.13) и (4.24) имеем

$$\varphi(z) = c_0\,z^m\,\left(1 + b_1\,z + \ldots + b_{\rho-1}\,z^{\rho-1} + z^\rho\,\Psi_1(z)\right). \tag{4.25}$$

Таким образом, однородное уравнение (4.3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда q – натуральное число и имеет место условие (4.2). Тогда число лиейно независимых решений равно 1. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (0.1) в исключительном случае. Представим решение в виде

$$\varphi_0(z) = c_0 + c_1\,z + \ldots + c_{m-1}\,z^{m-1} + z^m\,\varphi_0(z), \tag{4.26}$$

где c_0, c_1, ... c_{m-1} – комплексные постоянные, m – натуральное число, $\varphi_0(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и

$$m \geq q, \quad m > \|\alpha\|, \quad q = \frac{n-1}{\nu}. \tag{4.27}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.26) в уравнение (0.1), получим

$$z^{m+n}\,\varphi_0'(z) + m\,z^{m+n-1}\,\varphi_0(z) - \alpha(z)\,\beta^m(z)\,\varphi_0(\beta(z)) = F(z), \tag{4.28}$$

где

$$F(z) = f(z) + \alpha(z) \sum_{k=0}^{m-1} c_k \beta^k(z) - \sum_{k=0}^{m-1} k c_k z^{k+n-1}. \qquad (4.29)$$

Из условия $m \geq q$ следует, что производные до порядка $n+m-2$ левой части (4.29) в точке $z = 0$ равны нулю. Следовательно, этому условию должна удовлетворять функция $F(z)$, т.е.

$$F^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., m+n-2. \qquad (4.30)$$

Подставляя $F(z)$ из (4.29) в (4.30), получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} A_{jk} c_j = f^{(j)}(0), \qquad j = 0, ..., m+n-2, \qquad (4.31)$$

где $\Psi_k(z) = \alpha(z)\,\beta^k(z) - k z^{k+n-1}$ и

$$A_{jk} = \Psi_k^{(j)}(0). \qquad (4.32)$$

Пусть постоянные c_0, c_1, ... c_{m-1} удовлетворяют системе (4.31). Разделив обе части (4.28) на z^{m+n-1}, получим

$$z\,\varphi_0'(z) + m\,\varphi_0(z) - \alpha_0(z)\,\varphi_0(\beta(z)) = F_0(z), \qquad (4.33)$$

где

$$F_0(z) = \frac{F(z)}{z^{m+n-1}}, \qquad \alpha_0(z) = \alpha(z)\, z^{m\nu+1-n}\, \beta_0^m(z). \qquad (4.34)$$

Из соотношений (4.22), (4.27) и (4.30) следует, что функции $\alpha_0(z)$ и $F_0(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$ и

$$\|\alpha_0\| = \|\alpha\|. \qquad (4.35)$$

Теперь докажем, что уравнение (4.33) имеет единственное решение. Обозначим

$$z\,\varphi_0'(z) + m\,\varphi_0(z) = \Psi(z). \qquad (4.36)$$

Имеем

$$\frac{d}{dz}\left(z^m\,\varphi_0(z)\right) = z^{m-1}\,\Psi(z), \qquad (4.37)$$

$$\varphi_0(z) = z^{-m} \int_0^z \zeta^{m-1}\,\Psi(\zeta)\,d\zeta, \qquad (4.38)$$

$$\varphi_0(\beta(z)) = \beta^{-m} \int_0^{\beta(z)} \zeta^{m-1}\, \Psi(\zeta)\, d\zeta. \tag{4.39}$$

Так как

$$\lim_{z\to 0} \left[z^{-m} \int_0^z \zeta^{m-1}\, \Psi(\zeta)\, d\zeta \right] = \frac{\Psi(0)}{m}, \tag{4.40}$$

то (4.38) и (4.39) аналитичны в круге $|z| < 1$. Уравнение (4.33) запишется в виде

$$\Psi(z) = K_0(\Psi) + F_0(z), \tag{4.41}$$

где

$$K_0(\Psi) = \frac{\alpha_0(z)}{\beta^m(z)} \int_0^{\beta(z)} \zeta^{m-1}\, \Psi(\zeta)\, d\zeta. \tag{4.42}$$

Из (4.35) и (4.42) имеем

$$|K_0(\Psi)| \le \frac{||\alpha||}{m} ||\Psi||, \qquad |z| \le 1. \tag{4.43}$$

Из неравенств (4.27) и (4.43) следует, что норма оператора K_0 меньше 1. Таким образом, уравнение (4.41) имеет единственное решение и оно определяется рядом Неймана

$$\Psi(z) = F_0(z) + K_0(F_0) + K_0^2(F_0) + \ldots. \tag{4.44}$$

Итак, мы получили следующие результаты.

Теорема 4.2. *Общее решение $\varphi(z)$ уравнения (0.1) определяется формулами (4.26), (4.38) и (4.44), где c_0, c_1, ... c_{m-1} – общее решение алгебраического уравнения (4.31).*

Следствие 4.1. *Уравнение (0.1) для заданной правой части $f(z)$ имеет решение тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений (4.31) для этой же функции $f(z)$ имеет решение, причем числа линейно независимых решений однородного уравнения (0.1) и однородной системы уравнений (4.31) (при $f \equiv 0$) совпадают.*

Следствие 4.2. *Если q – натуральное число и имеет место условие (4.2), то однородная система уравнений (4.31) (при $f \equiv 0$) имеет единственное линейно независимое решение и $\mathrm{rank}\,||A_{jk}|| = m - 1$. В остальных случаях однородное уравнение (4.31) имеет только нулевое решение и $\mathrm{rank}\,||A_{jk}|| = m$.*

Следствие 4.3. *Уравнение (0.1) имеет решение тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет линейно независимым условиям $\sum\limits_{k=0}^{m+n-2} b_{jk} f^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, ..., k_0$, где b_{jk} – некоторые постоянные, зависящие только от n и производных функций $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ до порядка $m+n-2$ в точке $z=0$, причем $k_0 = n$, если однородное уравнение имеет только нулевое решение и $k_0 = n-1$ в противном случае.*

§5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Пусть D^+, D^- и Γ – те же, что и в начале этой работы. Рассмотрим уравнение

$$\alpha(z)\,\varphi'(z) - \beta(z)\,\varphi(z) = f(z), \qquad z \in D^+, \tag{5.1}$$

где $\varphi(z)$ – искомая аналитическая функция в D^+. Предполагаем, что $\alpha(z)$, $\beta(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера в замкнутой области $\overline{D^+} = D^+ \bigcup \Gamma$ и $\alpha(z) \neq 0$ при $z \in \Gamma$. Без потери общности можно предположить, что $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ не имеют общих нулей в области D^+. Если $\alpha(z) \neq 0$ при $z \in \overline{D^+}$, то решение уравнения (5.1) принимает вид

$$\varphi(z) = \Phi(z) + c\,\Psi(z), \tag{5.2}$$

где c – произвольная постоянная, а

$$\Psi(z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} \frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)}\,d\zeta\right), \qquad \Phi(z) = \Psi(z)\int_{z_0}^{z} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\alpha(\zeta)\,\Psi(\zeta)}. \tag{5.3}$$

1. Если функция $\alpha(z)$ имеет нули в области D^+, то существуют функции $f(z)$, для которых уравнение (5.1) не имеет решений. Более того, функция $\varphi(z) = \Phi(z) + c\,\Psi(z)$, вообще говоря, не аналитична в D^+.

Сначала рассмотрим однородное уравнение

$$\alpha(z)\,\varphi_0'(z) - \beta(z)\,\varphi_0(z) = 0, \qquad z \in D^+. \tag{5.4}$$

Пусть $z_1, ..., z_m$ – нули функции $\alpha(z)$ в области D^+, $n_1, ..., n_m$ – их кратности. Так как функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ не имеют общих нулей, то

$$\beta(z_k) \neq 0, \qquad k = 1, ..., m. \tag{5.5}$$

При $n_j = 1$ $(j = 1, ..., m)$ обозначим

$$b_k = \frac{\beta(z_k)}{\alpha'(z_k)}, \qquad k = 1, 2, ..., m. \tag{5.6}$$

Теорема 5.1. *Если $n_j = 1$ и b_j – натуральные числа ($j = 1, \dots, m$), то уравнение (5.4) имеет одно линейно независимое решение. В остальных случаях это уравнение имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть уравнение (5.4) имеет ненулевое решение $\varphi_0(z)$. Ясно, что

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\,(z - z_1)^n, \qquad \alpha(z) = \alpha_0(z)\,(z - z_1)^{n_1}, \tag{5.7}$$

где $\varphi_1(z)$, $\alpha_0(z)$ аналитичны в D^+, n и n_1 – натуральные числа и

$$\alpha_0(z_1) \neq 0, \qquad \varphi_1(z_1) \neq 0. \tag{5.8}$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $\alpha(z)$ из (5.7) в (5.4) и разделив обе части на $(z - z_1)^n$, получим

$$\alpha_0(z)\,(z-z_1)^{n_1}\,\varphi_1'(z) + n\,\alpha_0(z)\,(z-z_1)^{n_1-1}\varphi_1(z) - \beta(z)\,\varphi_1(z) = 0, \qquad z \in D^+. \tag{5.9}$$

Подставляя $z = z_1$ в (5.9), получим

$$\beta(z_1)\,\varphi_1(z_1) = 0 \quad \text{при} \quad n_1 \geq 2, \tag{5.10}$$

$$(n\,\alpha_0(z_1) - \beta(z_1))\,\varphi_1(z_1) = 0 \quad \text{при} \quad n_1 = 1. \tag{5.11}$$

Так как $\beta(z_1) \neq 0$, $\varphi_1(z_1) \neq 0$ и $\alpha_0(z_1) \neq 0$, то из (5.10), (5.11) имеем

$$n_1 = 1, \tag{5.12}$$

$$n = \frac{\beta(z_1)}{\alpha_0(z_1)} \neq 0. \tag{5.13}$$

Из (5.12) и второго равенства (5.7) получим

$$\alpha'(z_1) = \alpha_0(z_1). \tag{5.14}$$

Из (5.6), (5.13) и (5.14) имеем

$$n = b_1 \neq 0. \tag{5.15}$$

Следовательно, $n_1 = 1$ и $b_1 \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом докажем, что $n_j = 1$ и b_j – натуральные числа для всех индексов j. Таким образом, условия теоремы 5.1

необходимы для существования ненулевого решения уравнения (5.4). Обратно, в этих условиях имеем

$$\frac{\beta(z)}{\alpha(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{z - z_k} + \gamma(z), \tag{5.16}$$

где $\gamma(z)$ – аналитична в D^+.

Следовательно, уравнение (5.4) примет вид

$$\varphi_0'(z) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{z - z_k} + \gamma(z)\right) \varphi_0(z), \qquad z \in D^+. \tag{5.17}$$

Общее решение уравнения (5.17) определяется формулой

$$\varphi_0(z) = c\,(z - z_1)^{b_1} \ldots (z - z_m)^{b_m} \exp\left(\int_0^z \gamma(\zeta)\,d\zeta\right), \tag{5.18}$$

где c – постоянная.

Таким образом, условия теоремы 5.1 необходимы и достаточны для существования ненулевого решения уравнения (5.4). В этих условиях уравнение имеет единственное линейно независимое решение. Теорема 5.1 доказана.

2. В этом пункте мы получим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (5.1). Для этого сначала рассмотрим частный случай этого уравнения:

$$P_n(z)\,\varphi'(z) - Q_{n-1}(z)\,\varphi(z) = g(z), \quad z \in D^+, \tag{5.19}$$

где $P_n(z)$ – полином порядка n, все корни которого находятся в D^+, $Q_{n-1}(z)$ – полином порядка не выше $n-1$, $g(z)$ – заданная аналитическая функция в D^+, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}^+$.

Наряду с уравнением (5.19) рассмотрим уравнение

$$P_n(z)\,\Psi'(z) + (Q_{n-1}(z) + P_n'(z))\;\Psi(z) = \omega_{n-2}(z), \qquad z \in D^-, \tag{5.20}$$

где $\omega_{n-2}(z)$ – полином порядка не выше $n-2$.

Мы ищем решение уравнения (5.20) в классе аналитических в D^- функций, исчезающих на бесконечности и удовлетворяющих уравнению (5.20) при некотором полиноме $\omega_{n-2}(z)$ порядка не выше $n-2$.

Теорема 5.2. *Уравнение (5.19) имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\Gamma} g(z)\,\Psi(z)\,dz = 0, \tag{5.21}$$

где $\Psi(z)$ решение уравнения (5.20).

Теорема 5.3. *Число линейно независимых решений уравнения (5.20) равно $n-1+\nu$, где ν – число линейно независимых решений однородного уравнения (5.19).*

Доказательства теорем 5.2 и 5.3 опускаются, так как они аналогичны доказательствам теорем 0.1 и 3.1.

Согласно теореме 5.1 число ν линейно независимых решений однородного уравнения (5.4) равно 1 или 0, в зависимости от того, выполняются или нет условия теоремы 5.1. Уравнение (5.20) можно решить аналогично уравнению (3.14).

Теперь покажем, что общий случай уравнения (5.1) можно свести к решению уравнения (5.19). Обозначим через $g_k(z)$ главную часть функции

$$\delta(z) \equiv \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$$

в точке z_k $(k=1,...,m)$, а через $\gamma(z)$ функцию

$$\gamma(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} - \sum_{k=1}^{m} g_k(z). \tag{5.22}$$

Функция $\gamma(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в $\overline{D}^+$. Пусть

$$\Psi_0(z) = \exp\left(\int_0^z \gamma(\zeta)\,d\zeta\right).$$

Делая в (5.1) замену

$$\varphi(z) = \Psi_0(z)\,\Phi(z),$$

получим уравнение вида (5.19) относительно функции $\Phi(z)$. Следовательно, можно определить также необходимое и достаточное условие на функцию $f(z)$, обеспечивающее разрешимость уравнения (5.1). Тогда общее решение уравнения (5.1) имеет вид $\varphi(z) = \omega(z)+\varphi_0(z)$, где $\omega(z)$ – частное его решение, а $\varphi_0(z)$ – общее решение однородного уравнения (5.4). Учитывая теорему 5.1 и формулу (5.18), достаточно найти частное решение уравнения (5.1). Ниже мы укажем простой метод его нахождения.

3. Построим частное решение уравнения (5.1), предполагая, что это уравнение имеет решение для заданного $f(z)$. Пусть $z_1, ..., z_m$ – нули функции $\alpha(z)$ в области D^+, $n_1, ..., n_m$ – их кратности. Пусть L_k – отрезок прямой, соединяющей точки z_k и $\zeta_k \in \Gamma$.

Обозначим $D_0 = D^+ \setminus \{L_1, ..., L_m\}$. Пусть отрезки $L_1, ..., L_m$ не имеют общих точек так, что область D_0 односвязна. Уравнение (5.1) в области D_0 является уравнением без особенностей. Поэтому в этой области общее решение уравнения (5.1) определяется формулой (5.2), где $z_0 \in D_0$ – фиксированная точка, а c – постоянная. В (5.3) интегрирование проводится по кривой, принадлежащей области D_0. Пусть теперь $\varphi(z)$ – решение уравнения (5.1) в области D^+. Ясно, что оно является решением этого уравнения в области D_0. Поэтому оно представляется в виде (5.2) при некотором $c = c_0$, т.е.

$$\varphi(z) = \Phi(z) + c_0\,\Psi(z). \tag{5.23}$$

Следовательно, вопрос сводится к определению постоянной c_0. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть условия теоремы 5.1 выполнены. Тогда $\Psi(z)$ определяется формулой (5.18) при $c = 1$. Поэтому $c_0\,\Psi(z)$ является решением однородного уравнения (5.1). Отсюда следует, что функция (5.23) является решением неоднородного уравнения (5.1) при произвольной постоянной c_0.

Случай 2. Пусть $n_1 = n_2 = ... = n_m = 1$ и одно из чисел b_k – целое отрицательное. Пусть для определенности $k = 1$. Тогда точка z_0 является полюсом для функции $\Psi(z)$. Напомним, что формула (5.23) является частным решением уравнения (5.1) в области D^+. Разделив обе части уравнения (5.23) на $\Psi(z)$ и переходя к пределу при $z \to z_1$, получим

$$c_0 = \int_{z_1}^{z_0} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\alpha(\zeta)\,\Psi(\zeta)}. \tag{5.24}$$

Так как точка z_1 является простым нулем функции $\alpha(z)$ и полюсом функции $\Psi(z)$, то подынтегральное выражение в (5.24) является аналитической функцией в окрестности z_1. В (5.24) интегрирование идет от z_1 до z_0 по гладкой кривой, принадлежащей области D_0.

Случай 3. Пусть $n_1 = n_2 = ... = n_m = 1$ и одно из чисел b_k не является целым. Пусть $k = 1$, и пусть ζ_0 – точка на отрезке L_1 (отлична от концов L_1). Если $\omega(z)$ аналитична в D_0, то через $\omega^+(\zeta_0)$ и $\omega^-(\zeta_0)$ обозначим пределы $\omega(z)$ при $z \to \zeta_0$ слева и справа отрезка L_1.

Из формулы (5.3) следует, что пределы $\Psi^+(\zeta_0)$, $\Psi^-(\zeta_0)$, $\Phi^+(\zeta_0)$, $\Phi^-(\zeta_0)$ существуют и

$$\Psi^+(\zeta_0) \neq \Psi^-(\zeta_0). \tag{5.25}$$

При получении неравенства (5.25) мы использовали нецелочисленность b_1. Из равенства (5.23) и непрерывности $\varphi(z)$ в точке ζ_0 имеем

$$\Phi^+(\zeta_0) + c_0\,\Psi^+(\zeta_0) = \Phi^-(\zeta_0) + c_0\,\Psi^-(\zeta_0). \tag{5.26}$$

Отсюда

$$c_0 = \frac{\Phi^-(\zeta_0) - \Phi^+(\zeta_0)}{\Psi^+(\zeta_0) - \Psi^-(\zeta_0)}.$$

Случай 4. Пусть функция $\alpha(z)$ имеет кратные корни в области D^+, и пусть, для определенности, точка z_1 является кратным корнем. Пусть в (5.3) точка z_0 выбрана так, что $(z_1, z_0) \in D_0$ и

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\frac{\beta_1(z_1)}{\alpha^{(n_1)}(z_1)} - n_1 \arg(z_1 - z_0) < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, аналогично формуле (3.7), можно показать, что в формуле (5.23) постоянная c_0 определяется формулой (5.24), где интегрирование проводится по отрезку $[z_1, z_0]$.

§6. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В круге $|z| < 1$ рассмотрим следующую задачу Пуанкаре для уравнения Лапласа.

Задача А.

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0, \qquad |z| < 1, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} + P(x, y)\,u(z) = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.2}$$

где $z = x + iy$, $P(x, y)$ – заданный полином относительно переменных x и y с вещественными коэффициентами, $g(z)$ – заданная вещественная функция на окружности $|z| = 1$, $u(x, y)$ – искомое вещественное решение, $\dfrac{\partial u(z)}{\partial r}$ – производная функции $u(z)$ по направлению радиус-вектора в точке z ($|z| = 1$). Найти вещественное решение $u(z)$, непрерывно дифференцируемое в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Задача А называется однородной, если $g \equiv 0$.

Пусть $|z| = 1$. Тогда

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad y = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Поэтому на окружности $|z| = 1$

$$P(x, y) = P_0(z) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k z^k + \frac{\overline{a}_k}{z^k}\right), \tag{6.3}$$

где a_0, a_1, ..., a_{n-1} – постоянные, a_0 вещественно, $\overline{a}_k$ – комплексно сопряженное к a_k, $n \geq 2$ – натуральное число, $a_{n-1} \neq 0$.

Задачу Пуанкаре можно свести к сингулярному интегральному уравнению (см. [2]). Здесь мы указываем эффективный метод решения задачи А.

Решение уравнения (6.1) можно представить в виде ([3])

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{n-2} c_k z^k + z^{n-1}\varphi(z)\right], \tag{6.4}$$

где c_0, ..., c_{n-2} – постоянные, c_0 – вещественно, $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывно дифференцируема в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

Подставляя $u(x, y)$ из (6.4) в граничное условие (6.2), получим

$$\operatorname{Re}\left[z^n \varphi'(z) + Q(z)\varphi(z) + \sum_{k=1}^{n-2} k\, c_k\, z^k + P_0(z)\sum_{k=0}^{n-2} c_k\, z^k\right] = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.5}$$

где

$$Q(z) = (n-1)\, z^{n-1} + z^{n-1} P_0(z). \tag{6.6}$$

Из (6.3) следует, что функция $Q(z)$ – полином порядка $2n - 2$. Обозначим

$$c_0 = \alpha_0, \quad \operatorname{Re} c_k = \alpha_k, \quad \operatorname{Im} c_k = \beta_k \qquad k = 1, ..., n-2. \tag{6.7}$$

Пусть b – комплексная постоянная, а k – натуральное число. Тогда

$$\operatorname{Re}\frac{b}{z^k} = \operatorname{Re}\overline{b}\, z^k \quad \text{при} \quad |z| = 1, \tag{6.8}$$

и соотношение (6.5) запишется в виде

$$\operatorname{Re}\left[z^n\varphi'(z)+Q(z)\varphi(z)+\sum_{j=0}^{n-2}a_j\,Q_{1j}(z)+\sum_{k=1}^{n-2}\beta_k\,Q_{2k}(z)\right]=g(z),\qquad |z|=1,\tag{6.9}$$

где $Q_{1j}(z)$ и $Q_{2j}(z)$ – полиномы порядка не выше $2n-2$.

Функция в квадратных скобках в (6.9) аналитична в $|z|<1$ и непрерывна в $|z|\le 1$. Поэтому она определяется формулой Шварца (см. [3])

$$z^n\varphi'(z)+Q(z)\varphi(z)+\sum_{j=0}^{n-2}a_j\,Q_{1j}(z)+\sum_{k=1}^{n-2}\beta_k\,Q_{2k}(z)=F(z)+i\beta_0,\qquad |z|<1,\tag{6.10}$$

где β_0 – вещественная постоянная и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,d\theta,\qquad \zeta=e^{i\theta}.\tag{6.11}$$

Уравнение (6.10) можно записать также в виде

$$z^n\varphi'(z)+Q(z)\varphi(z)=f(z),\qquad |z|<1,\tag{6.12}$$

где

$$f(z)=F(z)+i\beta_0-\sum_{j=0}^{n-2}a_j\,Q_{1j}(z)-\sum_{k=1}^{n-2}\beta_k\,Q_{2k}(z).\tag{6.13}$$

Так как $n\ge 2$, то

$$Q(0)=\overline{a}_{n-2}\ne 0.\tag{6.14}$$

В §2 мы показали, что для разрешимости уравнения (6.12) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|z|=1}f(z)\,\Psi_j(z)\,dz=0,\qquad j=1,\dots,n-1,\tag{6.15}$$

где $\Psi_j(z)$ – линейно независимые аналитические функции в $|z|>1$, исчезающие на бесконечности и не зависящие от функции $f(z)$ (см. §3).

Условия (6.15) можно записать в виде

$$\operatorname{Re}\left[\int_{|z|=1}f(z)\,\Psi_j(z)\,dz\right]=0,\quad \operatorname{Im}\left[\int_{|z|=1}f(z)\,\Psi_j(z)\,dz\right]=0,\qquad j=1,\dots,n-1.\tag{6.16}$$

Подставляя $f(z)$ из (6.13) в (6.16), получим

$$AC = b. \tag{6.17}$$

где C – $(2n-2)$–мерный вектор–столбец с элементами $\alpha_0, ..., \alpha_{n-2}, \beta_0, ..., \beta_{n-2}$, A – квадратная матрица порядка $2n-2$ с вещественными элементами, а b – $(2n-2)$–мерный вектор–столбец с вещественными элементами. Матрица A не зависит от C или $f(z)$, а вектор b имеет вид

$$b = \int_0^{2\pi} \Psi(t)\, g(t)\, d\theta, \qquad t = e^{i\theta}, \tag{6.18}$$

где $\Psi(t)$ – $(2n-2)$–мерный вектор-столбец, элементы которого – известные вещественные функции на окружности $|z| = 1$.

Таким образом, в системе (6.17) матрица A и вектор b известны, а C – искомый $(2n-2)$–мерный вектор.

Теорема 6.1. *Для однозначной разрешимости задачи A необходимо выполнение условия*

$$\det A \neq 0. \tag{6.19}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (6.19). Тогда из (6.17) получим

$$C = A^{-1} b, \tag{6.20}$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A.

Подставляя C из (6.20) в левую часть (6.13), мы определим аналитическую функцию $f(z)$, удовлетворяющую (6.15). Поэтому, согласно теореме 0.1, уравнение (6.12) имеет единственное решение, приведенное в §3. Подставляя постоянные $c_0 = \alpha_0$ и $c_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, ..., n-2)$, а также функцию $\varphi(z)$ в (6.4), мы находим решение задачи A. Пусть

$$\det A = 0. \tag{6.21}$$

Тогда однородная система (6.17) (при $b = 0$) имеет ненулевое решение. Используя это решение, аналогично построим ненулевое решение однородной задачи A (при $g \equiv 0$). Следовательно, условие (6.19) необходимо и достаточно для однозначной разрешимости задачи A. Теорема 6.1 доказана.

В монографии [2] показано, что задача A фредгольмова. Поэтому справедлива следующая

Теорема 6.2. *Если*

$$\operatorname{rang} A = r, \tag{6.22}$$

то однородная задача A имеет ровно $2n - 2 - r$ линейно независимых решений. Для разрешимости неоднородной задачи A необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\Psi_k(t)\,d\theta = 0, \qquad t = e^{i\theta}, \quad k = 1, \dots, 2n - 2 - r,$$

где $\Psi_k(t)$ – некоторые вполне определенные линейно независимые вещественные функции, не зависящие от $g(t)$.

Задача B. Найти вещественную функцию $u(x, y)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad |z| < 1, \tag{6.23}$$

$$\cos n\theta\,\frac{\partial u(z)}{\partial x} + \sin n\theta\,\frac{\partial u(z)}{\partial y} - \alpha_0\,u(z) = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.24}$$

где $\theta = \arg z$, n – целое число, $\alpha_0 \neq 0$ – вещественное число, $g(z)$ – заданная вещественная функция на окружности $|z| = 1$.

Предполагается, что функции $g(z)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и в задаче A. Задача B при $g \equiv 0$ называется однородной.

В [2] выведена явная формула для решения задачи B при $\alpha_0 = 0$.

Наша цель – указать эффективный метод решения этой задачи при $\alpha_0 \neq 0$, получить необходимые и достаточные условия разрешимости на правую часть $g(z)$, а также условия однозначной разрешимости.

Пусть $n \geq 0$. Тогда решение уравнения (6.23) можно представить в виде (см. [3], стр. 202)

$$u(z) = \operatorname{Re}\varphi(z), \tag{6.25}$$

где $\varphi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$, непрерывно дифференцируема в замкнутой области $|z| \leq 1$ и удовлетворяет дополнительному условию

$$\operatorname{Im}\varphi(0) = 0. \tag{6.26}$$

Условие (6.26) обеспечивает единственность представления (6.25). Подставляя $u(z)$ из (6.25) в (6.24), получим

$$\operatorname{Re}\,(z^n\,\varphi'(z) - \alpha_0\,\varphi(z)) = f(z), \qquad |z| = 1. \tag{6.27}$$

или (ср. с (6.1))

$$z^n\,\varphi'(z)-\alpha_0\,\varphi(z)=F(z)+i\beta_0,\qquad |z|<1, \tag{6.28}$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а β_0 – вещественная постоянная.

При $n=0$ из (6.26) и (6.28) имеем

$$\varphi(z)=e^{\alpha_0 z}\int_0^z e^{-\alpha_0\zeta}\,F(\zeta)\,d\zeta+c_0\,e^{\alpha_0 z}-i\,\frac{\beta_0}{\alpha_0}\,(1-e^{\alpha_0 z}), \tag{6.29}$$

где c_0 и β_0 – вещественные постоянные.

Подставляя $\varphi(z)$ из (6.29) в (6.25), получим, что в этом случае однородная задача B имеет два линейно независимых решения, а неоднородная задача B всегда разрешима.

Пусть $n\geq 1$. Подтсавляя в (6.28) $z=0$, получим

$$-\alpha_0\,\varphi(0)=F(0)+i\beta_0. \tag{6.30}$$

Так как α_0, $\varphi(0)$ и $F(0)$ вещественны. то из (6.30) получим $\beta_0=0$. Следовательно, уравнение (6.28) имеет вид

$$z^n\,\varphi'(z)-\alpha_0\,\varphi(z)=F(z),\qquad |z|<1. \tag{6.31}$$

Пусть $\varphi(z)$ – решение уравнения (6.31). Тогда, подставляя $z=0$, получим, что $\varphi(0)$ – вещественно. Поэтому дополнительное условие (6.26) ненеобходимо.

Пусть $n=1$. Тогда уравнение (6.31) примет вид

$$z\,\varphi'(z)-\alpha_0\,\varphi(z)=F(z),\qquad |z|<1. \tag{6.32}$$

Рассмотрим разложения Тейлора

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,z^k, \tag{6.33}$$

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\,z^k, \tag{6.34}$$

где

$$A_k=\frac{1}{k!}\,F^{(k)}(0). \tag{6.35}$$

Подставляя $\varphi(z)$ и $F(z)$ из (6.33) и (6.34) в (6.32), получим

$$c_k = \frac{A_k}{k-\alpha_0}, \qquad k = 0, 1, ..., \quad \text{if} \quad \alpha_0 \neq 1, 2, ... \tag{6.36}$$

Если α_0 натурально, то

$$F^{(\alpha_0)}(0) = 0, \tag{6.37}$$

$$c_k = \frac{A_k}{k-\alpha_0}, \qquad k = 0, 1, ..., \quad k \neq \alpha_0. \tag{6.38}$$

Условие (6.37) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos\alpha_0\theta\,d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f(t)\,\sin\alpha_0\theta\,d\theta = 0, \quad t = e^{i\theta}. \tag{6.39}$$

Итак, мы получили следующее.

Теорема 6.3. *Для $n = 1$ и $\alpha_0 \neq 1, 2, ...$ задача B однозначно разрешима, если же $n = 1$ и α_0 натурально, то однородная задача B имеет два линейно независимых решения*

$$u_1(z) = Re\, z^{\alpha_0}, \qquad u_2(z) = Im\, z^{\alpha_0},$$

а неоднородная задача B разрешима тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет условиям (6.39).

Уравнение (6.31) при $n \geq 2$ рассмотрено в параграфе 3. Из результатов этого параграфа имеем

Следствие 6.1. Однородная задача B имеет только нулевое решение, а неоднородная задача B разрешима тогда и только тогда, когда $F(z)$ удовлетворяет $n-1$ условиям вида

$$\int_{|z|=1} \Psi_k(z)\,F_0(z)\,dz = 0, \qquad k = 1, ..., n-1,$$

где $\Psi_1(z)$, ..., $\Psi_{n-1}(z)$ – линейно независимые аналитические функции в области $|z| > 1$, исчезающие на бесконечности (см. §3).

Пусть $n = -m$, где m натурально. Тогда решение уравнения (6.31) представляется в виде

$$u(z) = \mathrm{Re}\,(c_0 + c_1 z + ... + c_m z^m + \varphi_0(z)), \tag{6.40}$$

где c_0, c_1, ..., c_m – постоянные, c_0 вещественно, а $\varphi_0(z)$ аналитично в круге $|z| > 1$, непрерывно дифференцируемо в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0^{(k)}(0) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., m. \tag{6.41}$$

Подставляя $u(z)$ из (6.40) в (6.24) и учитывая соотношение (6.8), получим

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{z^m}\,\varphi_0'(z) - \alpha_0\,\varphi_0(z) + \sum_{k=0}^{m}\left(k\,\bar{c}_k\,z^{m+1-k} - \alpha_0\,c_k\,z^k\right)\right] = g(z), \qquad |z| = 1. \tag{6.42}$$

Так как функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям (6.41), то функция в квадратных скобках аналитична в $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Поэтому из граничного условия (6.42) эта функция определяется формулой Шварца

$$\frac{1}{z^m}\,\varphi_0'(z) - \alpha_0\,\varphi_0(z)\sum_{k=0}^{m}\left(k\,\bar{c}_k\,z^{m+1-k} - \alpha_0\,c_k\,z^k\right) = F(z) + i\beta_0, \tag{6.43}$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а β_0 – произвольная вещественная постоянная.

Умножая обе части (6.42) на z^m, получим

$$\varphi_0'(z) - \alpha_0\,z^m\,\varphi_0(z) = \Phi(z), \tag{6.44}$$

где

$$\Phi(z) = z^m\left[F(z) + i\beta_0 - \sum_{k=0}^{m}\left(k\,\bar{c}_k\,z^{m+1-k} - \alpha_0\,c_k\,z^k\right)\right]. \tag{6.45}$$

Из (6.41) при $k = 0$ имеем

$$\varphi_0(0) = 0, \tag{6.46}$$

а из (6.44) и (6.46) имеем

$$\varphi_0(z) = \Psi(z)\int_0^z \frac{\Phi(\zeta)}{\Psi(\zeta)}\,d\zeta, \tag{6.47}$$

где

$$\Psi(z) = \exp\left(\alpha_0\,\frac{z^{m+1}}{m+1}\right). \tag{6.48}$$

Из (6.45) следует, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям (6.41). Подставляя $\varphi_0(z)$ из (6.47) в (6.40), получим общее решение задачи B для целых отрицательных значений n, зависящее от $2m+2$ вещественных постоянных. Из вида общего решения следует, что однородная задача B имеет ровно $2m+2$ линейно независимых решений, а соответствующая неоднородная задача всегда разрешима. Таким образом, мы получили следующие теоремы.

Теорема 6.4. *Задача B разрешима при любой правой части $g(z)$ тогда и только тогда, когда*
$n = 1$ и $\alpha_0 \neq 0, 1, \ldots$ или $n \leq 0$.

Теорема 6.5. *Задача B имеет единственное решение при любой правой части $g(z)$ тогда и только тогда, когда*

$$n = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_0 \neq 0, 1, \ldots . \tag{6.49}$$

Теоремы 6.4 и 6.5 при $\alpha_0 = 0$ следуют из результатов работы [2].

Задача C. Рассмотрим следующую задачу :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad |z| < 1, \tag{6.50}$$

$$\cos n\theta \,\frac{\partial u(z)}{\partial x} + \sin n\theta \,\frac{\partial u(z)}{\partial y} - \alpha_0\, u(z^{\nu+1}) = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.51}$$

где α_0, θ, n и $g(z)$ те же, что в задаче B, а ν – натуральное число. При $g \equiv 0$ эта задача называется однородной. При $\nu = 0$ получаем задачу B.

Пусть сначала $n \geq 1$. Решение уравнения (6.50) представим в виде (6.25), где $\varphi(z)$ – аналитическая функция, удовлетворяющая дополнительному условию (6.26).

Подставляя $u(z)$ из (6.25) в граничное условие (6.51), аналогично уравнению (6.31) получим

$$z^n \varphi'(z) - \alpha_0 \varphi(z^{\nu+1}) = F(z), \qquad |z| < 1. \tag{6.52}$$

Отметим, что любое решение уравнения (6.52) удовлетворяет условию (6.26). Обозначим $q = (n-1)/\nu$. Пусть q – натуральное число, $n \geq 2$ и $\alpha_0 = q$. Тогда легко проверить, что функция $\varphi(z) = z^q$ является решением однородного уравнения (6.52).

Пусть $n \geq 2$, тогда, применяя теорему 4.1 и следствие 4.3, получим

Следствие 6.2. Если q – натуральное число и $\alpha_0 = q$, то однородная задача С имеет два линейно независимых решения : $u_1(z) = \operatorname{Re} z^q$, $u_2(z) = \operatorname{Im} z^q$. В остальных случаях однородная задача С имеет только нулевое решение.

Следствие 6.3. Неоднородная задача С разрешима тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\theta}\right) P_j(\theta)\, d\theta = 0, \qquad j = 1, 2, ..., 2k_0,$$

где $P_1(\theta)$, ..., $P_{2k_0}(\theta)$ – линейно независимые тригонометрические функции с вещественными коэффициентами, причем $k_0 = n$ или $k_0 = n - 1$ в зависимости от того, имеет ли однородная задача ненулевое решение или только нулевое.

Пусть теперь $n = 1$. Представим $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta + c, \tag{6.53}$$

где c – постоянная, а $\Psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$.

Подставляя $\varphi(z)$ из (6.53) в (6.52), получим

$$c = -\frac{F(0)}{\alpha_0}, \tag{6.54}$$

$$\Psi(z) - \frac{\alpha_0}{z} \int_0^z \Psi(\zeta)\, d\zeta = \frac{F(z) - F(0)}{z}. \tag{6.55}$$

Уравнение (6.55) изучено в работе [1], где доказана единственность решения. Следовательно, при $n = 1$ задача С однозначно разрешима.

Аналогично можно показать, что при $n \leq 0$ однородная задача С имеет ровно $2 - 2n$ линейно независимых решения, а задача С всегда разрешима.

Теперь сформулируем задачу Пуанкаре, обобщающую задачи А, В и С.

Задача A_0.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \qquad |z| < 1, \tag{6.56}$$

$$P(x, y)\, \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + Q(x, y)\, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - R(x, y)\, u(x, y) = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.57}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ – некоторые полиномы по вещественным переменным x, y с вещественными коэффициентами, а $g(z)$ – задаанная вещественнозначная функция на окружности $|z| = 1$, удовлетворяющая условию Гельдера.

Предполагается, что

$$P^2(x,y) + Q^2(x,y) \neq 0, \qquad |z| = 1. \tag{6.58}$$

Так как $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и $R(x,y)$ – полиномы по x и y, то на окружности $|z| = 1$ имеем

$$P(x,y) + i\,Q(x,y) = \frac{\alpha(z)}{z^n}, \qquad R(x,y) = \frac{\beta(z)}{z^n}, \tag{6.59}$$

где n – неотрицательное число, а $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – полиномы относительно комплексной переменной $z = x + iy$, $\alpha(z) \neq 0$ при $|z| = 1$.

Решение уравнения (6.56) представим в виде (6.25) и подставим в (6.57). Учитывая (6.59), получим

$$\operatorname{Re}\frac{\Phi(z)}{z^n} = g(z), \qquad |z| = 1, \tag{6.60}$$

где

$$\Phi(z) = \alpha(z)\,\varphi'(z) - \beta(z)\,\varphi(z). \tag{6.61}$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в области D^+ и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}^+$. Поэтому из граничного условия (6.60) она определяется формулой (см. [2])

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k\, z^k + z^n\, F(z), \qquad |z| < 1, \tag{6.62}$$

где $F(z)$ определяется формулой (6.11), а c_k $(k = 0, \dots, 2n)$ – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $c_{2n-2-k} = -\overline{c}_k$, $k = 0, \dots, n-1$.

Пусть $c_k = a_k + i\,b_k$ $(k = 0, \dots, 2n-2)$, где a_k и b_k вещественны. Из (6.62) имеем

$$a_{2n-2-k} = -a_k, \qquad b_{2n-k-2} = b_k, \qquad k = 0, \dots, n-1. \tag{6.63}$$

Подставляя $\Phi(z)$ из (6.61) в (6.62) и учитывая (6.63), получим

$$\alpha(z)\,\varphi'(z) - \beta(z)\,\varphi(z) =$$

$$= z^n\, F(z) + i\,b_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\left[a_k\,\left(z^k - z^{2n-2-k}\right) + i\,b_k\,\left(z^k + z^{2n-2-k}\right)\right]. \tag{6.64}$$

Таким образом, решение задачи A_0 сводится к решению дифференциального уравнения (6.64).

ABSTRACT. The paper studies first order differential equations with high order singularities and shifts and derives necessary and sufficient conditions for their solvability. Formulae for solutions are obtained and the results applied in Poincare problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева. "Аналитические решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 33, № 3, стр. 2 — 25, 1998.
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
5. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.
6. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уавнений второго порядка, М., Наука, 1968.

8 декабря 1997

Армянский государственный инженерный университет