ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ КОНФОРМНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 2, 1998

В статье приводится новый метод конформного отображения односвязных областей, условия которого легко проверяемы и являются более слабыми, чем условия соответствия границ.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D и G – односвязные ограниченные области с гладкими границами Γ и L , соответственно. В книгах [1] и [2] приведен следующий критерий конформности отображения (принцип соответствия границ) : если функция $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ и взаимнооднозначно отображает контур Γ на контур L , сохраняя ориентацию, то $\varphi(z)$ конформно отображает область D на область G .

Пусть $z = \alpha(t)$ – параметрическое уравнение контура Γ , где параметром t является точка единичной окружности $|t| = 1 : t = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Под гладкостью контура Γ мы понимаем следующее : 1) контур Γ простой, т.е. не пересекает сам себя ; 2) существует производная $\frac{d\alpha(t)}{dt} \neq 0$, удовлетворяющая условию Гельдера на окружности $|t| = 1$.

В данной работе приводятся новые критерии конформности отображения односвязных областей, где условие взаимнооднозначного отображения границ заменяется более простым условием, проверка которого во многих случаях не представляет особой трудности.

§1. ОТОБРАЖЕНИЕ НА ВЕРХНЮЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ И КРУГ

1. Пусть $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая область D на полуплоскость $\text{Im}z > 0$, а точку $z_1 \in \Gamma$ переводит в бесконечность. Тогда существует (см. [1]) конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \varphi(z)(z - z_1) = c, \quad z \in \overline{D}. \quad (1)$$

Из определения конформного отображения следует, что

$$\text{Im}\varphi(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq z_1, \quad (2)$$

$$\text{Im}\varphi(z_0) > 0, \quad (3)$$

где z_0 – некоторая фиксированная точка в области D .

Следующая теорема устанавливает, что необходимые условия (1) — (3) являются также достаточными для того, чтобы отображение было конформным.

Теорема 1. Если функция $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, кроме точки z_1 и удовлетворяет условиям (1) — (3), то $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\text{Im}\zeta > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $z_1 = 0$ и ось x -ов является касательной к кривой Γ в начале координат. Тогда условия (1) и (2) запишутся в виде

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z)z = c, \quad z \in \overline{D}, \quad (4)$$

$$\text{Im}\varphi(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq 0. \quad (5)$$

Уравнение контура Γ в окрестности начала координат запишется в виде

$$y = \alpha(x), \quad (6)$$

где $\alpha(x)$ – непрерывная функция в окрестности точки $x = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = 0. \quad (7)$$

Сначала покажем, что из условий (4) и (5) следует, что постоянная c – вещественное число.

Из (6) следует, что параметрическое уравнение контура Γ в окрестности начала координат в комплексной форме запишется в виде

$$z = x + i\alpha(x), \quad -\varepsilon \leq x < \varepsilon, \quad (8)$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Подставляя (8) в (5) и умножая обе части (5) на x , получим

$$\operatorname{Im} \left[\frac{x}{x + i\alpha(x)} (x + i\alpha(x)) \varphi(x + i\alpha(x)) \right] = 0. \quad (9)$$

Переходя в (9) к пределу при $x \rightarrow 0$ и имея в виду пределы (4) и (7), получим

$$\operatorname{Im} c = 0. \quad (10)$$

Пусть теперь $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$ и переводит начало координат в бесконечно удаленную точку. Тогда, как указано выше

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi_0(z) z = c_0, \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} \varphi_0(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq 0, \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} \varphi_0(z_0) > 0, \quad (13)$$

где c_0 — постоянная, не равная нулю.

Обозначим

$$\Psi(z) = \varphi(z) - \frac{c}{c_0} \varphi_0(z).$$

Ясно, что $\Psi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, кроме, быть может, точки $z = 0$. Из (4), (5), (11) и (12) имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} \Psi(z) z = 0, \quad z \in \bar{D}, \quad (14)$$

$$\operatorname{Im} \Psi(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq 0. \quad (15)$$

Из (15) следует, что аналитическая функция $\Psi(z)$ в точке $z = 0$ имеет слабую особенность. Поэтому, из (15) следует (см. [2]), что $\Psi(z) = c_1$, где c_1 — некоторая вещественная постоянная. Следовательно

$$\varphi(z) = \frac{c}{c_0} \varphi_0(z) + c_1. \quad (16)$$

Так как постоянные c_1, c_2 и c действительны, то из (16) имеем

$$\operatorname{Im} \varphi(z_0) = \frac{c}{c_0} \operatorname{Im} \varphi_0(z_0).$$

Отсюда и из условий (3) и (13) имеем

$$\frac{c}{c_0} > 0. \quad (17)$$

Так как $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$, то из (16) и (17) следует, что $\zeta = \varphi(z)$ — конформно отображающая функция. Теорема 1 доказана.

2. Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| = 1 \quad \text{при } z \in \Gamma; \quad \varphi(z_0) = 0, \quad \varphi(z) \neq 0, \\ \text{если } z \in D, \quad z \neq z_0 \quad \text{и} \quad \varphi'(z_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 2. Функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$.

Доказательство. Пусть аналитическая в области D функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям (18), а $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и $\varphi_0(z_0) = 0$. Тогда очевидно, что функция $\varphi_0(z)$ также удовлетворяет условиям (18). Следовательно, отношение

$$\Psi(z) \equiv \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$$

аналитично в области D и удовлетворяет условиям

$$\Psi(z) \neq 0 \quad \text{при } z \in \bar{D}, \quad |\Psi(z)| = 1 \quad \text{при } z \in \Gamma. \quad (19)$$

Из (19) мы заключаем, что $\Psi_0(z) = \ln \Psi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \Psi_0(z) = 0, \quad z \in \Gamma. \quad (20)$$

Из (20) имеем (см. [1]), что $\Psi_0(z) = i\theta_0$, где θ_0 — некоторая вещественная постоянная. Следовательно, $\Psi_0(z) = \exp(i\theta_0)$ и

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) \exp(i\theta_0). \quad (21)$$

Из (21) непосредственно следует, что $\zeta = \varphi(z)$ также конформно отображает область D на единичный круг. Теорема 2 доказана.

§2. КРИТЕРИЙ КОНФОРМНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

1. Теорема 3. Пусть D и G — односвязные ограниченные области с гладкими границами Γ и L , соответственно. Любая аналитическая в D функция $\varphi(z)$, непрерывно дифференцируемая в $\bar{D}$ и удовлетворяющая условиям

$$\varphi(z) \in L \quad \text{при } z \in \Gamma, \quad \varphi(z_0) = \zeta_0, \quad \varphi(z_1) = \zeta_1,$$

$$\varphi'(z_1) \neq 0 \quad \text{и} \quad \varphi(z) \neq \zeta_1 \quad \text{при } z \in \Gamma, \quad z \neq z_1,$$

где $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in G$, $z_1 \in \Gamma$ и $\zeta_1 \in L$ — некоторые фиксированные точки, конформно отображает D на G .

Доказательство. Пусть $\zeta = \Psi(t)$ конформно отображает G на полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ и переводит точку ζ в бесконечность. Рассмотрим отображение

$$\zeta = \Psi(\varphi(z)) \equiv \omega(z). \quad (22)$$

Функция $\omega(z)$ аналитична в D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, за исключением точки $z = z_1$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому $\zeta = \omega(z)$ конформно отображает D на полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$. Из (22) имеем

$$\varphi(z) = \Psi^{-1}(\omega(z)),$$

где $\Psi^{-1}(t)$ — функция, обратная к функции $\Psi(t)$. Ясно, что $t = \Psi^{-1}(\omega(z))$ конформно отображает D на G . Теорема 3 доказана.

2. Пусть теперь $\varphi_0(z)$ аналитична в области D , непрерывно дифференцируема в $\bar{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(z) \in L \quad \text{при } z \in \Gamma; \quad \varphi_0(z_0) = \zeta_0, \quad \varphi_0'(z_0) \neq 0$$

$$\text{и} \quad \varphi_0(z) \neq \zeta_0 \quad \text{при } z \in D, \quad z \neq z_0,$$

где $z_0 \in D$, $\zeta_0 \in G$ — некоторые фиксированные точки. Тогда имеет место

Теорема 4. Функция $t = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на G .

Доказательство. Пусть $\zeta = \Psi_0(t)$ конформно отображает G на единичный круг $|\zeta| < 1$ и $\Psi_0(\zeta_0) = 0$. Тогда отображение $\zeta = \Psi_0(\varphi_0(z)) \equiv \omega_0(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому $\zeta = \omega_0(z)$ конформно отображает область D на единичный круг $|\zeta| < 1$, а $t = \Psi_0^{-1}(\omega_0(z)) = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на G . Теорема 4 доказана.

§3. ДРУГИЕ КРИТЕРИИ КОНФОРМНОСТИ

Пусть D – односвязная ограниченная область с гладкой границей Γ , и пусть $\varphi(z)$ – аналитичная в области D функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$. Пусть G и L – образы D и Γ , соответственно, при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Известно, что G также является односвязной областью. Обозначим через L_0 границу области G . Возникает естественный вопрос: при каких условиях на функцию $\varphi(z)$ контуры L и L_0 совпадают и функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на область G ?

Лемма 1. Контур L_0 принадлежит контуру L .

Доказательство. Пусть $\zeta_0 \in L_0$. Докажем, что $\zeta_0 \in L$. Так как G – область, то ζ_0 не принадлежит области G , существует последовательность $\zeta_n \in G$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$. Так как $\zeta_n \in G$, то $\zeta_n = \varphi(z_n)$, где $z_n \in D$ – один из прообразов точки ζ_n при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Так как последовательность z_n ограничена, то существует подпоследовательность z_{m_k} ($k = 1, 2, \dots$), которая сходится к некоторой точке $z_0 \in \bar{D}$. Следовательно

$$\varphi(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(z_{m_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{m_k} = \zeta_0.$$

Таким образом, точка $\varphi(z_0)$ не принадлежит области G . Это означает, что точка z_0 не принадлежит области D . Следовательно, $z_0 \in \Gamma$ и, по определению, $\zeta_0 = \varphi(z_0) \in L$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Контур L_0 совпадает с контуром L тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \neq \varphi(t) \quad \text{при } z \in D, \quad t \in \Gamma. \quad (23)$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (23), и пусть $\zeta_0 \in L$. Докажем, что $\zeta_0 \in L_0$. По определению контура L существует точка $t_0 \in \Gamma$ такая, что $\zeta_0 = \varphi(t_0)$. Из неравенства (23) при $z \in D$ и $t = t_0$ следует, что точка ζ_0 не принадлежит области G . Пусть $z_n \in D$ — последовательность точек такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = t_0$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(z_n) = \varphi(t_0) = \zeta_0.$$

По определению области G точка $\varphi(z_n) \in G$. Следовательно, точка ζ_0 не принадлежит G . Поскольку ζ_0 является пределом точек из G , то $\zeta_0 \in L_0$. Отсюда и из леммы 1 следует, что контуры L и L_0 совпадают.

Пусть теперь для некоторой пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\varphi(z_0) = \varphi(t_0). \quad (24)$$

По определению G и L , имеем $\varphi(z_0) \in G$, $\varphi(t_0) \in L$. Из (24) следует, что $\zeta_0 \equiv \varphi(t_0) = \varphi(z_0)$ одновременно принадлежит и контуру L и области D . Поэтому $\zeta_0 \in L$ и $\zeta_0 \notin L_0$. Но если условие (23) нарушается хотя бы для пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$, то $L_0 \neq L$. Лемма 2 доказана.

Следующий пример показывает, что оба случая леммы 2 возможны.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = z - \alpha z^2, \quad (25)$$

где α — положительная постоянная.

В качестве области D берем единичный круг $|z| < 1$. Очевидно, что границей Γ является единичный круг $|z| = 1$. Тогда неравенство (23) для функции (25) запишется в виде

$$\alpha(z+t) \neq 1, \quad |z| < 1, \quad |t| = 1. \quad (26)$$

При $0 < \alpha < 1/2$ неравенство (26) всегда выполняется. Поэтому, согласно лемме 2, контуры L и L_0 совпадают.

Пусть $\alpha > 1/2$. Тогда условие (26) нарушается хотя бы для пары точек $t = 1$ и $z = \alpha^{-1} - 1$. Поэтому в этом случае L_0 принадлежит контуру L , но не совпадает с L .

Пусть $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi'(z_0) \neq 0, \quad \varphi(z) \neq \varphi(z_0) \quad \text{при } z \in D, \quad z \neq z_0;$$

$$\varphi(z) \neq \varphi(t) \quad \text{при } z \in D, \quad t \in \Gamma,$$

где z_0 — фиксированная точка в D .

Пусть G и L — те же, что и выше. Тогда имеет место следующая

Теорема 5. Если контур L — гладкий, то функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на область G .

Доказательство. Согласно лемме 2 границей области G является контур L .

Пусть $\zeta_0 = \varphi(z_0)$. Согласно определению области G и контура L имеем $\zeta_0 \in G$ и $\varphi(z) \in L$ при $z \in \Gamma$. Поэтому функция $\varphi(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Отсюда следует справедливость теоремы 5.

Пусть теперь хотя бы для одной пары точек $z_0 \in D$ и $t_0 \in \Gamma$ имеет место равенство (24). Тогда граница L_0 области G принадлежит контуру L , но не совпадает с ним.

Задача. Какой частью L является граница L_0 области G .

Пусть $\varphi(z) = z - z^2$, D является единичным кругом $|z| < 1$. Функция $\varphi(z)$ принимает одинаковые значения на окружности $|z| = 1$ только в паре точек

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \bar{z}_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \text{где } \varphi(z_1) = \varphi(\bar{z}_1) = 1.$$

Пусть γ_1 — дуга окружности $|z| = 1$ между точками z_1 и $\bar{z}_1$ (обход против часовой стрелки), и пусть γ_2 — оставшая часть окружности $|z| = 1$. Точки z_1 и $\bar{z}_1$ будем включать как в γ_1 , так и в γ_2 .

Обозначим через L_1 и L_2 образы γ_1 и γ_2 , соответственно, при отображении $\zeta = \varphi(z)$. Так как $\varphi(z_1) = \varphi(\bar{z}_1)$, то L_1 и L_2 являются замкнутыми кривыми (без концов). Графики контуров L_1 и L_2 показывают, что контур L_1 обхватывает контур L_2 и они имеют только одну общую точку $\zeta = 1$. Имеем $L = L_1 \cup L_2$. Легко проверить, что граница L_0 области G совпадает с контуром L_1 .

ABSTRACT. The paper describes a new method of conformal mapping of simply connected domains, under conditions weaker than those imposed in the principle of correspondence of boundaries and that can be easily verified.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
2. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 1, Наука, М., 1968.

6 апреля 1997

Армянский государственный
инженерный университет