АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 3, 1998

В работе рассматриваются интегральные уравнения типа Вольтерра, а также обыкновенные дифференциальные уравнения типа Эйлера. Получены необходимые и достаточные условия существования и единственности аналитических решений этих уравнений. Полученные результаты применяются к исследованию краевой задачи Пуанкаре для правильно эллиптических уравнений второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – единичный круг $|z|<1$ $(z=x+iy)$, Γ – единичная окружность $|z|=1$, $\overline{D}$ – замкнутый круг $|z|\leq 1$. Мы изучаем интегральные уравнения

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^{n_1+1}}\int_0^z t^{n_1}K_1(z,t)\varphi(t)\,dt+f_1(z), \tag{1}$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^{n_2+1}}\int_0^z t^{n_2}K_2(z,t)\overline{\varphi(t)}\,dt+f_2(z), \tag{2}$$

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^{n_1+1}}\int_0^z t^{n_1}K_1(z,t)\varphi(t)\,dt+\frac{1}{z^{n_2+1}}\int_0^z t^{n_2}K_2(z,t)\overline{\varphi(t)}\,dt+f_3(z), \tag{3}$$

где n_1, n_2 – неотрицательные постоянные, K_1, K_2 – функции комплексных переменных z, t, аналитичные в $|z|<1$ и $|t|<1$, непрерывные при $|z|\leq 1$ и $|t|\leq 1$. Во всех трех случаях решение $\varphi(z)$ будем искать в классе аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функций. Черта над комплексным числом (или комплексной функцией) означает переход к комплексно сопряженным величинам.

Если $K_1(0,0)=K_2(0,0)=0$, то уравнения (1) – (3) являются уравнениями Вольтерра и, следовательно, имеют единственное решение (см. [1]). В §1 получено условие однозначной разрешимости уравнений (1) – (3) и указан метод ее решения. В §2 мы рассматриваем аналитические решения уравнений типа Эйлера. В §3 полученные в §1 и §2 результаты применяются к исследованию краевой задачи Пуанкаре для правильно эллиптических уравнений второго порядка.

§1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

1. Обозначим через M_n оператор

$$M_n\varphi = \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^z t^n K_1(z,t)\varphi(t)\, dt,$$

$$||K_1|| = \max_{|z|\le 1, |t|\le 1} |K_1(z,t)|, \quad ||\varphi|| = \max_{|z|\le 1} |\varphi(z)|.$$

Тогда

$$|M_n\varphi| \le \frac{||K_1||}{n+1}\, ||\varphi||. \tag{4}$$

Если $||K_1|| < n_1 + 1$, то уравнение (1) однозначно разрешимо и его можно решить методом последовательных приближений (см. [2])

$$\varphi(z) = f_1(z) + \sum_{j=1}^{\infty} M_{n_1}^j f_1, \tag{5}$$

где M_n^j – j-я степень оператора M_n, т.е. $M_n^{j+1} f = M_n^j M_n f$.

Пусть теперь $||K_1|| \ge n_1 + 1$. Представим функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{m-1} z^{m-1} + z^m \varphi_0(z), \tag{6}$$

где c_k – комплексные постоянные, а $\varphi_0(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (1), получим

$$\begin{gathered} z^m \left[\varphi_0(z) - \frac{1}{z^{n_1+m+1}} \int_0^z t^{n_1+m} K_1(z,t)\varphi_0(t)\, dt\right] = \\ = f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1+k} K_1(z,t)\, dt. \end{gathered} \tag{7}$$

В уравнении (7) искомыми являются аналитическая функция $\varphi_0(z)$ и постоянные $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$. Уравнение (7) можно записать виде

$$z^m[\varphi_0(z) - M_{n_1+m}\varphi_0] = f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z), \tag{8}$$

где

$$F_k(z) = \frac{1}{z^{n_1+k+1}} \int_0^z t^{n_1+k} K_1(z,t)\, dt, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{9}$$

Отметим, что функции $\varphi_0(z) - M_{n_1+m}\varphi_0$ и $F_k(z)$, $k = 0, 1, ..., m-1$ аналитичны в D и непрерывны в $\overline{D}$. Поскольку производные до порядка $m-1$ левой части (8) равны нулю в точке $z = 0$, то для разрешимости уравнения (8) необходимо выполнение условий

$$f_1(0) - c_0 + c_0 F_0(0) = 0, \tag{10}$$

$$f_1^{(j)}(0) - j!c_j + j!c_j F_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} c_k a_{jk} = 0, \quad j = 1, ..., m-1, \tag{11}$$

$$a_{jk} = \psi_k^{(j)}(0), \quad \psi_k(z) = z^k F_k(z).$$

Система (10), (11) однозначно разрешима относительно постоянных c_0, $c_1, ...$, c_{m-1} тогда и только тогда, когда $F_k(0) \neq 1$, $k = 0, 1, ..., m-1$. Из (9) следует, что

$$\frac{K_1(0,0)}{n_1 + k + 1} \neq 1, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{12}$$

Пусть условие (12) выполнено для всех неотрицательных целых k. Тогда система (10), (11) однозначно разрешима. Подставляя решение $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ этой системы в (8), получим

$$\varphi_0(z) = M_{n_1+m}\varphi_0 + f_m(z), \tag{13}$$

где

$$f_m(z) = \frac{1}{z^m}\left[f_1(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z)\right].$$

Из (10) и (11) следует, что $f_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|M_{n_1+m}\varphi_0| \leq \frac{||K_1||}{n_1 + m + 1}\, ||\varphi_0||. \tag{14}$$

Выберем m таким, чтобы $||K_1|| < n_1 + m + 1$. Тогда уравнение (13) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Таким образом, получена

Теорема 1.1. *Если выполнено условие (12) для всех неотрицательных целых чисел k, то уравнение (1) однозначно разрешимо.*

Пусть теперь для некоторого неотрицательного целого числа m_0

$$\frac{K_1(0,0)}{n_1 + m_0 + 1} = 1. \tag{15}$$

Тогда
$$\frac{K_1(0,0)}{n_1+k+1} \neq 1, \quad \text{для} \quad k = 0, 1, ..., \quad k \neq m_0.$$
Поэтому система (10), (11) при $j = 0, 1, ..., m_0 - 1$ однозначно разрешима относительно $c_0, c_1, ..., c_{m_0-1}$. Подставляя $c_0, c_1, ..., c_{m_0-1}$ в уравнение (11) при $j = m_0$, получим
$$f_1^{(m_0)}(0) + \sum_{k=0}^{m_0-1} b_k f^{(k)}(0) = 0, \tag{16}$$
где b_k – некоторые постоянные, не зависящие от $f(z)$. Таким образом, условие (16) необходимо для разрешимости уравнения (1). Покажем, что оно является также достаточным условием разрешимости уравнения (1), а соответствующее однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение.

Пусть выполнено условие (16). Подставляя решение системы (10), (11) в (8), получим уравнение вида (13), однозначно разрешимое относительно аналитической функции $\varphi_0(z)$. Таким образом, условие (16) обеспечивает разрешимость неоднородного уравнения (1).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (1). Из системы (10), (11) получим
$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_k = \alpha_k c, \quad k = m_0, ..., m-1, \tag{17}$$
где α_k – некоторые постоянные, $\alpha_{m_0} = 1$ и c – произвольные комплексные постоянные. Подставляя c_k из (17) в (8) при $f_1 = 0$, получим уравнение виде (13), в котором функцию $f_m(z)$ можно представить в виде $f_m(z) = cg_m(z)$, где g_m – определенная аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция. Решая это уравнение, получим $\varphi_0(z) = c\varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ – решение уравнения (13) с $g_m(z)$ в правой части. Из (6) имеем
$$\varphi(z) = \sum_{k=m_0}^{m-1} c\alpha_k z^k + cz^m \varphi_1(z),$$
где c – произвольная комплексная постоянная. Следовательно, однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение (в поле комплексных чисел). Мы получили следующую теорему.

Теорема 1.2. *Если для некоторого целого неотрицательного числа m_0 имеет место равенство (15), то однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение. Условие (16) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (1).*

2. Рассмотрим уравнение (2). Обозначим через P_n оператор

$$P_n\varphi = \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^z t^n K_2(z,t)\overline{\varphi(t)}\, dt.$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (2), получим

$$z^m \left[\varphi_0(z) - P_{n_2+m}\varphi_0\right] = f_2(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} \overline{c}_k z^k \Phi_k(z), \tag{18}$$

где

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{z^{n_2+k+1}} \int_0^z t^{n_2+k} K_2(z,t)\, dt, \quad k = 0,1,...,m-1. \tag{19}$$

Для разрешимости уравнения (2) необходимо выполнение условий

$$f_2(0) - c_0 + \overline{c}_0\Phi_0(0) = 0, \tag{20}$$

$$f_2^{(j)}(0) - j!c_j + \overline{c}_j\Phi_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} \overline{c}_k b_{jk} = 0, \quad j = 1,...,m-1, \tag{21}$$

$$b_{jk} = \omega_k^{(j)}(0), \quad \omega_k(z) = z^k\Phi_k(z).$$

Для определения постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ получим систему уравнений (20), (21), которая однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$|\Phi_k(0)| \neq 1, \qquad k = 0,1,...,m-1. \tag{22}$$

Из (19) следует, что

$$\Phi_k(0) = \frac{K_2(0,0)}{n_2+k+1}.$$

Поэтому уравнение (22) запишется в виде

$$\frac{|K_2(0,0)|}{n_2+k+1} \neq 1, \quad k = 0,1,...,m-1. \tag{23}$$

Пусть условие (23) выполнено для всех целых неотрицательных k. Решая систему (20), (21) относительно постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ и подставляя в уравнение (18), получим

$$\varphi_0(z) = P_{n_2+m}\varphi_0 + g_m(z), \tag{24}$$

где

$$g_m(z) = \frac{1}{z^m}\left[f_2(z) - \sum_{k=0}^{m-1} \overline{c}_k z^k \Phi_k(z)\right]. \tag{25}$$

Так как постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ удовлетворяют условиям (20), (21), то функция $g_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|P_{n_2+m}\varphi_0| \leq \frac{||K_2||}{n_2+m+1}\,||\varphi_0||.$$

Берем m так, чтобы имело место неравенство $||K_2|| < n_2+m+1$. Тогда уравнение (24) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Получили теорему.

Теорема 1.3. *Если выполнено условие (23) для всех целых неотрицательных k, то уравнение (2) однозначно разрешимо.*

Рассмотрим случай, когда для некоторого целого неотрицательного m_0 имеет место равенство

$$\frac{|K_2(0,0)|}{n_2+m_0+1} = 1. \tag{26}$$

Покажем, что в этом случае нарушается однозначная разрешимость уравнения (2). Предварительно рассмотрим уравнение

$$c - a\bar{c} = b, \tag{27}$$

где a и b – комплексные постоянные. Если $|a| \neq 1$, то

$$c = \frac{b + a\bar{b}}{1-|a|^2}. \tag{28}$$

При $|a| = 1$ неоднородное уравнение (27) имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{Re}\,(b\sqrt{a}) = 0$. В этом случае

$$c = \frac{1}{2}b + \frac{d}{\sqrt{a}}, \tag{29}$$

где d – произвольная вещественная постоянная. Исходя из формул (28), (29), получим, что неоднородная система уравнений (20), (21) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}\,\left(\sum_{k=0}^{m_0} a_k f_2^{(k)}(0)\right) = 0, \tag{30}$$

где a_k – некоторые вполне определенные постоянные и

$$a_{m_0} = \sqrt{\frac{K_2(0,0)}{n_2+m_0+1}}.$$

Пусть выполнено условие (30). Подставляя решение системы (20), (21) в (25), получим, что функция $g_m(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$. Поэтому уравнение (24) в этом случае также однозначно разрешимо. Следовательно, условие (30) необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения (2).

Теперь рассмотрим однородное уравнение (2). Из системы (20), (21) получим

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_k = \beta_k c, \quad k = m_0, ..., m-1, \tag{31}$$

где β_k – некоторые вполне определенные постоянные, $\beta_{m_0} \neq 0$, а c – произвольная вещественная постоянная. Подставляя c_k из (31) в (25) при $f_2(z) \equiv 0$, получим $g_m(z) = c\psi_m(z)$, где $\psi_m(z)$ – определенная функция, аналитичная в D и непрерывная в $\overline{D}$. Поэтому решение уравнения (24) можно записать в виде $\varphi_0(z) = c\varphi_2(z)$, где $\varphi_2(z)$ – решение этого же уравнения, но с правой частью, равной $\psi_m(z)$. Из (6) имеем

$$\varphi(z) = \sum_{k=m_0}^{m-1} c\beta_k z^k + cz^m \varphi_2(z),$$

где c – произвольная вещественная постоянная. Следовательно, однородное уравнение (2) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел). Мы доказали следующее.

Теорема 1.4. *Если для некоторого целого неотрицательного m_0 имеет место равенство (26), то однородное уравнение (2) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения (2) необходимо и достаточно выполнение условия (30).*

3. Рассмотрим уравнение (3). Подставляя $\varphi(z)$ из (6) в (3), получим

$$z^m\left[\varphi_0(z) - M_{n_1+m}\varphi_0 - P_{n_2+m}\varphi_0\right] = f_3(z) - \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k F_k(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \overline{c}_k z^k \Phi_k(z), \tag{32}$$

где функции $F_k(z)$ и $\Phi_k(z)$ определены в (9) и (19), соответственно. Аналогично уравнениям (10) и (11) получим, что для разрешимости уравнения (32) необходимо выполнение условия

$$f_3(0) - c_0 + c_0 F_0(0) + \overline{c}_0 \Phi_0(0) = 0, \tag{33}$$

$$f_3^{(j)}(0) - j!c_j + j!c_j F_j(0) + j!\overline{c}_j \Phi_j(0) + \sum_{k=0}^{j-1} (a_{jk} c_k + \overline{c}_k b_{jk}) = 0, \; j = 1, ..., m-1, \tag{34}$$

где a_{jk} и b_{jk} – постоянные, входящие в уравнения (11) и (21), соответственно. Исходя из (28),(29), имеем, что система уравнений (33), (34) относительно постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$ однозначно разрешима тогда и только тогда, когда

$$|1 - F_k(0)| \neq |\Phi_k(0)|, \qquad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{35}$$

Условие (35) можно записать в виде

$$\left|1 - \frac{K_1(0,0)}{n_1+k+1}\right| \neq \left|\frac{K_2(0,0)}{n_2+k+1}\right|, \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{36}$$

Пусть условие (36) выполнено для всех целых неотрицательных k. Подставляя решение системы (33), (34) в (32), получим

$$\varphi_0(z) - M_{n_1+m}\varphi_0 - P_{n_2+m}\varphi_0 = g_m(z), \tag{37}$$

где $g_m(z)$ – функция, полученная умножением правой части уравнения (32) на z^{-m}. Функция $g_m(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Аналогично неравенству (4) получим

$$|M_{n_1+m}\varphi_0 + P_{n_2+m}\varphi_0| \leq \left(\frac{||K_1||}{n_1+m+1} + \frac{||K_2||}{n_2+m+1}\right) ||\varphi_0||.$$

Берем m таким, чтобы имело место неравенство

$$\frac{||K_1||}{n_1+m+1} + \frac{||K_2||}{n_2+m+1} < 1.$$

Тогда уравнение (37) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Таким образом, *если выполнено условие (36) для всех целых неотрицательных k, то уравнение (3) однозначно разрешимо.*

Пусть теперь условие (36) нарушается для некоторого целого неотрицательного m. Пусть m_0 – наибольшее целое неотрицательное число, для которого имеет место равенство

$$\left|1 - \frac{K_1(0,0)}{n_1+m_0+1}\right| = \left|\frac{K_2(0,0)}{n_2+m_0+1}\right|. \tag{38}$$

Покажем, что при условии (38) уравнение (3) имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Для этого решение однородного уравнения (3) будем искать в виде

$$\varphi(z) = cz^{m_0} + z^{m_0+1}\varphi_0(z). \tag{39}$$

Подставляя в (3) при $f_3(z) \equiv 0$, получим

$$cz^{m_0} + z^{m_0+1}\varphi_0(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}}\int_0^z t^{n_1+m_0+1}K_1(z,t)\varphi_0(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{z^{n_2+1}}\int_0^z t^{n_2+m_0+1}K_2(z,t)\overline{\varphi_0(t)}\,dt + cz^{m_0}F_{m_0}(z) + \bar{c}z^{m_0}\Phi_{m_0}(z). \tag{40}$$

Деля обе части уравнения (40) на z^{m_0} и переходя к пределу при $z \to 0$, получим

$$c = cF_{m_0}(0) + \bar{c}\Phi_{m_0}(0). \tag{41}$$

Условие (38) можно записать в виде $|1 - F_{m_0}(0)| = |\Phi_{m_0}(0)|$. Если $1 - F_{m_0}(0) \neq 0$, то

$$c - a\bar{c} = 0, \quad a = \frac{\Phi_{m_0}(0)}{1 - F_{m_0}(0)}. \tag{42}$$

Согласно формуле (29) $c = d/\sqrt{a}$, где d – произвольная вещественная постоянная. Подставляя ненулевое решение уравнения (41) в (40) и деля обе его части на z^{m_0+1}, получим

$$\varphi_0(z) = M_{n_1+m_0+1}\varphi_0 + P_{n_2+m_0+1}\varphi_0 + g(z), \tag{43}$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z}[cF_{m_0}(z) + \bar{c}\Phi_{m_0}(z) - c].$$

Так как c удовлетворяет уравнению (41), то $g(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Достаточное условие однозначной разрешимости уравнения (43) имеет вид (36) с $k \geq m_0 + 1$. Согласно выбору m_0 это условие выполнено. Следовательно, уравнение (43) имеет едиснтвенное решение $\varphi_0(z)$. Подставляя это решение в (39), получим нетривиальное решение однородного уравнения (3). Таким образом, мы доказали следующее.

Теорема 1.5. *Условие (36) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (3).*

4. Пусть теперь $\alpha_1(z)$ и $\alpha_2(z)$ аналитичны в круге D, непрерывны в замкнутом круге $\overline{D}$ и удовлетворяют условиям

$$|\alpha_j(z)| \leq 1, \quad \text{при} \quad |z| < 1, \quad \alpha_j(0) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{44}$$

Рассмотрим следующие уравнения :

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z,t)\varphi(\alpha_1(t))\, dt + f_1(z), \tag{45}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z,t)\overline{\varphi(\overline{\alpha_2(t)})}\, dt + f_2(z), \tag{46}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \int_0^z t^{n_1} K_1(z,t)\varphi(\alpha_1(t))\, dt + \frac{1}{z^{n_2+1}} \int_0^z t^{n_2} K_2(z,t)\overline{\varphi(\overline{\alpha_2(t)})}\, dt + f_3(z), \tag{47}$$

где величины n_1, n_2, K_1, K_2 те же, что и в уравнениях (1) – (3). Уравнения (45) – (47) исследуются аналогично уравнениям (1) – (3), соответственно. Поэтому мы приведем только результаты.

Теорема 1.6. *Если выполнено условие*

$$\frac{K_1(0,0)}{n_1+k+1}(\alpha_1'(0))^k \neq 1, \quad k = 0, 1, ..., \tag{48}$$

то уравнение (45) однозначно разрешимо. Если же для некоторого целого неотрицательного k условие (48) нарушается, то однородное уравнение (45) имеет одно линейно независимое решение (в поле вещественных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения (45) необходимо и достаточно выполнение условия (16) для одного m_0.

Теорема 1.7. *Если выполнены условия*

$$\frac{|K_2(0,0)\cdot(\alpha_2'(0))^k|}{n_2+k+1} \neq 1, \quad k = 0, 1, ..., \tag{49}$$

то уравнение (46) однозначно разрешимо. Если же условие (49) нарушается для некоторого целого неотрицательного k, то однородное уравнение (4) имеет одно линейно независимое решение (в поле комплексных чисел), а а для разрешимости неоднородного уравнения (46) необходимо и достаточно выполнение условия (30) для одного m_0.

Теорема 1.8. *Условие*

$$\left|\frac{K_1(0,0)}{n_1+k+1}(\alpha_1'(0))^k - 1\right| \neq \left|\frac{K_2(0,0)}{n_2+k+1}(\alpha_2'(0))^k\right|, \quad k = 0, 1, ...$$

необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (47).

Замечание 1.1. Теоремы 1.1 – 1.3 остаются в силе, если единичный круг заменить произвольной односвязной областью с достаточно гладкой границей, звездной относительно начала координат.

§2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА

1. В этом параграфе рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$z^n\varphi^{(n)}(z)+\sum_{k=0}^{n-1}z^k a_k(z)\varphi^{(k)}(z)=f(z), \tag{50}$$

где $a_k(z)$, $k=0,1,...,n-1$ и $f(z)$ аналитичны в круге D и непрерывны в замкнутом круге $\overline{D}$. Если $f(z)\equiv 0$, то уравнение (50) называется *однородным*. В случае, когда функции $a_k(z)$ постоянные, уравнение (50) совпадает с известным уравнением Эйлера (см. [1]). Решение $\varphi(z)$ будем искать в классе аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ функций. Норму аналитической функции $\varphi(z)$ определим следующим образом :

$$||\varphi||=\max_{|z|\leq 1}|\varphi(z)|.$$

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (50) *фредгольмово,* если однородное уравнение (50) имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородное уравнение (50) разрешимо тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет такому же числу условий вида $L_j(f)=0$, $j=1,...,k_0$, где $L_1,...,L_{k_0}$ – некоторые линейно независимые ограниченные и линейные функционалы (линейная независимость и линейность понимается в поле комплексных чисел).

В этом параграфе указан эффективный метод решения уравнения (50) и доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Уравнение (50) фредгольмово.*

Рассмотрим следующий полином порядка n :

$$P_n(\lambda)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1))+a_0(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(k-1))a_k(0). \tag{51}$$

При $n=1$ положим $P_1(\lambda)=\lambda+a_0(0)$.

Теорема 2.2. *Условие*

$$P_n(k)\neq 0,\quad k=0,1,... \tag{52}$$

необходимо и достаточно для однозначной разрешимости уравнения (50).

Теорема 2.3. *Если условие (52) нарушается только для одного целого неотрицательного $k=m_0$, то однородное уравнение (50) имеет одно линейно нвезависимоп решение. Неоднородное уравнение (50) разрешимо тогда и только тогда,*

когда
$$f^{(m_0)}(0)+\sum_{k=0}^{m_0-1}\gamma_k f^{(k)}(0)=0, \tag{53}$$

где γ_k, $k=0,1,...,m_0-1$ – *вполне определенные постоянные, зависящие только от производных функций* $a_k(z)$ *до порядка* m_0 *в точке* $z=0$.

Теорема 2.4. *Пусть условие (52) нарушается для целых неотрицательных чисел* $m_1,...,m_\nu$. *Тогда число* μ *линейно независимых решений однородного уравнения (50) удовлетворяет неравенству* $1\le\mu\le\nu$.

Примеры показывают, что при заданном ν число μ может принимать любое значение в $[1,\nu]$, в зависимости от $a_k(z)$. В этом параграфе получена формула для μ в терминах производных функций $a_k(z)$ до порядка m_ν в точке $z=0$.

Замечание 2.1. Полином порядка n имеет не более n целых неотрицательных корней, так что $\nu\le n$.

Замечание 2.2. Так как $|P_n(k)|\to\infty$ при $k\to\infty$, то условие (52) автоматически выполняется для больших значений k.

2. Доказательство теоремы 2.2. Для простоты рассмотрим уравнение (50) при $n=2$ (общий случай исследуется аналогично). При $n=2$ уравнение (50) и полином (51) примут вид

$$z^2\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}+za_1(z)\frac{d\varphi(z)}{dz}+a_0(z)\varphi(z)=f(z), \tag{54}$$

$$P_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)+\lambda a_1(0)+a_0(0).$$

Пусть $P_2(k)\neq 0$, $k=0,1,\dots$. Покажем, что уравнение (54) имеет единственное решение. Это решение будем искать в виде

$$\varphi(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_{m-1}z^{m-1}+z^m\varphi_0(z), \tag{55}$$

где c_k – комплексные постоянные, $m\ge 2$ – натуральное число, а $\varphi_0(z)$ – аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\overline{D}$ функция. Подставляя $\varphi(z)$ из (55) в (54), получим

$$z^2\frac{d^2(z^m\varphi_0(z))}{dz^2}+za_1(z)\frac{d(z^m\varphi_0(z))}{dz}+a_0(z)z^m\varphi_0(z)=$$

$$= f(z) - \sum_{k=2}^{m-1} k(k-1)c_k z^k - a_1(z)\sum_{k=1}^{m-1} k c_k z^k - a_0(z)\sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k. \tag{56}$$

Поскольку производные левой части уравнения (56) до порядка $(m-1)$ равны нулю в точке $z = 0$, то обозначая через $F(z)$ правую часть этого уравнения, получим

$$F^{(k)}(0) = 0. \quad k = 0, 1, ..., m-1. \tag{57}$$

Условия (57) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&f(0) - c_0 a_0(0) = 0,\\
&f(0) - c_1 a_1(0) - c_1 a_0(0) - c_0 a_0'(0) = 0,\\
&f^{(k)}(0) - (k-1)k\, k!c_k - k\, k!c_k a_1(0) - k!c_k a_0(0) - \sum_{j=1}^{k-1} j c_j b_{kj} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j d_{kj} = 0,
\end{aligned} \tag{58}$$

$k = 2, ..., m-1$, где

$$b_{kj} = \psi_{1j}^{(k)}(0), \quad d_{kj} = \psi_{0j}^{(k)}(0), \quad \psi_{1j}(z) = z^j a_1(z), \quad \psi_{0j}(z) = z^j a_0(z).$$

Условия (52) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&a_0(0) \neq 0, \quad a_1(0) + a_0(0) \neq 0,\\
&(k-1)k + k a_1(0) + a_0(0) \neq 0, \quad k = 2, ..., m-1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что система (58) однозначноп разрешима относительно постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$. Таким образом, можно считать, что правая часть уравнения (56) известна и удовлетворяет условиям (57). Поэтому функция $F(z)$ представляется в виде $F(z) = z^m F_0(z)$, где $F_0(z)$ – аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\overline{D}$ функция. Следовательно, уравнение (56) запишется в виде

$$z^2 \frac{d^2(z^m \varphi_0(z))}{dz^2} + z a_1(z) \frac{d(z^m \varphi_0(z))}{dz} + a_0(z) z^m \varphi_0(z) = z^m F_0(z). \tag{59}$$

Если функция $\psi(z)$ аналитична в круге D и удовлетворяет условиям $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$, то

$$\psi(z) = \int_0^z (z-t)\psi''(t)\, dt.$$

Следовательно

$$z^m \varphi_0(z) = \int_0^z (z-t) \frac{d^2(t^m \varphi_0(t))}{dt^2}\, dt.$$

Таким образом, справедливо представление

$$z^m\varphi_0(z) = \int_0^z (z-t)\psi(t)\,dt, \tag{60}$$

где $\psi(z)$ – аналитическая в круге D и непрерывная в замкнутом круге $\overline{D}$ функция. Она имеет нуль порядка $(m-2)$ в точке $z=0$. Поэтому

$$\psi(t) = t^{m-2}\psi_0(t), \tag{61}$$

где $\psi_0(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. Подставляя $\psi(t)$ из (61) в (60), получим

$$z^m\varphi_0(z) = \int_0^z (z-t)t^{m-2}\psi_0(t)\,dt. \tag{62}$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^2(z^m\varphi_0(z))}{dz^2} = z^{m-2}\psi_0(z), \quad \frac{d(z^m\varphi_0(z))}{dz} = \int_0^z t^{m-2}\psi_0(t)\,dt. \tag{63}$$

Подставляя $z^m\varphi_0(z)$ из (62) в (59) и учитывая (63), получим

$$z^m\psi_0(z) + za_1(z)\int_0^z t^{m-2}\psi_0(t)\,dt + a_0(z)\int_0^z (z-t)t^{m-2}\psi_0(t)\,dt = z^m F_0(z). \tag{64}$$

Деля обе части на z^m, получим

$$\psi_0(z) = K\psi_0 + F_0(z), \tag{65}$$

где

$$K\psi_0 = -\frac{a_1(z)}{z^{m-1}}\int_0^z t^{m-2}\psi_0(t)\,dt - \frac{a_0(z)}{z^m}\int_0^z (z-t)t^{m-2}\psi_0(t)\,dt.$$

Имеют место следующие оценки :

$$\left|\frac{a_1(z)}{z^{m-1}}\int_0^z t^{m-2}\psi_0(t)\,dt\right| \le \frac{\|a_1\|\cdot\|\psi_0\|}{m-1},$$

$$\left|\frac{a_0(z)}{z^m}\int_0^z (z-t)t^{m-2}\psi_0(t)\,dt\right| \le \frac{\|a_0\|\cdot\|\psi_0\|}{m-1}.$$

Берем m таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\|a_1\| + \|a_0\| < m-1. \tag{66}$$

Тогда уравнение (65) однозначно разрешимо, и его можно решить методом последовательных приближений [2] :

$$\psi_0(z) = F_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} K^j F_0, \tag{67}$$

где K^j – j-я степень оператора K. Как показано в [2], ряд (67) сходится равномерно и

$$\|K^j F_0\| \le q^j\|F_0\|, \quad q = \frac{\|a_0\| + \|a_1\|}{m-1}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.2.

3. Доказательство теоремы 2.3. Пусть условие (52) нарушается только при $k = m_0$. Тогда очевидно, что

$$m_0(m_0 - 1) + a_1(0)m_0 + a_0(0) = 0,$$

$$(k-1)k + ka_1(0) + a_0(0) \neq 0, \quad k \neq m_0.$$

В этом случае первые $m_0 - 1$ уравнений системы (58) однозначно разрешимы относительно постоянных $c_0, c_1, ..., c_{m-1}$. Подставляя эти решения в (58) при $k = m_0$, получим (53), где γ_k – вполне определенные постоянные, не зависящие от $f(z)$, но зависящие от производных функций $a_1(z)$ и $a_0(z)$ до порядка m_0 в точке $z = 0$. Следовательно, условие (53) необходимо для разрешимости уравнения (54).

Пусть выполнено условие (53). Тогда берем $c_{m_0} = 0$ и видим, что система (58) при $k = m_0 + 1, ..., m - 1$ решается однозначно относительно постоянных c_k, $k \neq m_0$, $k = 0, 1, ..., m - 1$. Подставляя полученное частное решение в (56), аналогично предыдущему случаю построим решение уравнения (56). В этом случае также m выбирается так, чтобы выполнялось условие (66). Следовательно, условие (53) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (54).

Рассмотрим теперь однородное уравнение (54). Решая однородную систему (58) ($f^{(k)}(0) = 0$), получим

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_0-1} = 0, \quad c_{m_0} = c, \quad c_k = \beta_k c, \quad k = m_0 + 1, ..., m - 1,$$

где β_k – вполне определенные постоянные, c – произвольная комплексная постоянная. Подставляя это решение в (56), получим уравнение вида (59), где $F_0(z) = cF_1(z)$, а $F_1(z)$ – вполне определенная аналитическая функция в круге D. Пусть $\varphi_1(z)$ является решением уравнения (59) при $F_0(z) = F_1(z)$. Тогда решение уравнения (59) при $F_0(z) = cF_1(z)$ определяется формулой $\varphi_0(z) = c\varphi_1(z)$. Подставляя значения c_k, $k = 0, 1, ..., m - 1$ и $\varphi_0(z)$ в (55), получим

$$\varphi(z) = c\big[z^{m_0} + \beta_{m_0+1}z^{m_0+1} + \cdots + \beta_{m-1}z^{m-1} + z^m\varphi_1(z)\big].$$

Следовательно, однородное уравнение (54) имеет одно линейно независимое решение. Теорема 2.3 доказана.

4. Доказательство теоремы 2.4. Пусть условие (52) нарушается при $k = m_1$ и $k = m_2$ $(m_1 < m_2)$. Тогда

$$\begin{gathered} m_1(m_1-1)+a_1(0)m_1+a_0(0)=0, \\ m_2(m_2-1)+a_1(0)m_2+a_0(0)=0, \\ (k-1)k+ka_1(0)+a_0(0)\neq 0, \quad k\neq m_1,m_2. \end{gathered} \tag{68}$$

Пусть $m > m_2$ и имеет место неравенство (66). Рассмотрим однородную систему (58). Из первых $m_1 - 1$ уравнений этой системы получим $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m_1-1} = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, ..., m_1 - 1$ в уравнение (55), при $k = m_1$ получим $0 = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, ..., m_1-1$ в уравнение (58), при $k = m_1+1, ..., m_2$ получим

$$\begin{gathered} k![(k-1)k+ka_1(0)+a_0(0)]c_k+\sum_{j=m_1}^{k-1}c_j(jb_{kj}+d_{kj})=0, \quad k=m_1+1,...,m_2-1, \\ \sum_{j=m_1}^{m_2-1}c_j(jb_{m_2j}+d_{m_2j})=0, \quad \text{при} \quad k=m_2. \end{gathered} \tag{69}$$

Итак, мы получили систему $m_2 - m_1$ уравнений с $m_2 - m_1$ неизвестными постоянными $c_{m_1}, ..., c_{m_2-1}$. Пусть A – основная матрица системы (69), а r – ранг этой матрицы. Из условий (68) следует, что

$$m_2 - m_1 - 1 \le r \le m_2 - m_1.$$

Пусть $r = m_2 - m_1$. Тогда система (69) имеет только нулевое решение, т.е. $c_{m_1} = \cdots = c_{m_2-1} = 0$. Подставляя $c_k = 0$, $k = 0, 1, ..., m_2 - 1$ в остальные уравнения (58) при $k = m_2 + 1, ..., m - 1$ и решая их относительно c_k, получим $c_k = \gamma_k c$, $k = m_2 + 1, ..., m - 1$, где γ_k – вполне определенные постоянные, $c = c_{m_2}$ – произвольная постоянная. Подставляя это значение в уравнение (56), аналогично предыдущему случаю докажем, что однородное уравнение (50) имеет одно линейно независимое решение.

Можно аналогично доказать, что при $r = m_2 - m_1 - 1$ однородное уравнение (54) имеет два линейно независимых решения. Теорема 2.4 доказана.

5. Доказательство теоремы 2.1. Утверждение теоремы 2.1 при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ следует из теорем 2.2 и 2.3, соответственно. Пусть $\nu = 2$. Из теоремы

2.4 следует, что число μ линейно независимых решений однородного уравнения (54) не превышает 2. Применяя рассуждения доказательства теоремы 2.3, можно показать, что при $\mu = 1$ для разрешимости неоднородного уравнения (54) необходимо и достаточно выполнение одного условия вида (53), а при $\mu = 2$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$f^{(m_j)}(0) + \sum_{k=0}^{m_j-1} \beta_{jk} f^{(k)}(0) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где β_{1k} и β_{2k} – вполне определенные постоянные, зависящие от $f(z)$. Теорема 2.1 доказана.

Приведем примеры, в которых условие (52) нарушается для двух целых неотрицательных чисел.

Пример 2.1. Для уравнения

$$z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} - z\frac{d\varphi}{dz} = 0 \tag{70}$$

условие (52) принимает вид

$$k(k-1) - k \neq 0, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{71}$$

Условие (71) нарушается при $k = 0$ и $k = 2$. Здесь функции $\varphi_1(z) = 1$ и $\varphi_2(z) = z^2$ – линейно независимые решения уравнения (70).

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение

$$z^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} - z\frac{d\varphi}{dz} + z\varphi = 0. \tag{72}$$

В этом случае условие (52) имеет вид (71). Определитель системы (69) здесь отличен от нуля и $r = 2$. Поэтому уравнение (72) имеет одно линейно независимое решение.

Пример 2.3. Рассмотрим уравнение (50) при $n = 1$:

$$z\varphi'(z) + a_0(z)\varphi(z) = f(z). \tag{73}$$

Применяя теоремы 2.2 и 2.3 к уравнению (73), получим

Следствие 2.1. Если $a_0(0) \neq 0, -1, -2, ..$, то уравнение (73) однозначно разрешимо. В остальных случаях однородное уравнение (73) имеет одно линейно независимое решение, а для разрешимости неоднородного уравнения (73) необходимо и достаточно выполнение условия

$$f^{(k)}(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j f^{(j}(0) = 0,$$

где $k = -a_0(0)$ и γ_j – однозначно определяются через производные функции $a_0(z)$ до порядка k в точке $z = 0$.

Замечание 2.3. Если $a_0(z) = const$ – целое неположительное число, то условие разрешимости уравнения (73) имеет вид $f^{(k}(0) = 0$, $k = -a_0(0)$.

§3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Рассмотрим следующую задачу Пуанкаре.

Задача А. В круге D найти непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение эллиптического уравнения

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{74}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} = \alpha u(z) + f(z), \quad |z| = 1, \tag{75}$$

где A, B, C и $\alpha \neq 0$ – комплексные постоянные, $f(z)$ – комплекснозначная функция, заданная на окружности $\Gamma : \{|z| = 1\}$ и удовлетворяющая условию Гельдера, $\frac{\partial u}{\partial r}$ – радиальная производная. Если $f(z) = 0$, то задачу А назовем *однородной*. Предполагается, что $C \neq 0$ и корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0 \tag{76}$$

удовлетворяют условиям $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$. Известно (см. [4]), что общее решение уравнения (74) имеет вид

$$u(x, y) = \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y), \tag{77}$$

где $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x+\lambda_2 y)$ – аналитические функции по аргументам $x+\lambda_1 y$ и $x+\lambda_2 y$, соответственно, при $(x,y)\in D$ и непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{D}$. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\varphi_2(0)=0$. Тогда в представлении (77) функции $\varphi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x+\lambda_2 y)$ определяются по $u(x,y)$ единственным образом. Подставляя $u(x,y)$ из (77) в граничное условие (75), получим

$$\begin{aligned}&(x+\lambda_1 y)\varphi_1'(x+\lambda_1 y)+(x+\lambda_2 y)\varphi_2'(x+\lambda_2 y)=\\&=\alpha[\varphi_1(x+\lambda_1 y)+\varphi_2(x+\lambda_2 y)]+f_2(z),\quad |z|=1.\end{aligned}\tag{78}$$

Обозначим

$$V(x,y)=(x+\lambda_1 y)\varphi_1'(x+\lambda_1 y)+(x+\lambda_2 y)\varphi_2'(x+\lambda_2 y)-\alpha[\varphi_1(x+\lambda_1 y)+\varphi_2(x+\lambda_2 y)].\tag{79}$$

Граничное условие (78) запишется в виде

$$V(x,y)=f(z),\quad |z|=1.\tag{80}$$

Из обозначения (79) также следует, что $V(x,y)$ является решением уравнения (74), т.е.

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.\tag{81}$$

Таким образом, для определения функции $V(x,y)$ получили задачу Дирихле (80), (81) в круге D. Известно (см. [4], стр. 143), что эта задача имеет единственное решение

$$V(x,y)=\psi_1(x+\lambda_1 y)+\psi_2(x+\lambda_2 y),\tag{82}$$

где $\psi_1(x+\lambda_1 y)$ и $\psi_2(x+\lambda_2 y)$ – аналитические функции по $x+\lambda_1 y$ и $x+\lambda_2 y$, соответственно, непрерывные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие дополнительному условию $\psi_2(0)=0$. Подставляя $V(x,y)$ из (82) в (79), получим

$$W_1(x+\lambda_1 y)+W_2(x+\lambda_2 y)=0,\tag{83}$$

где

$$W_j(x+\lambda_j y)=(x+\lambda_j y)\varphi_j'(x+\lambda_j y)-\alpha\varphi_j(x+\lambda_j y)-\psi_j(x+\lambda_j y),\quad j=1,2.\tag{84}$$

Из условий $\psi_2(0) = 0$ и $\varphi_2(0) = 0$ следует, что $W_2(0) = 0$. Из условия (83) и единственности представления (77)

$$W_1(x+\lambda_1 y) = 0, \quad W_2(x+\lambda_2 y) = 0, \quad \text{при} \quad |z| < 1. \tag{85}$$

Следовательно, из (84) и (85) имеем

$$(x+\lambda_j y)\varphi_j'(x+\lambda_j y) - \alpha\varphi_j(x+\lambda_j y) - \psi_j(x+\lambda_j y) = 0, \quad (x,y) \in D, \quad j = 1,2. \tag{86}$$

Пусть D_j – образ круга D при отображении $\zeta = x+\lambda_j y$, $j = 1,2$. Тогда уравнение (86) можно записать в виде

$$z\varphi_j'(z) = \alpha\varphi_j(z) + \psi_j(z), \quad z \in D_j, \quad j = 1,2. \tag{87}$$

Подставляя $z = 0$ в (87), получим $\varphi_1(0) = -\psi_1(0)/\alpha$. Так как $\varphi_2(0) = 0$, то отсюда имеем

$$\varphi_1(z) = \int_0^z \omega_1(t)\, dt - \frac{1}{\alpha}\psi_1(0), \quad \varphi_2(z) = \int_0^z \omega_2(t)\, dt, \tag{88}$$

где $\omega_j(z)$ аналитичны в D_j и непрерывны в $\overline{D}_j$, $j = 1,2$. Подставляя $\varphi_j(z)$ из (88) в (87), получим

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{\alpha}{z}\int_0^z \omega_1(t)\, dt + \frac{\psi_1(z)-\psi_1(0)}{z}, \quad z \in D_1, \\ \omega_2(z) &= \frac{\alpha}{z}\int_0^z \omega_2(t)\, dt + \frac{\psi_2(z)}{z}, \quad z \in D_2. \end{aligned} \tag{89}$$

Так как $\psi_2(0) = 0$, то функция $\psi_2(z)/z$ аналитична в D. Таким образом, задачу А свели к интегральным уравнениям (89), которые являются частным случаем уравнения (1). Используя теоремы 1.1 и 1.2, для уравнений (89), получим

Следствие 3.1. Если α не является натуральным числом, то задача А однозначно разрешима; если α – натуральное число, то однородная задача А имеет два линейно независимых решения (в поле комплексных чисел), а для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно выполнение условий $\psi_1^{(\alpha)}(0) = 0$, $\psi_2^{(\alpha)}(0) = 0$.

Легко проверить, что если α – натуральное число, то линейно независимые функции $(x+\lambda_1 y)^\alpha$ и $(x+\lambda_2 y)^\alpha$ – решения задачи А. Отсюда и из следствия 3.1 получим

Следствие 3.2. Если α – натуральное число, то общее решение однородной задачи А определяется формулой

$$u(x,y) = c_1(x+\lambda_1 y)^\alpha + c_2(x+\lambda_2 y)^\alpha,$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные постоянные.

Рассмотрим теперь обобщение задачи А. Граничное условие (75) заменим условием вида

$$\frac{\partial u(z)}{\partial r} = \alpha u(\beta z) + f(z), \quad |z| = 1, \tag{90}$$

где β – вещсетвенная постоянная, $|\beta| \le 1$. Задача (74), (90) исследуется аналогично задаче (74), (75) с той лишь разницей, что в этом случае уравнения (89) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= \frac{\alpha\beta}{z}\int_0^z \omega_1(\beta t)\,dt + \frac{\psi_1(z)-\psi_1(0)}{z}, \\ \omega_2(z) &= \frac{\alpha\beta}{z}\int_0^z \omega_2(\beta t)\,dt + \frac{\psi_2(z)}{z}. \end{aligned} \tag{91}$$

Применяя теоремы 1.6 и 1.7, получаем

Следствие 3.3. Если

$$\frac{\alpha\beta^{k+1}}{k+1} \ne 1, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{92}$$

то задача (74), (90) однозначно разрешима. Если для некоторого целого неотрицательного числа $k = m_0$ условие (92) нарушается, то однородная задача (74), (90) имеет два линейно независимых решения и общее решение определяется формулой

$$u(x,y) = c_1(x+\lambda_1 y)^{m_0+1} + c_2(x+\lambda_2 y)^{m_0+1},$$

где c_1 и c_2 – произвольные комплексные постоянные.

2. В круге D рассмотрим задачу Пуанкаре

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{93}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1\frac{\partial u(z)}{\partial r} + a_2 u(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{94}$$

где a_1 и a_2 – вещественные постоянные, $f(z)$ – вещественнозначная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на окружности Γ, $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ – радиальная производная в точке $z \in \Gamma$. Решение $u(x,y)$ будем искать в классе дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функций. При $f(z) = 0$ задачу (93), (94) будем называть *однородной*. Известно (см. [3], стр. 202), что решения уравнения (94) допускают представление

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\varphi(z), \tag{95}$$

где $\varphi_1(z)$ – аналитическая в D, дважды непрерывно дифференцируемая в $\overline{D}$ функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{Im}\varphi(0) = 0$. Подставляя $u(x,y)$ из (95) в (94), получим

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = f(z), \quad z \in \Gamma, \tag{96}$$

где

$$\Phi(z) = z^2\varphi''(z) + a_1 z\varphi'(z) + a_2\varphi(z). \tag{97}$$

Функция $\Phi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$. С учетом граничного условия (96) функция $\Phi(z)$ определяется формулой Шварца (см. [3], стр. 223)

$$\Phi(z) = F(z) + ic, \tag{98}$$

где c – произвольная вещественная постоянная и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t+z}{t-z} f(t)\, d\theta, \quad t = e^{i\theta}.$$

Подставляя $\Phi(z)$ из (98) в (97), получим дифференциальное уравнение

$$z^2\varphi''(z) + a_1 z\varphi'(z) + a_2\varphi(z) = F(z) + ic, \quad z \in D. \tag{99}$$

Подставляя $z = 0$ в (99), получим $a_2\varphi(0) = F(0) + ic$. Приравнивая действительные и мнимые части и имея в виду, что a_2 и $\varphi(0)$ вещественны, получим

$$a_2\varphi(0) = \operatorname{Re}F(0), \quad c = -\operatorname{Im}F(0). \tag{100}$$

Рассмотрим два возможных случая : $a_2 \neq 0$ и $a_2 = 0$. Пусть $a_2 \neq 0$. Тогда из (100) получим

$$\varphi(0) = \operatorname{Re}\left[\frac{F(0)}{a_2}\right] \equiv \alpha_0.$$

Следовательно

$$\varphi(z) = \alpha_0 + z\psi(z), \tag{101}$$

где $\psi(z)$ аналитична в D и дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$. Подставляя $\varphi(z)$ и c из (100) и (101) в (99), получим

$$z^2\psi''(z) + (a_1+2)z\psi'(z) + (a_1+a_2)\psi(z) = F_0(z), \quad z \in D, \tag{102}$$

где $F_0(z) = \frac{1}{z}[F(z) - F(0)]$. Таким образом, задачу (93), (94) мы свели к дифференциальному уравнению (102) в D. Применяя результаты §2 к уравнению (102) при $a_2 \neq 0$, получим

Следствие 3.4. Задача (93), (94) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$k(k-1) + (a_1+2)k + a_1 + a_2 \neq 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{103}$$

Следствие 3.5. Если условие (103) нарушается только для одного целого неотрицательного k, то однородная задача (93), (94) имеет два линейно независимых (в поле вещественных чисел) решения; если же условие (103) нарушается для двух целых неотрицательных k_1 и k_2, то однородная задача (93), (94) имеет четыре линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений.

Пусть теперь $a_2 = 0$. Тогда из (100) получим $\operatorname{Re} F(0) = 0$, т.е.

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta = 0. \tag{104}$$

Далее мы предполагаем, что выполнено условие (104). Подставляя c из (100) в (99) и деля обе его части на z, получим

$$z\psi'(z) + a_1\psi(z) = F_0(z), \tag{105}$$

где $\psi(z) = \varphi'(z)$. Из (95) имеем

$$\varphi(z) = \int_0^z \psi(t)\, dt + \varphi(0) = \int_0^z \psi(t)\, dt + c,$$

где c – произвольная вещественная постоянная. Следовательно, формула (95) примет вид

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\left[\int_0^z \psi(t)\, dt\right] + c.$$

Таким образом, задача (93), (94) свелась к уравнению (105). Применяя следствие 2.1 к уравнению (105), получим

Следствие 3.6. Пусть $a_2 = 0$ и имеет место необходимое условие (104). Тогда если $a_1 \neq 0, -1, -2, \ldots$, то неоднородная задача (93), (94) всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое решение $u(z) = 1$. В остальных случаях неоднородная задача (93), (94) разрешима тогда и только тогда, когда $F^{(-a_1+1)}(0) = 0$, а соответствующая однородная задача имеет три линейно независимых (в поле вещественных чисел) решений.

ABSTRACT. **The paper investigates Volterra type integral equations with singularities as well as Euler type ordinary differential equations. We obtain necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of analytical solutions of these equations. The results we apply for effective solution of Poincare boundary value problem for second order proper elliptic equations.**

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, М., 1970.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, Физматгиз, Ленинград, 1951.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
4. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific, Singapore, 1994.

21 апреля 1997

Армянский государственный инженерный университет,
Мелитопольский педагогический институт, Украина
E-mail : hterzian@seua.am