О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

С. А. Папян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 2\,a\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + b\,u = 0, \tag{1}$$

где a, b – постоянные.

Мы будем искать решения u уравнения (1) в односвязной области D комплексной плоскости. Не умаляя общности будем считать, что $O \in D$. Пусть граница Γ области D удовлетворяет условию Ляпунова. Мы предполагаем, что u принадлежит классу дважды дифференцируемых в D функций, удовлетворяющих вместе со своими производными первого порядка условию Гельдера в $D \bigcup \Gamma$. На границе Γ $u(x, y)$ должна удовлетворять краевым условиям типа Римана

$$\mathrm{Re}u\big|_\Gamma = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{2}$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_\Gamma = g(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{3}$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$ и $g \in C^{(0,\alpha)}(\Gamma)$ – заданные вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке (x, y).

Задача (1) — (3) называется однородной, если $f \equiv g \equiv 0$ на Γ.

Задачи с дифференциальными уравнениями типа (1), но с другими краевыми условиями рассматривались в монографии [1]. Краевые условия (2), (3) изучались в [2] — [4]. В случае, когда $a = b = 0$, задача (1) — (3) исследована в [2], [3]. Задача (1) — (3) рассматривалась в [5] в смысле L^1–сходимости, где была доказана нетеровость этой задачи и вычислен ее индекс.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2a\,\lambda + b = 0.$$

В настоящей работе доказывается

Теорема. *Задача (1) — (3) всегда разрешима и соответствующая однородная задача имеет четыре решения u_1, u_2, u_3, u_4, линейно независимые над полем вещественных чисел. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то при $z = x + iy$*

$$u_1(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}, \quad u_2(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,(z+\overline{z}),$$

$$u_3(x,y) = e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,(z-\overline{z}), \quad u_4(x,y) = e^{\overline{\lambda}z+\lambda\overline{z}}\,z\,\overline{z}.$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$u_1(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_1\overline{z}},\ u_2(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_2 z+\lambda_2\overline{z}},$$

$$u_3(x,y) = i\left(e^{\lambda_1\overline{z}+\overline{\lambda}_2 z} + e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_2\overline{z}}\right),\ u_4(x,y) = e^{\lambda_1\overline{z}+\overline{\lambda}_2 z} - e^{\overline{\lambda}_1 z+\lambda_2\overline{z}}.$$

Общее решение однородной задачи (1) — (3) представляется в виде линейной комбинации функций u_1, ..., u_4 с вещественными коэффициентами.

Доказательство. Введем новую функцию $V(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = e^{-a\,\overline{z}-\overline{a}\,z}\,V(x,y), \qquad z = x+iy, \quad (x,y)\in D. \tag{4}$$

Подставляя в (1), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \overline{z}^2} - c^2\,V = 0, \quad (x,y)\in D, \tag{5}$$

где $c^2 = a^2 - b$.

Подставляя (4) в (2), (3) и учитывая, что функция $e^{-a\overline{z}-\overline{a}z}$ вещественнозначна, получим

$$\operatorname{Re} V|_\Gamma = f_1, \qquad \operatorname{Re}\left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1, \tag{6}$$

где

$$f_1 = e^{a\,\overline{z}+\overline{a}\,z}\, f, \qquad g_1 = g\, e^{a\,\overline{z}+\overline{a}\,z} + 2\, f_1 \operatorname{Re}\left(\overline{a}\, e^{i\tau}\right), \qquad z = r\, e^{i\tau}. \tag{7}$$

Введем оператор L, действующий в просранстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, и сопряженный оператор L^* :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2} - c^2 I, \qquad L^* = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \overline{c}^2 I. \tag{8}$$

В этих обозначениях задача (5), (6), эквивалентная задаче (1) — (3), примет вид :

$$\begin{cases} (LV)(x,y) \;\cdot = 0, & (x,y) \in D, \\ \operatorname{Re} V|_\Gamma \quad = f_1, & \operatorname{Re} \left.\dfrac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1. \end{cases} \tag{9}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – вещественный оператор, получим, что если V – решение задачи (9), то функция $W(x,y) = \operatorname{Re} V(x,y)$ будет решением задачи

$$(L^* L)\, W(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D, \tag{10}$$

$$\operatorname{Re} W|_\Gamma = f_1, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_\Gamma = g_1. \tag{11}$$

Решение W четырежды непрерывно дифференцируемо в D и вместе со своми производными первого порядка удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы.

Лемма 1. *Любое действительное решение задачи (10), (11) можно представить в виде*

$$W(x,y) = Re\, V(x,y), \tag{12}$$

где V – решение задачи (9).

Доказательство. Уравнение (10) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \overline{c}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \overline{c}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + c\right) W = 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$W(x,y) = e^{c\overline{z}}\, \varphi_1(z) + e^{-c\overline{z}}\, \varphi_2(z) + e^{\overline{c}\,z}\, \varphi_3(\overline{z}) + e^{-\overline{c}\,z}\, \varphi_4(\overline{z}), \tag{13}$$

где φ_1, φ_2 аналитичны в D, φ_3, φ_4 аналитичны в $\overline{D} = \{z\colon\ \overline{z} \in D\}$.

Нас интересует действительное решение задачи (10), (11), следовательно, $W = \operatorname{Re} W$ при $z \in D$, т.е

$$W = \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\varphi_1(z) + e^{-c\bar{z}}\varphi_2(z) + e^{\bar{c}z}\varphi_3(\bar{z}) + e^{-\bar{c}z}\varphi_4(\bar{z})\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\varphi_1(z) + e^{-c\bar{z}}\varphi_2(z) + e^{c\bar{z}}\overline{\varphi_3(\bar{z})} + e^{-c\bar{z}}\overline{\varphi_4(\bar{z})}\right) = \tag{14}$$
$$= \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\left(\varphi_1(z) + \overline{\varphi_3(\bar{z})}\right) + e^{-c\bar{z}}\left(\varphi_2(z) + \overline{\varphi_4(\bar{z})}\right)\right).$$

Так как функции $\omega_1(z) = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_3(\bar{z})}$ и $\omega_2(z) = \varphi_2(z) + \overline{\varphi_4(\bar{z})}$ аналитичны в D, то с учетом (14) получим

$$W = \operatorname{Re}\left(e^{c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{-c\bar{z}}\omega_2(z)\right). \tag{15}$$

Общее решение уравнения (9) допускает представление

$$V = e^{c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{-c\bar{z}}\omega_2(z), \tag{16}$$

где ω_1, ω_2 аналитичны в D. Из (15) и (16) следует (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Однордная задача (10), (11) имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $W(x, y)$ – решение однородной задачи (10), (11). Из (10) имеем

$$\iint_D (L^* L)\, W(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}\, dx\, dy = 0. \tag{17}$$

Известно (см. [6]), что функция $W(x, y)$ аналитична по x и y. Учитывая однородные условия (11) и дважды применяя формулу Грина в (17), получим

$$\iint_D |L\, W(x, y)|^2\, dx\, dy = 0.$$

Так как $(L\, W)(x, y)$ непрерывна в D, то

$$(L\, W)(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D.$$

Таким образом, функция W – решение уравнения (10), следовательно

$$W(x, y) = e^{-c\bar{z}}\omega_1(z) + e^{c\bar{z}}\omega_2(z), \tag{18}$$

где $c = \sqrt{a^2 - b}$ и $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ – аналитические в D функции. Из (18) имеем

$$W(z) = e^{-c\bar{z}}\chi(z), \tag{19}$$

где

$$\chi(z) = \omega_1(z) + e^{2c\bar{z}}\,\omega_2(z). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (11), получим

$$\chi(z)|_\Gamma = 0, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial \chi}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{22}$$

Из (21) следует, что

$$\left.\frac{\partial \chi}{\partial S}\right|_\Gamma = 0, \tag{23}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial S}$ – оператор дифференцирования по длине дуги Γ.

Учитывая (20) и (21), имеем

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0, \qquad z \in \Gamma. \tag{24}$$

Дифференцируя (20) по x и y, из (24) получим

$$\begin{aligned} &\Psi_1'(z) + 2\,c\,e^{2c\bar{z}}\,\Psi_2(z) + e^{2c\bar{z}}\,\Psi_2'(z) = 0, \\ &i\,\Psi_1'(z) - 2\,c\,i\,e^{2c\bar{z}}\,\Psi_2(z) + e^{2c\bar{z}}\,i\,\Psi_2'(z) = 0, \qquad z \in \Gamma. \end{aligned} \tag{25}$$

Из (25) следует, что

$$\Psi_2(z)|_\Gamma = 0. \tag{26}$$

Далее, из (22), (23) и (26) имеем

$$\Psi_1(z)|_\Gamma = 0. \tag{27}$$

Функции Ψ_1, Ψ_2 аналитичны в области D, следовательно, из условий (26) и (27) получаем

$$\chi(z) = \Psi_1(z) + e^{2c\bar{z}}\,\Psi_2(z) = 0, \qquad z \in D. \tag{28}$$

Таким образом, однородная задача (10), (11) имеет только тривиальное решение. Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Известно [6], что если задача (10), (11) имеет единственное решение, то она разрешима для произвольных f_1 и g_1. В силу леммы 2 задача (10), (11) имеет действительное решение W, которое, согласно лемме 1, представляется в виде $W = \mathrm{Re}\, V$, где V – решение задачи (9). Таким образом, задача (9) разрешима.

Если V_1, V_2 – решения задачи (9), для которых $W = \mathrm{Re}\, V_1$, $W = \mathrm{Re}\, V_2$, то $\mathrm{Re}\,(V_1 - V_2) = 0$. Из [4] следует, что

$$V_1 - V_2 = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + C_4 u_4,$$

где C_i, $i = 1, ..., 4$ – вещественные постоянные. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Н. Е. Товмасяну за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Джураев, Метод сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1987.
2. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для неправильно–эллиптических уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 1, стр. 78 — 81, 1992.
3. А. А. Закарян, "Краевые задачи для неправильно–эллиптических уравнений", Диссертация, Ереван, 1989.
4. А. О. Бабаян, С. А. Папян, "О краевой задаче типа Римана для одного класса неправильно эллиптических дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 33, № 2, стр. 5 — 16, 1998.
6. Г. М. Айрапетян, "Задача типа Римана для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 71 — 79, 1993.
7. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, ГИТТЛ, М., 1948.

15 января 1998

Армянский государственный инженерный университет