

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 2, 1998

В работе рассматривается проблема аналитического продолжения аналитической функции через эллипсообразные дуги при условии, что либо действительная часть, либо модуль функции постоянны. Мы изучаем случаи полуплоскости и круга. Полученные результаты применяются к разложению на простейшие дроби конформных отображений, отображающих области с эллипсообразными границами на круг или полуплоскость. В случае эллипса мы доказываем, что конформные отображения являются мероморфными функциями со счетным числом простых полюсов или полюсов второго порядка.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ - образ окружности

$$|t - d| = R, \quad d \geq 0, \quad R > 1 + d \quad (1.1)$$

при отображении Жуковского (см. [1], стр. 29)

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \equiv \alpha_1(t), \quad (1.2)$$

где $z = x + iy$, $t = \zeta + i\eta$. Обозначим через D область, ограниченную контуром Γ . Если $d = 0$, то Γ является эллипсом (см. [1], стр. 29).

В §§1,2 исследуются вопросы аналитического продолжения функций $\varphi(z)$, аналитических в D и непрерывных в $D \cup \Gamma$, через открытые дуги $\gamma \subset \Gamma$. Предполагается, что $\varphi(z)$ удовлетворяет одному из следующих условий :

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = 0 \quad \text{или} \quad |\varphi(z)| = 1, \quad z \in \gamma.$$

В §§3 — 6 полученные результаты используются для разложения конформных отображений области D на круг и полуплоскость на простейшие дроби. Случай,

когда Γ – эллипс, вопросы аналитического продолжения исследованы в работе [2].

§1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Результаты данного параграфа имеют вспомогательный характер. Они используются для построения аналитического продолжения и разложения конформного отображения на простейшие дроби.

Пусть L – простая замкнутая гладкая кривая в комплексной плоскости. Кривая L является границей двух областей D^+ и D^- , где D^+ – ограниченная, а D^- – неограниченная и содержит в себе окрестность бесконечно удаленной точки. Область D^+ будем называть внутренностью, а D^- – внешностью L . Если L – отрезок, то дополнение L до расширенной комплексной плоскости будем называть внешностью L .

Мы будем говорить, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, если $f(1/z)$ аналитична в окрестности нуля. Пусть G_0 – кольцо

$$r_0 < |z| < R_0, \quad (1.3)$$

и пусть γ_0 и I_0 – открытые дуги на окружностях $|z| = R_0$ и $|z| = r_0$, соответственно, а Γ_0 и L_0 – их соответствующие дополнения до полных окружностей.

Пусть функция $\Psi(z)$ аналитична в кольце G_0 , непрерывна в $G_0 \cup \gamma_0 \cup I_0$ и удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_0 \cup I_0. \quad (1.4)$$

Обозначим через G_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) кольцо

$$\frac{R_0^k}{r_0^{k-1}} < |z| < \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k},$$

и пусть открытые дуги γ_k , I_k и замкнутые дуги Γ_k , L_k являются образами γ_0 , I_0 , Γ_0 и L_0 , соответственно, при отображении

$$\zeta = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k}} z.$$

Пусть ω_0 – совокупность контуров Γ_k и L_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) точки 0 и бесконечно удаленной точки. Обозначим через Ω_0 дополнение ω_0 до расширенной комплексной плоскости (Ω_0 – область в комплексной плоскости, содержащая кольцо G_0).

Лемма 1. *Функция $\Psi(z)$ аналитически продолжается через дуги γ_0 и I_0 в область Ω_0 .*

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжения (см. [1], стр. 158) $\Psi(z)$ аналитически продолжается через γ_0 и I_0 в кольца G_1 и G_{-1} по формулам

$$\Psi(z) = \overline{\Psi(R_0^2/\bar{z})}, \quad z \in G_1 \cup \gamma_0, \quad (1.5)$$

$$\Psi(z) = -\overline{\Psi(r_0^2/\bar{z})}, \quad z \in G_{-1} \cup I_0 \quad (1.6)$$

(черта означает комплексное сопряжение). Из (1.4), (1.5) и (1.6) имеем

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup I_{-1}.$$

Поэтому $\Psi(z)$ можно аналитически продолжить через γ_1 и I_1 в кольца G_2 и G_{-2} .

Аналогично мы докажем справедливость леммы 1.

Пусть теперь $\Psi_0(z)$ – аналитическая функция в кольце G_0 , непрерывная в $G_0 \cup \gamma_0 \cup I_0$ и удовлетворяющая условию

$$|\Psi_0(z)| = 1, \quad z \in \gamma_0 \cup I_0. \quad (1.7)$$

Множество ω нулей функции $\Psi_0(z)$ в G_0 либо пустое, либо состоит из конечного или счетного числа точек (см. [1]). Множество

$$\omega_1 = \left\{ z: z = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}} \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \in \omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

либо пустое, либо состоит из конечного или счетного числа точек. Пусть Ω_1 – дополнение $\omega_0 \cup \omega_1$ до расширенной комплексной плоскости (Ω_1 – область комплексной плоскости, содержащая кольцо G_0).

Лемма 2. *Функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через дуги γ_0 и I_0 в область Ω_1 .*

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжения (см. [1], стр. 158) функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через γ_0 и I_0 в кольца G_1 и G_{-1} по формуле

$$\overline{\Psi_0(z)} = \left[\overline{\Psi_0 \left(\frac{R_0^2}{\bar{z}} \right)} \right]^{-1}, \quad z \in G_1 \cup \gamma_0, \quad (1.8)$$

$$\Psi_0(z) = \left[\overline{\Psi_0 \left(\frac{r_0^2}{z} \right)} \right]^{-1}, \quad z \in G_{-1} \cup I_0. \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) следует, что функция $\Psi_0(z)$ аналитична в $G_0 \cup G_1 \cup G_{-1} \cup I_0 \cup \gamma_0$ за исключением множества

$$\left\{ z: z = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2}} \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta \in \omega, \quad k = 0, 1 \right\}.$$

Из (1.7), (1.8) и (1.9) следует, что $|\Psi_0(z)| = 1$ при $z \in I_{-1} \cup \gamma_1$. Аналогично мы докажем справедливость леммы 2.

Пусть G_0 - кольцо (1.3), а γ_0 и I_0 - окружности $|z| = R_0$ и $|z| = r_0$ без точек $z = R_0$ и $z = r_0$, соответственно, и пусть $\Psi(z)$ аналитична в кольце G_0 , непрерывна в $G_0 \cup I_0 \cup \gamma_0$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \gamma_0 \cup I_0,$$

$$\lim_{z \rightarrow r_0} \Psi(z) (z - r_0) = c_{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow R_0} \Psi(z) (z - R_0) = c_0, \quad z \in G_0, \quad (1.10)$$

где c_{-1} и c_0 - заданные вещественные постоянные. Пусть

$$c_k = \begin{cases} c_0 \frac{R_0^k}{r_0^k} & \text{при} \quad k = 0, 2, \dots, \\ c_{-1} \frac{R_0^{k+1}}{r_0^{k+1}} & \text{при} \quad k = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (1.11)$$

Лемма 3. Функция $\Psi(z)$ аналитически продолжается через контур I_0 вне окружности $|z| = R_0$ кроме множества точек

$$z_k = \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

и бесконечно удаленной точки. Существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \Psi(z) (z - z_k) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.13)$$

где c_k определяются формулами (1.11).

Доказательство. Первая часть утверждения леммы 3 следует из леммы 1. Теперь докажем справедливость равенства (1.13). При $k = 0$ это равенство следует из (1.5) и второго условия в (1.10). Теперь докажем равенство (1.13) при

$k = 2m$, где m – натуральное число. Из принципа симметрии аналитического продолжения (см. доказательство леммы 1)

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = 0 \quad \text{при} \quad |z| = z_m, \quad z \neq z_m \quad (m = 0, 1, \dots)$$

$$\text{и} \quad \Psi(z) = -\overline{\Psi(z_m^2/\bar{z})} \quad \text{при} \quad z_m < |z| < \frac{z_m^2}{r_0}.$$

Следовательно

$$\lim_{z \rightarrow z_{2m}} \Psi(z)(z - z_{2m}) = - \lim_{z \rightarrow z_{2m}} \overline{\Psi(z_m^2/\bar{z})}(z - z_{2m}). \quad (1.14)$$

Из (1.12) следует

$$\frac{z_m^2}{\bar{z}} \rightarrow \frac{z_m^2}{z_{2m}} = R_0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_{2m}.$$

Поэтому из (1.13) при $k = 0$ имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_{2m}} \Psi(z_m^2/\bar{z}) \left(\frac{z_m^2}{\bar{z}} - R_0 \right) = c_0. \quad (1.15)$$

Так как c_0 и z_m вещественны, то из (1.15) получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_{2m}} \overline{\Psi(z_m^2/\bar{z})} \left(\frac{z_m^2}{R_0} - z \right) \frac{R_0}{z} = c_0. \quad (1.16)$$

Из (1.12) имеем

$$\frac{z_m^2}{R_0} = z_{2m}. \quad (1.17)$$

Из (1.14), (1.16) и (1.17) следует равенство (1.13) при $k = 2m$. Это равенство при $k = 2m + 1$ доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Пусть $\Psi_0(z)$ аналитична в кольце G_0 (см. (1.3)), непрерывна в замыкании G_0 и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(z)| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = r_0 \quad \text{и} \quad |z| = R_0,$$

$$\Psi_0(z_0) = 0, \quad \Psi_0(\bar{z}_0) = 0, \quad \Psi_0'(z_0) = c_0, \quad \Psi_0'(\bar{z}_0) = \bar{c}_0,$$

$$\Psi_0(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in G_0, \quad z \neq z_0, \bar{z}_0,$$

где $z_0 \in G_0$ – фиксированная точка, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, а c_0 – постоянная, не равная нулю.

Пусть

$$z_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2} z_0}, \quad a_k = -\frac{R_0^{2k}}{c_0 r_0^{2k-2} z_0}.$$

Лемма 4. Функция $\Psi_0(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R_0$ в область $|z| > R_0$ за исключением точек

$$z = z_k, \quad z = \bar{z}_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

и бесконечно удаленной точки. Имеют место равенства

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \Psi_0(z) (z - z_k) = a_k, \quad \lim_{z \rightarrow \bar{z}_k} \Psi_0(z) (z - \bar{z}_k) = \bar{a}_k. \quad (1.18)$$

Доказательство. Первая часть утверждения следует из леммы 2. Теперь докажем справедливость равенства (1.18). Из принципа симметрии аналитического продолжения следует, что

$$|\Psi_0(z)| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = \rho_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\Psi_0(z) = \left[\overline{\Psi_0(\rho_k^2/\bar{z})} \right]^{-1} \quad \text{при} \quad \rho_k < |z| < \frac{\rho_k^2}{r_0}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.19)$$

где $\rho_k = R_0^{k+1} r_0^{-k}$. Остается использовать доказательство равенства (1.13).

Лемма 4 доказана.

Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция в области $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ и

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) (z - z_0) = c_0, \quad (1.20)$$

где ε, z_0, c_0 — некоторые постоянные, $\varepsilon > 0, c_0 \neq 0$.

Пусть, далее, функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ аналитичны в окрестности ζ_0 и бесконечно удаленной точки, соответственно, и удовлетворяют условиям

$$\delta_1(\zeta_0) = z_0, \quad \delta_1'(\zeta_0) \neq 0, \quad (1.21)$$

$$\delta_2(\zeta) \rightarrow z_0, \quad (\delta_2(z) - z_0) z \rightarrow c_1 \neq 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (1.22)$$

Лемма 5. Имеют место равенства

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \varphi(\delta_1(z)) (z - \zeta_0) = \frac{c_0}{\delta_1'(\zeta_0)}, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\delta_2(z))}{z} = \frac{c_0}{c_1}.$$

Доказательство непосредственно следует из равенств (1.20) — (1.22).

Пусть D – область, рассмотренная во введении, и пусть $\zeta = \varphi(z)$ – функция, отображающая область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{z \rightarrow a} |\varphi(z)| = +\infty, \quad z \in D. \quad (1.23)$$

Пусть, далее, $\Psi(z)$ – аналитична в D , непрерывна в замкнутой области $D \cup \Gamma$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = -\operatorname{Re} \frac{1}{a-z}, \quad z \in \Gamma, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{Im} \Psi(b) = 0, \quad (1.25)$$

$$2a = R + d + \frac{1}{R+d}, \quad 2b = -R + d + \frac{1}{d-R}. \quad (1.26)$$

Лемма 6.

$$\varphi(z) = c_0 \left(\frac{1}{a-z} + \Psi(z) \right) + i c_1, \quad (1.27)$$

где $c_0 > 0$ и c_1 – вещественные постоянные.

Доказательство. Так как $\operatorname{Re} (a-z)^{-1}$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера на Γ , то задача (1.24), (1.25) имеет единственное решение (см. [3], стр. 245).

Как показано в [1], стр. 113, $\varphi(z)$ можно представить в виде

$$\varphi(z) = \varphi_1(\varphi_0(z)), \quad (1.28)$$

где $t = \varphi_0(z)$ конформно отображает D на круг $|t| < 1$ и $\varphi_0(a) = 1$, а $\zeta = \varphi_1(t)$ конформно отображает круг $|t| < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\varphi(t)| = +\infty, \quad |t| < 1.$$

Известно (см. [1], стр. 137, 163), что функция $\varphi_1(t)$ дробно-линейная, а $\varphi_0(z)$ аналитична в окрестности контура Γ и $\varphi_0'(z) \neq 0$ при $z \in D \cup \Gamma$. Поэтому из (1.28) следует, что функция $\varphi(z)$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \frac{c_0}{a-z} + \Psi_1(z), \quad (1.29)$$

где $\Psi_1(z)$ аналитична в D и непрерывна в $D \cup \Gamma$, а $c_0 \neq 0$ – некоторая постоянная.

Ясно, что

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq a, \quad (1.30)$$

$$\operatorname{Re} \varphi(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < a. \quad (1.31)$$

Из (1.30) и (1.31) следует, что в представлении (1.29) постоянная c_0 положительна. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.29) в (1.30), получим

$$\operatorname{Re} \Psi_1(z) = -c_0 \operatorname{Re} \frac{1}{a-z}, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq a. \quad (1.32)$$

Так как левые и правые части (1.32) непрерывны на Γ , то равенство (1.32) имеет место также и в точке $z = a$. Из (1.24) и (1.32) имеем $\operatorname{Re} [\Psi_1(z) - c_0 \Psi(z)] = 0$ при $z \in \Gamma$. Поэтому (см. [3], стр. 174) мы можем написать

$$\Psi_1(z) = c_0 \Psi(z) + i c_1, \quad (1.33)$$

где c_1 — некоторая вещественная постоянная.

Подставляя $\Psi_1(z)$ из (1.33) в (1.29), получаем (1.27). Таким образом, функция $\varphi(z)$ представляется в виде (1.27), где $c_0 > 0$ и c_1 — некоторые постоянные. Из (1.27) имеем

$$\frac{1}{a-z} + \Psi(z) = \frac{\varphi(z)}{c_0} - i \frac{c_1}{c_0}. \quad (1.34)$$

Так как $\varphi(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ и $c_0 > 0$, то из (1.34) следует, что функция $\zeta = (a-z)^{-1} + \Psi(z)$ также конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Поэтому любая функция вида (1.27) — также конформно отображающая функция. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Существует единственная конформно отображающая функция $\zeta = \varphi(z)$ области D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) (z - a) = 1, \quad \varphi(b) = 0, \quad (1.35)$$

она определяется формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{z-a} + \Psi(z),$$

где $\Psi(z)$ решение задачи (1.24), (1.25).

Доказательство. Подставляя $z = b$ в (1.24), получим $\operatorname{Re} \Psi(b) = -(a - b)^{-1}$.

Отсюда и из (1.25) имеем

$$\Psi(b) = -\frac{1}{a-b}. \quad (1.36)$$

Согласно лемме 6 функция вида (1.27) конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$. Подставляя $\varphi(z)$ из (1.27) в (1.35) и используя (1.36), получим $c_0 = 1$, $c_1 = 0$. Лемма 7 доказана.

Пусть D_0 - область, ограниченная окружностями

$$|z + d_1| = \mu_0 \quad \text{и} \quad |z - d_2| = \nu_0, \quad (1.37)$$

где

$$d_1 \geq 0, \quad d_2 \geq 0, \quad d_1 + d_2 > 0, \quad \nu_0 > \mu_0 + d_1 + d_2. \quad (1.38)$$

Обозначим

$$d_3 = d_1 + d_2, \quad x_2 = \frac{\nu_0^2 - \mu_0^2 + d_3^2 + \sqrt{(\nu_0^2 - \mu_0^2 + d_3^2)^2 - 4\nu_0 d_3}}{2d_3},$$

$$x_0 = x_2 - d_2, \quad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - \nu_0^2}, \quad (1.39)$$

$$r_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_0 - \mu_0 - d_1} - \frac{1}{x_0 + \mu_0 - d_1} \right], \quad R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_0 - \nu_0 + d_2} - \frac{1}{x_0 + \nu_0 + d_2} \right]. \quad (1.40)$$

Из (1.38) следует, что

$$x_2 > \nu_0, \quad 0 < r_0 < R_0, \quad x_1 > R_0, \quad x_0 > \nu_0 - d_2. \quad (1.41)$$

Лемма 8. Функция

$$t = x_1 - \frac{1}{z + x_0} \quad (1.42)$$

отображает область D_0 на кольцо $r_0 < |t| < R_0$.

Доказательство. Пусть $x_0 > \nu_0 - d_2$. Тогда функция (1.42) аналитична в области D_0 . Образы окружностей (1.37) являются окружностями с центрами

$$t_1 = x_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_0 - \mu_0 - d_1} + \frac{1}{x_0 + \mu_0 - d_1} \right],$$

$$t_2 = z_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z_0 - \nu_0 + d_2} + \frac{1}{z_0 + \nu_0 + d_2} \right],$$

где r_0 и R_0 определяются формулами (1.40). Мы берем z_0 и z_1 так, чтобы

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0. \quad (1.43)$$

Из условия (1.43) получаем формулу (1.39). Лемма 8 доказана.

Система контуров $\{\Gamma_n\}$ называется правильной, если

- 1) существует фиксированная точка a_0 , находящаяся во внутреннейности каждого контура Γ_n ;
- 2) каждый контур Γ_n содержится в области, ограниченной контуром Γ_{n-1} ;
- 3) расстояние $d_n = \text{dist}(a_0, \Gamma_n)$ и длина s_n контура Γ_n стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ и $s_n/d_n \leq A$.

Лемма 9. Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в комплексной плоскости кроме счетного числа полюсов z_n ($n = 1, 2, \dots$) и точки a_0 , причем $z_n \rightarrow a_0$ при $n \rightarrow \infty$ и $f(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow +\infty$. Если для некоторой правильной системы контуров $\{\Gamma_n\}$ функция $f(z)$ равномерно ограничена на $\{\Gamma_n\}$, то она представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(z), \quad (1.44)$$

где $g_n(z)$ — главные части $f(z)$ в полюсах z_n . Ряд в (1.44) равномерно сходится в каждой области, не содержащей z_1, z_2, \dots и малую окрестность точки a_0 .

Доказательство. В случае, когда функция $f(z)$ мероморфна, т.е. $|z_n| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, аналогичная теорема доказана в [1], стр. 426.

§2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

ЧЕРЕЗ ЭЛЛИПСОБРАЗНЫЕ ДУГИ

1. В этом параграфе контуры Γ , γ и область D те же, что и во введении ($d > 0$). Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая в D функция, непрерывная в $D \cup \Gamma$ и удовлетворяющая условиям

$$\text{Re } \varphi(z) = 0, \quad z \in \gamma. \quad (2.1)$$

В этом параграфе мы описываем область аналитического продолжения через аналитическую дугу γ . Рассмотрим образ окружности (1.1) при отображении $\tau = t^{-1}$:

$$|\tau + d_0| = \rho_0, \quad (2.2)$$

где

$$d_0 = \frac{d}{R^2 - d^2}, \quad \rho_0 = \frac{R}{R^2 - d^2}. \quad (2.3)$$

Пусть D_0 - область, ограниченная окружностями (1.1) и (2.2). Поскольку $d > 0$, $R > 1 + d$, $\rho_0 > d_0$, то точка $t = 0$ не принадлежит D_0 . Поэтому функция Жуковского $\alpha_1(t)$ аналитична в D_0 и $z = \alpha_1(t)$ отображает D_0 на D . Следовательно, функция

$$\Psi(t) \equiv \varphi(\alpha_1(t)), \quad t \in D_0 \quad (2.4)$$

аналитична в области D_0 .

Известно (см. [1]), что функция Жуковского (1.2) конформно отображает внешность круга $|z| = 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$. Обратное отображение

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} \equiv \beta_1(z), \quad (2.5)$$

где $\sqrt{z^2 - 1}$ - непрерывная ветвь этого корня вне отрезка $[-1, 1]$, принимающая положительные значения при $z = x > 1$. Функция (2.5) конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность круга $|t| = 1$.

Пусть $\tilde{\gamma}$ - образ γ , а \tilde{l} - образ $\tilde{\gamma}$ при отображениях $t = \beta_1(z)$ и $\tau = t^{-1}$, соответственно. Дуги $\tilde{\gamma}$ и \tilde{l} являются открытыми. Из (2.1) следует, что

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = 0, \quad t \in \tilde{\gamma} \cup \tilde{l}. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} d_3 &= d + d_0, \quad x_0 = x_2 - d, \quad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - R^2}, \\ x_2 &= \frac{R^2 - \rho^2 + d_3^2 + \sqrt{(R^2 - \rho^2 + d_3^2)^2 - 4R^2 d_3}}{2d_3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$r_0 = \frac{\rho_0}{(x_0 - d_0)^2 - \rho_0^2}, \quad R_0 = \frac{R}{(x_0 + d)^2 - R^2}. \quad (2.8)$$

Как и в (1.41), мы можем показать, что

$$x_2 > R, \quad 0 < r_0 < R_0, \quad x_1 > R_0, \quad x_0 > R - d. \quad (2.9)$$

Согласно лемме 8 функция

$$\tau = z_1 - \frac{1}{z + z_0} \equiv \beta_2(t) \quad (2.10)$$

конформно отображает область D_0 на кольцо (1.3). Пусть открытые дуги γ_0 и I_0 являются образами $\tilde{\gamma}$ и \tilde{l} при отображении $\tau = \beta_2(t)$. Из (2.10) имеем

$$z = \frac{1}{z_1 - \tau} - z_0 \equiv \alpha_2(\tau). \quad (2.11)$$

Функция

$$\Psi_0(\tau) = \Psi(\alpha_2(\tau)) \quad (2.12)$$

аналитична в кольце (1.3) и непрерывна в $G_0 \cup \gamma_0 \cup I_0$. Из (2.6) имеем, что $\operatorname{Re} \Psi_0(\tau) = 0$ при $z \in \gamma_0 \cup I_0$.

Пусть τ_0 и R_0 определены формулами (2.8), а γ_k , I_k , Γ_k и L_k — контуры и Ω_0 — область, построенные в начале §1. Согласно лемме 1 $\Psi_0(\tau)$ имеет аналитическое продолжение через дуги γ_0 и I_0 в Ω_0 . Обозначим

$$\alpha(\tau) = \alpha_1(\alpha_2(\tau)), \quad \beta(z) = \beta_2(\beta_1(z)), \quad (2.13)$$

где $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$, $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$ определяются формулами (1.2), (2.11), (2.5) и (2.10). Так как $R > 1 + d$, $d > 0$, то $|z| > 1$, $|z^{-1}| < 1$ при $|z - d| = R$. Поэтому окружность (1.1) лежит во внешности, а (2.2) — во внутренности окружности $|z| = 1$. Следовательно, окружность $|z| = 1$ содержится в D_0 . Обозначим через δ образ окружности $|z| = 1$ при отображении $\tau = \beta_2(z)$. Ясно, что δ — окружность в кольце (1.3).

Функция $z = \alpha(\tau)$ и $\tau = \beta(z)$ конформно отображает внешность кольца δ на внешность отрезка $[-1, 1]$, а обратное отображение $\tau = \beta(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность окружности δ .

Из определения контуров Γ_k и L_k следует, что

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k+1}}{r_0^{2k}} \quad \text{при } \tau \in \Gamma_k, \quad (2.14)$$

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-1}} \quad \text{при } \tau \in L_k. \quad (2.15)$$

Следовательно, контуры Γ_k и L_j при $k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$ находятся вне, а при $k = -1, -2, \dots, j = 0, -1, \dots$ - внутри окружности δ .

Пусть $\widetilde{\Gamma}_k$ и \widetilde{L}_j - образы Γ_k и L_j ($k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$) при отображении $z = \alpha(\tau)$. Контуры $\widetilde{\Gamma}_k$ и \widetilde{L}_j при $k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$ принадлежат внешности Γ . Из (2.13), (2.14) и (2.15) следует, что при $k \rightarrow \infty$ контуры $\widetilde{\Gamma}_k$ и \widetilde{L}_j стягиваются к точке

$$a_0 = -\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right). \quad (2.16)$$

Так как $x_0 > R - d$, то точки $-x_0$ и a_0 находятся во внешности окружности (1.1) и Γ , соответственно. Следовательно, функция

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)) \quad (2.17)$$

аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ кроме, быть может, совокупности контуров $\widetilde{\Gamma}_k$ и \widetilde{L}_j ($k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$) и точки a_0 . Из (2.4), (2.12) и (2.17) имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) \quad \text{при } z \in D. \quad (2.18)$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. Если $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в $D \cup \gamma$ и удовлетворяет условию (2.1), то она по формуле (2.18) аналитически продолжается через γ всюду в комплексную плоскость, за исключением, быть может, совокупности контуров $\widetilde{\Gamma}_k$ и \widetilde{L}_j при $k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$ и точки a_0 .

2. Пусть теперь условие (2.1) заменено условием

$$|\varphi(z)| = 1, \quad z \in \gamma. \quad (2.19)$$

Рассмотрим множества

$$\omega_1 = \{z: \varphi(z) = 0, z \in D\}, \quad \omega_2 = \{t: t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}, t \in \omega_1\},$$

$$\omega_3 = \{\tau: \tau = \beta_2(t), t \in \omega_2\}, \quad \omega_4 = \{\zeta: \zeta = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k} \tau}, \tau \in \omega_3, k = 1, 2, \dots\},$$

$$\omega_5 = \{z: z = \alpha(\zeta), \zeta \in \omega_4\}.$$

Если функция $\varphi(z)$ не имеет нулей в D , то все множества $\omega_j = \emptyset$. Если в области D функция $\varphi(z)$ имеет конечное число нулей, то множества ω_1, ω_2 и ω_3 содержат конечное, а множества ω_4 и ω_5 — счетное число точек.

Пусть Ω — объединение множеств $(\widetilde{\Gamma}_k)^c \cap (\widetilde{L}_j)^c$ при $k = 0, 1, \dots, j = 1, 2, \dots$ и $(\omega_5)^c \cap (a_0)^c$, где $(\cdot)^c$ обозначает дополнение в расширенной комплексной плоскости.

Теорема 2. Если $\varphi(z)$ аналитична в области D , непрерывна в $D \cup \gamma$ и удовлетворяет условию (2.19), то она аналитически продолжается в область Ω .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, с той лишь разницей, что вместо леммы 1 нужно использовать лемму 2.

§3. ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ И ОТОБРАЖЕНИЕ

ЭЛЛИПСА НА КРУГ

Образ Γ окружности $|t| = R, R > 1$ при отображении Жуковского (1.2) является эллипсом с фокусами в $z = \pm 1$. Изменяя R от 1 до ∞ , мы получим всевозможные эллипсы с фокусами $z = \pm 1$.

Не ограничивая общности, мы будем рассматривать только эллипсы с фокусами $z = \pm 1$.

Пусть $\varphi(z)$ конформно отображает внутренность D эллипса Γ на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) > 0, \quad (3.1)$$

где z_0 — некоторая фиксированная точка из D .

В книге [1] (стр. 170) $\varphi(z)$ представлена через суперпозицию элементарных функций и эллиптические интегралы. В случае, когда точка z_0 совпадает с центром эллипса, в [2], $\varphi(z)$ разложена на простейшие дроби вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z_0 - z_k} \right), \quad (3.2)$$

где $c_k \neq 0$, точки z_k лежат вне Γ и $|z_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Ряд (3.2) сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_1, z_2, \dots . Для произвольной точки z_0 метод, приведенный в [2], существенно осложняется.

Поэтому мы разлагаем $\varphi(z)$ на простейшие дроби для произвольной точки z_0 другим методом.

Разложение $\varphi(z)$ на простейшие дроби существенно зависит от z_0 . Если z_0 не совпадает с каким-либо фокусом эллипса, то $\varphi(z)$ имеет вид (3.2), где полюсы z_k ($k = 1, 2, \dots$) зависят не только от параметров эллипса, но и от точки z_0 . Если z_0 совпадает с одним из фокусов эллипса, то функция $\varphi(z)$ разлагается в ряд вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z_0 - z_k} \right) + c_{2k} \left(\frac{1}{(z - z_k)^2} - \frac{1}{(z_0 - z_k)^2} \right) \right],$$

где $c_{2k} \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots$), $|z_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ и характер сходимости этого ряда такой же, что и у ряда (3.2).

Это означает, что конформно отображающая функция $\varphi(z)$ является мероморфной функцией со счетным числом полюсов. Все они являются полюсами второго порядка, если z_0 совпадает с одним из фокусов, и простыми полюсами — в противном случае.

Пусть $\Psi(t)$ аналитична в окрестности $t = 1$ и удовлетворяет условию

$$\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0, \quad \Psi''(1) = 2c_2 \neq 0, \quad \Psi'''(1) = 6c_3. \quad (3.3)$$

Пусть

$$\Psi_0(t) = \left[\Psi \left(\frac{\rho^2}{t} \right) \right]^{-1}, \quad (3.4)$$

где ρ — некоторая положительная постоянная.

Из (3.3) и (3.4) следует, что ρ^2 — полюс второго порядка для функции $\Psi_0(t)$.

Лемма 10. Главная часть $g(t)$ функции $\Psi_0(t)$ в точке ρ^2 определяется формулой

$$g(t) = \frac{\rho^4}{c_2(t - \rho^2)^2} + \frac{(2c_2 + c_3)\rho^2}{c_2^2(t - \rho^2)}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Согласно условиям (3.3) в окрестности $t = 1$

$$\Psi(t) = c_2(t - 1)^2 + c_3(t - 1)^3 + (t - 1)^4 \Psi_1(t), \quad (3.6)$$

где $\Psi_1(t)$ аналитична в окрестности $t = 1$.

Если z изменяется в окрестности ρ^2 , то $\rho^2(z)^{-1}$ изменяется в окрестности 1.

Поэтому из (3.6) мы имеем

$$\overline{\Psi(\rho^2/\bar{t})} = c_2 \left(\frac{\rho^2}{t} - 1\right)^2 + c_3 \left(\frac{\rho^2}{t} - 1\right)^3 + \left(\frac{\rho^2}{t} - 1\right)^4 \overline{\Psi_1(\rho^2/\bar{t})} \quad (3.7)$$

при $|t - \rho^2| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно мало. Из (3.4) и (3.7) следует справедливость формулы (3.5). Лемма 10 доказана.

Пусть функция $\Phi(t)$ аналитична в окрестности $t_0 \neq 0$ и удовлетворяет условию

$$\Phi(t_0) = 0, \quad \Phi'(t_0) = c_0, \quad (3.8)$$

где $c_0 \neq 0$ — некоторая комплексная постоянная.

Пусть для некоторой положительной постоянной ρ

$$\Phi_0(t) = \left[\overline{\Phi\left(\frac{\rho^2}{\bar{t}}\right)} \right]^{-1}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что точка $\zeta_0 = \rho^2/\bar{t}_0$ является простым полюсом функции $\Phi_0(t)$.

Лемма 11. Главная часть $g_0(t)$ функции $\Phi_0(t)$ в точке ζ_0 определяется формулой

$$g_0(t) = -\frac{\rho^2}{\bar{c}_0 \bar{t}_0 (t - \zeta_0)}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 10.

Пусть функция $\Psi_1(t)$ аналитична в окрестности точки t_0 ($|t_0| > 1$) кроме точки t_0 и главная часть $g_1(t)$ функции $\Psi_1(t)$ в точке t_0 определяется формулой

$$g_1(t) = \frac{c_{-1}}{t - t_0} + \frac{c_{-2}}{(t - t_0)^2}, \quad (3.10)$$

где c_{-1} и c_{-2} — некоторые постоянные, $|c_{-1}| + |c_{-2}| \neq 0$.

Пусть

$$z_0 = \frac{1}{2} \left(t_0 + \frac{1}{t_0} \right).$$

Так как $|t_0| > 1$, то точка z_0 находится во внешности отрезка $[-1, 1]$ и $\beta_1(z_0) = t_0$ (см. (2.5)). Поэтому точка z_0 является изолированной особой точкой для функции $\Psi_1(\beta_1(z))$.

Лемма 12. Главная часть $g_2(t)$ функции $\Psi_1(\beta_1(z))$ в точке z_0 определяется формулой

$$g_2(t) = \frac{c_1}{z - z_0} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2},$$

где

$$c_1 = \frac{c_{-1} \sqrt{z_0^2 - 1}}{t_0} + \frac{c_{-2}}{t_0^3}, \quad c_2 = \frac{c_{-2}(z_0^2 - 1)}{t_0^2}.$$

Доказательство. Так как $\beta_1(z_0) = t_0$, то из (2.5) имеем

$$(\beta_1(z) - t_0)^{-1} = (\beta_1(z) - \beta_1(z_0))^{-1} = \frac{\Psi_2(z)}{z - z_0}, \quad (3.11)$$

$$\Psi_2(z) = \left[1 + \frac{z + z_0}{\sqrt{z^2 - 1} + \sqrt{z_0^2 - 1}} \right]^{-1}.$$

Ясно, что функция $\Psi_2(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 и

$$\Psi_2(z) = \Psi_2(z_0) + \Psi_2'(z_0)(z - z_0) + \Psi_3(z)(z - z_0)^2, \quad (3.12)$$

где

$$\Psi_2(z_0) = \frac{\sqrt{z_0^2 - 1}}{t_0}, \quad \Psi_2'(z_0) = \frac{1}{2t_0^2 \sqrt{z_0^2 - 1}}, \quad (3.13)$$

а $\Psi_3(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 . Из (3.10) имеем

$$\Psi_1(t) = \frac{c_{-1}}{t - t_0} + \frac{c_{-2}}{(t - t_0)^2} + \Psi_4(t), \quad (3.14)$$

где $\Psi_4(z)$ аналитична в окрестности точки t_0 .

Если точка z изменяется в окрестности точки z_0 ($z \neq z_0$), то $\beta_1(z)$ изменяется в окрестности точки t_0 ($\beta_1(z) \neq t_0$). Поэтому, из (3.14) имеем

$$\Psi_1(\beta_1(z)) = \frac{c_{-1}}{\beta_1(z) - t_0} + \frac{c_{-2}}{(\beta_1(z) - t_0)^2} + \Psi_4(\beta_1(z)), \quad (3.15)$$

где функция $\Psi_4(\beta_1(z))$ аналитична в окрестности точки z_0 .

Из соотношений (3.11) — (3.13) и (3.15) следует справедливость леммы 12.

Пусть $\varphi(t)$ аналитична в кольце

$$R^{-1} < |t| < R, \quad R > 1 \quad (3.16)$$

и удовлетворяет условиям

$$|\varphi(1)| = 0, \quad |\varphi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R, \quad (3.17)$$

$$\text{и} \quad |t| = R^{-1}, \quad |\varphi(t)| \neq 0 \quad \text{при} \quad t \neq 1, \quad R^{-1} \leq |t| \leq R.$$

Обозначим через G_k кольцо

$$R^{2k-1} < |t| < R^{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.11)$$

через \overline{G}_k - замкнутое кольцо $R^{2k-1} \leq t \leq R^{2k+1}$, а через γ_k - окружность $|t| = R^{2k+1}$.

Лемма 13. *Функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек $t_k = R^{4k-2}$, $k = 1, 2, \dots$, причем аналитическое продолжение осуществляется функцией*

$$\varphi(z) = \varphi(z R^{-2k}) \quad \text{при } z \in \overline{G}_k, \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (3.19)$$

$$\varphi(z) = \left[\overline{\varphi(R^{2k}/\overline{z})} \right]^{-1} \quad \text{при } z \in \overline{G}_k, \quad k = 1, 3, \dots \quad (3.20)$$

Доказательство. Согласно принципу симметрии аналитического продолжения (см. [1], стр. 158) (3.20) при $k = 1$ представляет собой аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ через окружность $|z| = R$ в кольцо G_1 . Из (3.17) и (3.20) следует, что при $k = 1$ функция $\varphi(z)$ аналитична в $G_0 \cup \gamma_0 \cup G_1$ за исключением точек $z = R^2$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= 1 \quad \text{при } |z| = R^3, \\ |\varphi(z)| &\neq 0 \quad \text{при } z \in \overline{G}_1, \quad z \neq R^2, \quad \lim_{z \rightarrow R^2} |\varphi(z)| \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.21) следует, что функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R^3$ в кольцо G_2 по формуле

$$\varphi(z) = \left[\overline{\varphi(R^6/\overline{z})} \right]^{-1}, \quad z \in G_2. \quad (3.22)$$

Пусть $z \in G_2$. Тогда $R^6 z^{-1} \in G_1$. Подставляя $R^6 z^{-1}$ в (3.20) (при $k = 1$) вместо z , получим

$$\overline{\varphi(R^6/\overline{z})} = \left[\overline{\varphi(z R^{-4})} \right]^{-1}, \quad z \in G_2. \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) получим формулу (3.19) при $k = 2$. Аналогично мы докажем справедливость леммы 13.

Пусть функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце (3.16), непрерывна в замкнутом кольце \overline{G}_0 и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t_{10})| = 0, \quad |\Psi(t_{20})| = 0, \quad |\Psi(t)| = 1 \quad \text{при } |t| = R \quad \text{и} \quad |t| = R^{-1},$$

$$|\Psi(t)| \neq 0 \quad \text{при } t \neq t_{10}, t_{20} \quad \text{и} \quad R^{-1} \leq |t| \leq R,$$

где t_{10} и t_{20} - фиксированные точки в кольце (3.16). Пусть G_k - кольцо (3.18).

Лемма 14. Функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|t| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек

$$t_{1k} = \frac{R^{4k-2}}{t_{10}}, \quad t_{2k} = \frac{R^{4k-2}}{t_{20}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем аналитическое продолжение осуществляется по формулам (3.19) и (3.20).

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Пусть функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце $G_0 : r_0 < t < R_0$, непрерывна в замкнутом кольце $\overline{G_0}$ и удовлетворяет условиям

$$\Psi(t) = 1 \quad \text{при} \quad |t| = r_0, \quad |t| = R_0 \quad \text{и} \quad \Psi(t_0) = 0, \quad \Psi'(t_0) = 0,$$

$$\Psi''(t_0) = 2\mu_2, \quad \Psi'''(t_0) = 6\mu_3, \quad \Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in G_0, \quad t \neq t_0,$$

где $t_0 \in G_0$, $\text{Im } t_0 = 0$, а $\mu_2 \neq 0$, μ_3 - вещественные постоянные.

Аналогично леммам 10 и 13 доказывается

Лемма 15. Функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|t| = R_0$ во внешность этой окружности $|t| > R_0$ за исключением точек $t_k = R_0^{2k} r_0^{-2k+2} t_0^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Главная часть $g_k(t)$ этой функции в точке t_k определяется формулой

$$g_k(t) = \frac{c_{k1}}{t - t_k} + \frac{c_{k2}}{(t - t_k)^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$c_{k1} = \frac{2t_k\mu_2 + t_k\mu_1 t_0}{\mu_2^2 t_0^2}, \quad c_{k2} = \frac{t_k^2}{\mu_2 t_0^2}.$$

Пусть $\Psi(t)$ аналитична в окрестности точки $t = \rho$ (без этой точки), а главная часть $g(t)$ функции $\Psi(t)$ в точке $t = \rho$ определяется формулой

$$g(t) = \frac{c_1}{t - \rho} + \frac{c_2}{(t - \rho)^2}, \quad (3.24)$$

где c_1 и $c_2 \neq 0$ - постоянные.

Пусть $\alpha_0(z)$ и $\delta_0(z)$ аналитичны в окрестности точки z_0 и бесконечно удаленной точки, соответственно, и удовлетворяют условиям

$$\alpha_0(z_0) = \rho, \quad \alpha'_0(z_0) \neq 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \delta_0(z) = \rho.$$

Пусть в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\delta_0(z) = \rho + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{\delta_1(z)}{z^3}, \quad (3.25)$$

где $c_{-1} \neq 0$ и c_{-2} — постоянные, а $\delta_1(z)$ аналитична и ограничена.

Ясно, что точка z_0 и бесконечно удаленная точка являются полюсами второго порядка для функций $\Psi(\alpha_0(z))$ и $\Psi(\delta_0(z))$, соответственно.

Лемма 16. Главная часть $g_1(z)$ функции $\Psi(\delta_0(z))$ в бесконечно удаленной точке определяется формулой $g_1(z) = c_{11}z + c_{12}z^2$, где

$$c_{11} = \frac{c_1}{c_{-1}} - \frac{2c_2 c_{-2}}{c_{-1}^3}, \quad c_{12} = \frac{c_2}{c_{-1}^2}.$$

Доказательство. Согласно (3.24) имеем

$$\Psi(t) = \frac{c_1}{t - \rho} + \frac{c_2}{(t - \rho)^2} + \Psi_0(t) \quad \text{при } 0 < |t - \rho| < \varepsilon, \quad (3.26)$$

где $\Psi_0(t)$ аналитична и ограничена в окрестности точки ρ , а ε — положительное число.

Пусть точка $|z|$ изменяется в окрестности бесконечности. Тогда $\delta_0(z)$ изменяется в окрестности ρ ($\delta_0(z) \neq \rho$), см. (3.25). Поэтому из (3.26) имеем

$$\Psi(\delta_0(z)) = \frac{c_1}{\delta_0(z) - \rho} + \frac{c_2}{(\delta_0(z) - \rho)^2} + \Psi_0(\delta_0(z)) \quad \text{при } 0 < |t - \rho| < \varepsilon, \quad (3.27)$$

где $\Psi_0(\delta_0(z))$ аналитична и ограничена в окрестности бесконечности.

Из (3.25) следует

$$\frac{c_1}{\delta_0(z) - \rho} = \frac{z}{c_{-1}} + \delta_2(z), \quad \frac{1}{(\delta_0(z) - \rho)^2} = -\frac{2c_{-2}z}{c_{-1}^3} + \frac{z^2}{c_{-1}^2} + \delta_3(z), \quad (3.28)$$

где $\delta_2(z)$ и $\delta_3(z)$ аналитичны и ограничены в окрестности бесконечности. Из (3.27) и (3.28) следует справедливость леммы 16.

Лемма 17. Главная часть $g_2(z)$ функции $\Psi(\alpha_0(z))$ в ее полюсе z_0 определяется формулой

$$g_2(z) = \frac{c_{21}}{z - z_0} + \frac{c_{22}}{(z - z_0)^2},$$

где

$$c_{21} = \frac{c_1}{\alpha'(z_0)} - \frac{c_2 \alpha''(z_0)}{(\alpha'(z_0))^3}, \quad c_{22} = \frac{c_2}{(\alpha'(z_0))^2}.$$

Доказательство. При $\alpha_0(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ утверждение леммы 17 совпадает с утверждением леммы 12. Для произвольной функции $\alpha_0(z)$ лемма 17 доказывается аналогично.

§4. РАЗЛОЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Пусть D - внутренность эллипса Γ с фокусами $z = \pm 1$, а функция $\varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(1) = 0, \quad (4.1)$$

$$\varphi'(1) > 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \quad (4.3)$$

где $\alpha_1(t)$ - функция Жуковского (см. (1.2)). Функция $\zeta = \alpha_1(t)$ отображает кольцо (3.16) на область D . Так как $\alpha_1(t)$ аналитична всюду кроме точки $t = 0$, а $\varphi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $D \cup \Gamma$, то функция $\Psi(t)$ аналитична в кольце (3.16) и непрерывна в ее замыкании.

Из определения $\varphi(z)$ имеем

$$|\varphi(z)| = 1 \text{ при } z \in \Gamma, \quad \varphi(z) \neq 0 \text{ при } z \in D, \quad z \neq 1. \quad (4.4)$$

Из (4.1) — (4.4) следует

$$|\Psi(t)| = 1 \text{ при } |t| = R \text{ и } |t| = R^{-1}, \quad (4.5)$$

$$\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0, \quad (4.6)$$

$$\Psi'(1) = \varphi'(1), \quad \Psi''(1) = -3\varphi'(1), \quad (4.7)$$

$$\Psi(t) \neq 0 \text{ при } R^{-1} \leq |t| \leq R, \quad t \neq 1. \quad (4.8)$$

Согласно лемме 13 функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек $t_k = R^{4k-2}$, $k = 1, 2, \dots$. Так как точка t_k принадлежит кольцу G_{2k-2} (см. (3.18)), то согласно формуле (3.20) имеем

$$\Psi(t) = \left[\Psi \left(\frac{R^{4k-2}}{t} \right) \right]^{-1} \text{ при } |t - t_k| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon < 1$ - положительное число.

Следовательно, функция $\Psi(t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 10. В нашем случае постоянные ρ , c_2 и c_3 в лемме 10 определяются формулами

$$\rho^2 = R^{4k-2} = t_k, \quad c_2 = \frac{1}{2} \varphi'(1), \quad c_3 = -\frac{1}{2} \varphi'(1).$$

Поэтому, согласно (3.5), главная часть $g_k(t)$ функции $\Psi(t)$ в ее полусах t_k определяется формулой

$$g_k(t) = \frac{2t_k^2}{\varphi'(1)(t-t_k)} + \frac{2t_k}{\varphi'(1)(t-t_k)^2}. \quad (4.9)$$

Из (4.3) имеем

$$\varphi(z) = \Psi(\beta_1(z)), \quad z \in D, \quad (4.10)$$

где $\beta_1(z)$ определяется формулой (2.5).

Следовательно, при помощи формулы (4.10) функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексную плоскость, кроме точек

$$z_k = \frac{1}{2} \left(t_k + \frac{1}{t_k} \right) = \frac{1}{2} (R^{4k-2} + R^{2-4k}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Согласно формулам (4.9), (4.10) и лемме 12 главная часть $f_k(z)$ функции $\varphi(z)$ в точке z_k определяется формулой

$$f_k(z) = \omega_k(z) \frac{1}{\varphi'(1)}, \quad (4.12)$$

где

$$\omega_k(z) = \frac{c_{1k}}{z-z_k} + \frac{c_{2k}}{(z-z_k)^2}, \quad (4.13)$$

$$c_{1k} = \frac{2}{t_k^2} + 2t_k \sqrt{z_k^2 - 1}, \quad c_{2k} = \frac{2(z_k^2 - 1)}{t_k}.$$

Пусть γ_k ($k = 1, 2, \dots$) — образ окружности $|t| = R^{2k+1}$ при отображении $z = \alpha_1(t)$.

Из формул (4.5), (3.19) и (3.20) следует, что

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R^{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$|\varphi(z)| = |\Psi(\beta_1(z))| = 1 \quad \text{при} \quad z \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применяя теорему 2 из [1] (стр. 426) и формулу (4.12), получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\varphi'(1)} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k(z) - \omega_k(1)), \quad (4.14)$$

где $\omega_k(z)$ определяется формулой (4.13), причем ряд в (4.14) сходится равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_k ($k = 1, 2, \dots$). В частности, из (4.14) следует, что функция $\varphi(z)$ мероморфна со счетным числом полюсов второго порядка z_k . Из (4.11) следует, что полюсы z_k находятся на положительной оси z и монотонно стремятся к $+\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Дифференцируя обе части (4.14) в точке $z = 1$, получим

$$[\varphi'(1)]^2 = A. \tag{4.15}$$

где $A = \sum_{k=1}^{\infty} \omega'_k(1)$. Отсюда следует, что

$$\varphi'(1) = \sqrt{A}. \tag{4.16}$$

Таким образом, завершается разложение на простейшие дроби (4.14).

2. Пусть $\zeta = \varphi_0(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям $\varphi_0(-1) = 0$ и $\varphi'_0(-1) > 0$. Легко проверить, что

$$\varphi_0(z) = -\varphi(-z). \tag{4.17}$$

Подставляя $\varphi(z)$ из (4.14) в (4.17), получим

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k(-z) + \omega_k(1)).$$

Таким образом, функция $\varphi_0(z)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ всюду в комплексную плоскость за исключением точек $-z_k$, где z_k определяются формулой (4.11). Эти точки также являются полюсами второго порядка и монотонно стремятся к $-\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

3. Покажем, что если точка z_0 , где $\varphi(z_0) = 0$ и $\varphi'(z_0) > 0$, отлична от фокусов эллипса, то разложение на простейшие дроби существенно отличается от предыдущего случая. Пусть

$$t_{10} = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}, \quad t_{20} = z_0 - \sqrt{z_0^2 - 1} = \frac{1}{t_{10}}.$$

Если $z_0 \in [-1, 1]$, то

$$\sqrt{z_0^2 - 1} = i\sqrt{1 - z_0^2}, \quad \sqrt{1 - z_0^2} \geq 0.$$

Так как $z_0 \in D$, $z_0 \neq +1$, то $1 < |t_{10}| < R$ и $R^{-1} < |t_{20}| < 1$. Аналогично (4.5) — (4.8) получим, что функция $\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t))$ аналитична в кольце (3.16), непрерывна в его замыкании и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |t| = R \quad \text{и} \quad |t| = R,$$

$$\Psi(t_{10}) = 0, \quad \Psi(t_{20}) = 0, \quad (4.18)$$

$$\Psi'(t_{10}) = \varphi'(z_0) \left(1 - \frac{1}{t_{10}^2}\right), \quad \Psi'(t_{20}) = \varphi'(z_0) \left(1 - \frac{1}{t_{20}^2}\right), \quad (4.19)$$

$$\Psi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad R^{-1} \leq |t| \leq R, \quad t \neq t_{10}, t_{20}.$$

Согласно лемме 14, функция $\Psi(t)$ аналитически продолжается через окружность $|z| = R$ во внешность этой окружности за исключением точек t_{1k} и t_{2k} ($k = 1, 2, \dots$):

$$t_{1k} = \frac{R^{4k-4}}{t_{10}}, \quad t_{2k} = \frac{R^{4k-4}}{t_{20}}.$$

Поэтому аналитическое продолжение функции $\Psi(t)$ в окрестностях точек t_{1k} и t_{2k} определяется формулой

$$\Psi(t) = \left[\Psi \left(\frac{R^{4k-4}}{t} \right) \right]^{-1}. \quad (4.20)$$

Применяя лемму 11 для функции (4.20) и учитывая условия (4.18), (4.19), мы находим главные части функции $\Psi(t)$ в точках t_{1k} и t_{2k} :

$$g_{1k}(t) = \frac{R^{4k-4}}{\varphi'(z_0) (1 - t_{10}^2) (t - t_{1k})}, \quad g_{2k}(t) = \frac{R^{4k-4}}{\varphi'(z_0) (1 - t_{20}^2) (t - t_{2k})}. \quad (4.21)$$

Следовательно, функция $\Psi(\beta_1(z))$ аналитична всюду в комплексной плоскости за исключением точек

$$z_{1k} = \frac{1}{2} \left(t_{1k} + \frac{1}{t_{1k}} \right), \quad z_{2k} = \frac{1}{2} \left(t_{2k} + \frac{1}{t_{2k}} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

и совпадает с $\varphi(z)$ в области D .

Согласно лемме 12 и формуле (4.21) главные части функции $\varphi(z) = \Psi(\beta_1(z))$ в точках z_{1k} и z_{2k} определяются формулами

$$f_{1k}(z) = \frac{\omega_{1k}(z)}{\varphi'(z_0)}, \quad f_{2k}(z) = \frac{\omega_{2k}(z)}{\varphi'(z_0)}, \quad (4.23)$$

где

$$\omega_{jk}(z) = \frac{R^{4k-4} \sqrt{z_{jk}^2 - 1}}{(1 - \bar{t}_{j0} t_{jk} (z - z_{jk}))}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Используя (4.23), аналогично формуле (4.14) получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_{1k}(z) + \omega_{2k}(z) - \omega_{1k}(z_0) - \omega_{2k}(z_0)), \quad (4.25)$$

где $\omega_{1k}(z)$ и $\omega_{2k}(z)$ определяются формулами (4.24) и

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} (\omega'_{1k}(z_0) + \omega'_{2k}(z_0)), \quad A > 0.$$

Ряд в (4.25) равномерно сходится в любой ограниченной области, не содержащей z_{1k} и z_{2k} . Точки z_{1k} и z_{2k} находятся вне контура Γ и $|z_{1k}| \rightarrow \infty$, $|z_{2k}| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow +\infty$, т.е. функция $\varphi(z)$ мероморфна со счетным числом простых полюсов.

Пусть теперь условие $\varphi'(z_0) > 0$ заменено условием

$$\arg \varphi'(z_0) = \theta.$$

Тогда очевидно, что функция $\varphi(z) \exp(i\theta)$ является искомым конформным отображением, где $\varphi(z)$ — построенное выше конформное отображение при $\theta = 0$.

Таким образом, конформное отображение внутренности эллипса на круг всегда является мероморфной функцией со счетным числом простых полюсов, причем все они являются полюсами второго порядка, если отображение переводит один из фокусов эллипса в центр круга, в противном случае все полюсы простые.

4. Опишем расположение полюсов функции $\varphi(z)$. Возможны следующие случаи :

Случай 1. z_0 вещественно и $z_0 \geq 1$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ положительны.

Случай 2. z_0 вещественно и $z_0 \leq -1$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ отрицательны.

Случай 3. z_0 чисто мнимое или $z_0 = 0$. Тогда все полюсы функции $\varphi(z)$ чисто мнимые, причем существует счетное число полюсов с положительными и отрицательными мнимыми частями.

Случай 4. z_0 вещественно и $0 < z_0 < 1$, или $\operatorname{Re} z_0 > 0$ и $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Тогда полюсы функции $\varphi(z)$ находятся на правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{A_0^2} - \frac{y^2}{B_0^2} = 1, \quad (4.26)$$

где

$$A_0 = \frac{\operatorname{Re} t_0}{|t_0|^2}, \quad B_0 = \frac{\operatorname{Im} t_0}{|t_0|^2}, \quad t_0 = z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}. \quad (4.27)$$

Случай 5. z_0 вещественно и $-1 < z_0 < 0$, или $\operatorname{Re} z_0 < 0$ и $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. Тогда полюсы функции $\varphi(z)$ находятся на левой ветви гиперболы (4.26).

§5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТЬ

1. Пусть D - область, рассмотренная в начале работы, а Γ - ее граница ($d > 0$). Пусть, далее, $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) (a - z) = 1, \quad \varphi(b) = 0, \quad (5.1)$$

где a и b определяются формулами (1.26).

Согласно лемме 7 такое конформное отображение существует и единственно.

Ясно, что

$$\operatorname{Re} \varphi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \Gamma, \quad z \neq a. \quad (5.2)$$

Пусть постоянные $d_0, \rho_0, z_0, z_1, r_0, R_0$ и функции $\alpha(z), \beta(z)$ определяются из равенств (2.3), (2.7), (2.8) и (2.13). Положим

$$r_k = \frac{R_0^{k+1}}{r_0^k}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.3)$$

$$z_k = \alpha(r_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.4)$$

Согласно теореме 1 функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексной плоскости кроме последовательности точек $z_k, k = 0, 1, \dots$ и точки $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ (см. (2.16)). Докажем, что точки z_k являются простыми полюсами функции $\varphi(z)$ и напомним главные части этой функции в ее полюсах. Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \quad (5.5)$$

где $a_1(t)$ — функция Жуковского (1.2). $\Psi(t)$ аналитична в области D_0 , ограниченной окружностями (1.1) и (2.2). Из (5.5) следует, что $\Psi(t)$ непрерывна в замкнутой области D_0 кроме точек $R+d$ и $\frac{1}{R+d}$. Из (5.1) и (5.2) имеем

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t-d| = R \quad \text{и} \quad |t+d_0| = \rho_0, \quad t \neq (R+d), \quad \frac{1}{R+d}, \quad (5.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow R+d} \Psi(t) (t - R - d) = -\frac{2(R+d)^2}{(R+d)^2 - 1}, \quad (5.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow (R+d)^{-1}} \Psi(t) (t - (R+d)^{-1}) = -\frac{2}{(R+d)^2 - 1}. \quad (5.8)$$

Пусть γ_0 и I_0 — окружности $|\tau| = R_0$ и $|\tau| = r_0$, соответственно. Согласно лемме 8 функция $t = \alpha_2(\tau)$ (см. (2.11)) конформно отображает кольцо (1.5) в область D_0 , а точки $\tau = R_0$ и $\tau = r_0$ — в точки $t = R+d$ и $t = \frac{1}{R+d}$, соответственно.

Поэтому функция

$$\Psi_0(\tau) = \Psi(\alpha_2(\tau)) \quad (5.9)$$

аналитична в кольце (1.3) и непрерывна в ее замыкании кроме точек r_0 и R_0 .

Так как $\alpha_2(\tau)$ — обратная к $\beta_2(t)$ функция (см. (2.10)), то

$$\frac{1}{\alpha'(R_0)} = \beta'_2(R+d) = (R+d+x_0)^2, \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{\alpha'(r_0)} = \beta'_2\left(\frac{1}{R+d}\right) = ((R+d)^{-1} + x_0)^2. \quad (5.11)$$

Из (5.6) и (5.9) имеем

$$\operatorname{Re} \Psi_0(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| = R_0 \quad \text{и} \quad |\tau| = r_0, \quad \tau \neq R_0, r_0.$$

Из леммы 5 и соотношений (5.7) — (5.11) следует

$$\lim_{\tau \rightarrow R_0} \Psi_0(\tau) (\tau - R_0) = c_0, \quad \lim_{\tau \rightarrow r_0} \Psi_0(\tau) (\tau - r_0) = c_{-1},$$

где

$$c_0 = \frac{2(R+d)^2}{((R+d)^2 - 1)(R+d+x_0)^2}, \quad c_{-1} = \frac{2(R+d)^2}{((R+d)^2 - 1)(1+x_0(R+d))^2}.$$

Функция $\Psi_0(\tau)$ удовлетворяет всем условиям леммы 14. Поэтому она аналитически продолжается в область $|z| > R_0$ кроме множества точек (5.3), причем

$$\lim_{\tau \rightarrow r_k} \Psi_0(\tau) (\tau - r_k) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.12)$$

где

$$c_k = \begin{cases} c_0 \frac{R_0^k}{r_0^k}, & \text{если } k = 0, 2, \dots, \\ c_{-1} \frac{R_0^{k+1}}{r_0^{k+1}}, & \text{если } k = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

Теперь рассмотрим функцию

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)), \quad (5.14)$$

где $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ определяются формулой (2.13).

Функция $\varphi_0(z)$ аналитична всюду в комплексной плоскости кроме точек (5.4),

причем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad z \in D. \quad (5.15)$$

Так как $x_1 > R_0 = r_0$ и последовательность r_k монотонно стремится к ∞ при $k \rightarrow +\infty$, то возможны следующие два случая :

$$1) r_k \neq x_1 \quad \text{при } k = 0, 1, \dots; \quad (5.16)$$

$$2) r_k \neq x_1 \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, \quad k \neq m, \quad r_m = x_1,$$

где m — некоторое натуральное число.

Функция $\alpha(\tau)$ аналитична в области $|\tau| \geq R_0$ кроме точки x_1 и

$$\lim_{\tau \rightarrow x_1} |\alpha(\tau)| = +\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow x_1} \alpha(\tau) (\tau - x_1) = -1, \quad (5.17)$$

$$\alpha(\tau) \rightarrow a_0 \quad \text{при } |\tau| \rightarrow +\infty,$$

где a_0 определяется формулой (2.16).

В обоих случаях 1) и 2) все особые точки z_k конечны кроме точки z_m , которая в случае 2) является бесконечно удаленной точкой. В обоих случаях $z_k \rightarrow a_0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Пусть выполняется условие (5.16). Применяя лемму 5 для функции $\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z))$ и используя предел (5.12), получим

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \varphi_0(z) (z - z_k) = \frac{c_k}{\beta'(z_k)} = c_k \alpha'(\tau_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где c_k определяются формулами (5.13). Таким образом, главная часть функции $\varphi(z)$ в ее полюсах z_k определяется формулой

$$g_k(z) = \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{z - z_k}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.18)$$

Легко убедиться, что

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \beta(z) = z_1. \quad (5.19)$$

Поэтому при условии (5.16) существует предел $c = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \varphi_0(z) = \Psi_0(z_1)$, и главные части функции $\varphi_0(z) - c$ в ее полюсах z_k также определяются формулой (5.18). Согласно принципу симметрии аналитического продолжения имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Psi_0(\tau) &= 0 \quad \text{при} \quad |\tau| = \tau_k, \quad \tau \neq \tau_k, \\ \Psi_0(\tau) &= -\overline{\Psi_0(\tau_k^2 \bar{\tau}^{-1})} \quad \text{при} \quad r_0 < \tau < \frac{\tau_k^2}{r_0}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Из (5.20) получим

$$\max_{|\tau|=b_k} |\Psi_0(\tau)| = B_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$b_k = \frac{2\tau_k^2}{R_0 + r_0}, \quad B_0 = \max |\Psi_0(\tau)| \quad \text{при} \quad |\tau| = \frac{1}{2}(r_0 + R_0).$$

Пусть γ_k - образ окружности $|\tau| = b_k$ ($k = 1, 2, \dots$) при отображении $z = \alpha(\tau)$.

Так как $\beta(z)$ - функция, обратная к функции $\alpha(\tau)$, то из (5.14) следует

$$\max_{z \in \gamma_k} |\varphi_0(z)| = \max_{z \in \gamma_k} |\Psi_0(\beta(z))| = \max_{|\tau|=b_k} |\Psi_0(\tau)| = B_0.$$

Отметим, что контуры γ_k стягиваются к a_0 при $k \rightarrow +\infty$. Применяя лемму 9, получим

$$\varphi_0(z) - c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \quad (5.21)$$

Подставляя $z = b$ в (5.21), и учитывая, что $\varphi_0(b) = \varphi(b) = 0$, получим

$$c = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{b - z_k}. \quad (5.22)$$

Из (5.15), (5.21) и (5.22) имеем

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{z - z_k} + c. \quad (5.23)$$

Пусть $\zeta_m = z_1$ для некоторого натурального числа m . Из (5.14), (5.19), (5.12) и (5.17) получим

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_0(z)}{z} = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{\Psi_0(\beta(z))}{z} = \lim_{\tau \rightarrow z_1} \frac{\Psi_0(\tau)}{\alpha(\tau)} = \lim_{\tau \rightarrow z_1} \frac{\Psi_0(\tau)(\tau - \tau_m)}{\alpha(\tau)(\tau - z_1)} = -c_m. \quad (5.24)$$

Так как $z_k \rightarrow a_0$ при $k \rightarrow +\infty$, $k > m$, то бесконечно удаленная точка является особой точкой. Из (5.24) следует, что эта точка является простым полюсом и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\varphi_0(z) = -c_m z + c + \varphi_1(z),$$

где c — некоторая постоянная, $\varphi_1(z)$ аналитична в окрестности бесконечности и $\varphi_1(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow +\infty$.

Точки z_k ($k = 0, 1, \dots, k \neq m$) являются полюсами $\varphi_0(z) + c_m z - c$, а соответствующие главные части определяются формулой (5.18). Поэтому, аналогично формуле (5.21), получим

$$\varphi_0(z) + c_m z - c = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \quad (5.25)$$

Подставляя $z = b$ в (5.25) и учитывая условие $\varphi_0(b) = \varphi(b) = 0$, получим

$$c = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{b - z_k} + c_m b. \quad (5.26)$$

Следовательно

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) = c - c_m z + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{c_k \alpha'(\tau_k)}{z - z_k}. \quad (5.27)$$

Таким образом, получили теорему.

Теорема 3. Если выполнено условие (5.16), то конформное отображение $\varphi(z)$ определяется формулой (5.23). Если же для некоторого натурального числа m $\tau_m = z_1$, то $\varphi(z)$ определяется формулой (5.27).

2. Пусть теперь функция $\zeta = \varphi_1(z)$, конформно отображающая D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$, удовлетворяет условиям

$$\lim_{z \rightarrow a} |\varphi_1(z)| = +\infty, \quad \varphi_1(z_0) = \zeta_0, \quad (5.28)$$

где $z_0 \in D$ и ζ_0 – фиксированные точки, $\operatorname{Re} \zeta_0 > 0$.

Функцию $\varphi_1(z)$ ищем в виде

$$\varphi_1(z) = c_0 \varphi(z) + i c_1, \quad (5.29)$$

где $\varphi(z)$ – построенное выше конформное отображение, а $c_0 > 0$ и c_1 – вещественные постоянные. Функция (5.29) удовлетворяет первому условию в (5.28). Подставляя $\varphi_1(z)$ из (5.29) во второе равенство в (5.28), получим

$$c_0 = \frac{\operatorname{Re} \zeta_0}{\operatorname{Re} \varphi(z_0)}, \quad c_1 = \operatorname{Im} \zeta_0 - c_0 \operatorname{Im} \varphi(z_0).$$

Так как $\operatorname{Re} \zeta_0 > 0$ и $\operatorname{Re} \varphi(z_0) > 0$, то $c_0 > 0$. Аналогично можно построить конформное отображение области D на полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$, если первое условие в (3.28) заменить условием

$$\lim_{z \rightarrow z_1} |\varphi_1(z)| = +\infty,$$

где z_1 – фиксированная точка на Γ .

§6. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА КРУГ

1. Пусть $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на круг $|\zeta| = 1$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0. \quad (6.1)$$

Пусть постоянные $d_0, \rho_0, x_0, x_1, \tau_0, R_0, a_0$ и функции $\alpha_1(t), \alpha_2(\tau), \beta_1(z), \beta_2(t), \alpha(t)$ и $\beta(t)$ те же, что и в §2. Положим

$$\zeta_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k} \beta_2(t)}, \quad z_k = \alpha(\zeta_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Согласно теореме 2 функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается всюду в комплексную плоскость за исключением точек z_k, \bar{z}_k и точки $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}_k$.

Теперь определим главные части $\varphi(z)$ в ее особых точках z_k и \bar{z}_k . Для этого рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)). \quad (6.3)$$

Ясно, что

$$|\varphi(z)| = 1, \quad z \in \Gamma, \quad (6.4)$$

$$\varphi(z) \neq 0 \text{ при } z \neq 0, \quad z \in D \cup \Gamma. \quad (6.5)$$

Из (6.1), (6.3) — (6.5) следует, что функция $\Psi(t)$ аналитична в области D_0 , ограниченной окружностями (1.1), (2.2), непрерывна в замкнутой области \bar{D}_0 и удовлетворяет условиям

$$|\Psi(t)| = 1 \text{ на окружностях (1.1) и (2.2),}$$

$$\Psi(\pm i) = 0, \quad \Psi'(\pm i) = \varphi'(0), \quad \Psi(t) \neq 0 \text{ при } t \in D_0, \quad t \neq \pm i.$$

Тогда функция $\Psi_0(\tau) \equiv \Psi(\alpha_2(\tau))$ аналитична в кольце (1.3), непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(\tau)| = 1 \text{ при } |\tau| = r_0 \text{ и } |\tau| = R_0,$$

$$\Psi_0(\tau_0) = 0, \quad \Psi_0(\bar{\tau}_0) = 0, \quad \Psi_0'(\tau_0) = c_0, \quad \Psi_0'(\bar{\tau}_0) = \bar{c}_0,$$

$$\Psi_0(\tau) \neq 0 \text{ при } \tau \in G_0, \quad \tau \neq \tau_0, \bar{\tau}_0,$$

где

$$\tau_0 = \beta_2(i), \quad c_0 = \frac{\Psi'(0)}{\beta_2'(i)} = \varphi'(0) (x_0 + i)^2.$$

Согласно лемме 4 функция $\Psi_0(\tau)$ аналитически продолжается в область $|\tau| > R_0$ за исключением точек $\zeta_k, \bar{\zeta}_k, k = 1, 2, \dots$ и бесконечно удаленной точки, существуют пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow \zeta_k} \Psi_0(\tau) (\tau - \zeta_k) = a_k \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow \bar{\zeta}_k} \Psi_0(\tau) (\tau - \bar{\zeta}_k) = \bar{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.6)$$

где ζ_k определяется формулой (6.2)

$$a_k = -\frac{R_0^{2k}}{\varphi'(0) (x_0 - i)^2 r_0^{2k-2} \tau_0^2}.$$

Пусть

$$z_k = \alpha(\zeta_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Функция

$$\varphi_0(z) = \Psi_0(\beta(z)) \quad (6.8)$$

аналитична всюду в комплексной плоскости кроме точек $z_k, \bar{z}_k, a_0, k = 1, 2, \dots$ и $\varphi(z) = \varphi_0(z)$ при $z \in D$. Из (6.7) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{z}_k = a_0.$$

Применяя лемму 5, из (6.6) получим

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \varphi_0(z) (z - z_k) = \frac{b_k}{\varphi'(0)}, \quad \lim_{z \rightarrow \bar{z}_k} \varphi_0(z) = \frac{\bar{b}_k}{\varphi'(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.9)$$

где

$$b_k = - \frac{R_0^{2k} \alpha'(\zeta_k)}{(x - i)^2 r_0^{2k-2} \tau_0^2}.$$

Так как $\text{Im} \beta_2(i) \neq 0$, то из (6.2) следует, что $\text{Im} \zeta_k \neq 0, \text{Im} \bar{\zeta}_k \neq 0$. Поэтому $\zeta_k \neq x_1, \bar{\zeta}_k \neq x_1$, где x_1 — вещественное число, определенное формулой (1.39). С другой стороны, $|\zeta_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому функция $\Psi_0(z)$ аналитична в окрестности точки x_1 . Из (5.19) и (6.8) имеем

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi_0(z) = \Psi_0(x_1). \quad (6.10)$$

Таким образом, $\varphi_0(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Из (6.9) и (6.10), аналогично формуле (5.23), получим

$$\varphi(z) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z - z_k} + \frac{\bar{b}_k}{z - \bar{z}_k} + c \right] \frac{1}{\varphi'(0)}, \quad (6.11)$$

где

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{z_k} + \frac{\bar{b}}{\bar{z}_k} \right).$$

Дифференцируя обе части (6.11) в точке $z = 0$, получим

$$[\varphi'(0)]^2 = A, \quad (6.12)$$

где

$$A = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re} \frac{b_k}{z_k^2}.$$

Из (6.12) и неравенства $\varphi'(0) > 0$ следует, что $A > 0$ и $\varphi'(0) = \sqrt{A}$. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. Конформно отображающая функция $\varphi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$, удовлетворяющая условиям (6.1), определяется формулой (6.11), где $\varphi'(0) = \sqrt{A}$.

Пусть условия (6.1) заменены условиями $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$, где $z_0 \neq \pm 1$ — фиксированная точка в области D . Тогда аналогично доказывается, что функция $\varphi(z)$ представляется в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z - B_k} + A_0, \quad (6.13)$$

где $B_k \rightarrow z_1$ при $k \rightarrow +\infty$.

2. Цель данного пункта — показать, что в частном случае $z_0 = \pm 1$ функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается через Γ всюду в комплексную плоскость за исключением некоторой последовательности точек z_k и ее предела $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$, $|a_0| < \infty$. В этом случае изолированные особые точки z_k являются полюсами второго порядка, а функция допускает разложение вида (6.13), содержащее слагаемые вида $b_k (z - z_k)^{-2}$, где $b_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Пусть Γ и область D — те же, что и в начале §5 ($d > 0$), и пусть функция $\zeta = \varphi(z)$ конформно отображает область D на единичный круг $|\zeta| < 1$ и удовлетворяет условиям (4.1), (4.2).

Рассмотрим функцию

$$\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t)), \quad (6.14)$$

где $\alpha_1(t)$ — функция Жуковского (1.2).

Ясно, что

$$|\varphi(z)| = 1, \quad z \in \Gamma, \quad \varphi(z) \neq 0 \quad \text{при} \quad z \in \bar{D}, \quad z \neq 1. \quad (6.15)$$

Рассмотрим окружность

$$|\tau + d_0| = \rho_0, \quad (6.16)$$

где

$$d_0 = \frac{d}{R^2 - d^2}, \quad \rho_0 = \frac{R}{R^2 - d^2}. \quad (6.17)$$

Так как $d > 0$, $R > 1 + d$, то $d_0 > 0$, $\rho_0 > d_0$, $\rho_0 + d_0 < 1$. Окружность (6.16) является образом окружности (1.1) при отображении $\tau = t^{-1}$. Пусть D_0 —

область, ограниченная окружностями (1.1) и (6.16). Из условий $d > 0$, $R > 1 + d$, $\rho_0 > d_0$ следует, что точка $t = 0$ не принадлежит замкнутой области \bar{D}_0 . Поэтому функция Жуковского $\alpha_1(t)$ аналитична в области \bar{D}_0 . Следовательно, $z = \alpha_1(t)$ отображает D_0 на D . Поэтому функция $\Psi(t) = \varphi(\alpha_1(t))$ аналитична в области D_0 и непрерывна в \bar{D}_0 . Из (4.1), (4.2), (6.14) и (6.15) следует, что

$$\Psi(t) = 1 \quad \text{на окружностях (1.1) и (6.16),} \quad (6.18)$$

$$\Psi(1) = 0, \quad \Psi'(1) = 0, \quad \Psi''(1) = \varphi'(1), \quad (6.19)$$

$$\Psi'''(1) = -3\varphi'(1), \quad \Psi(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in \bar{D}_0, \quad t \neq 1.$$

Пусть

$$d_1 = d + d_0, \quad x_2 = \frac{R^2 - \rho_0^2 + d_1^2 + \sqrt{(R^2 - \rho_0^2 + d_1^2)^2 - 4R^2 d_1}}{2d_1}, \quad (6.20)$$

$$x_0 = x_2 - d, \quad x_1 = \frac{x_2}{x_2^2 - R^2}, \quad r_0 = \frac{\rho_0}{(x_0 - d_0)^2 - \rho_0^2}, \quad R_0 = \frac{R}{x_2^2 - R^2}. \quad (6.21)$$

Имеем (см. (2.9)) $x_2 > R$, $0 < r_0 < R_0$, $x_1 > R_0$.

Рассмотрим отображение

$$\tau = x_1 - \frac{1}{x_0 + t} \equiv \beta_2(t).$$

В §2 (Лемма 8, (2.10)) показано, что функция $\zeta = \beta_2(t)$ конформно отображает область D_0 на кольцо

$$r_0 < |\tau| < R_0, \quad (6.22)$$

причем

$$\beta_2(R + d) = R_0, \quad \beta_2(\rho_0 - d) = r_0. \quad (6.23)$$

Пусть

$$\tau_0 \equiv \beta_2(1) = x_1 - \frac{1}{x_0 + 1}. \quad (6.24)$$

Так как $\beta_2(t)$ — возрастающая функция на полуоси $t \geq 0$ и $0 < \rho_0 - d_0 < 1 < R + d$,

то

$$\beta_2(\rho_0 - d_0) < \beta_2(1) < \beta_2(R + d). \quad (6.25)$$

Из (6.24) и (6.25) имеем $r_0 < \tau_0 < R_0$. Отображение, обратное к отображению $\zeta = \beta_2(t)$, определяется формулой

$$t = \frac{1}{x_1 - \tau} - x_0 \equiv \alpha_2(\tau). \quad (6.26)$$

Функция $t = \alpha_2(\tau)$ конформно отображает кольцо (1.3) на область D_0 и $\alpha_2(\tau_0) = 1$, где τ_0 определяется формулой (6.24). Обозначим

$$\Psi_0(\tau) = \Psi(\alpha_2(\tau)). \quad (6.27)$$

Из (6.18), (6.19) и (6.27) следует, что функция $\Psi_0(\tau)$ аналитична в кольце (1.3), непрерывна в замыкании этого кольца и удовлетворяет условиям

$$|\Psi_0(\tau)| = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| = R_0 \quad \text{и} \quad |\tau| = r_0, \quad (6.28)$$

$$\Psi_0(\tau_0) = 0, \quad \Psi'_0(\tau_0) = 0,$$

$$\Psi''_0(\tau_0) = \varphi'(1) (\alpha'_2(\tau_0))^2, \quad (6.29)$$

$$\Psi'''_0(\tau_0) = -3\varphi'(1) (\alpha'_2(\tau_0))^3 + 3\varphi'(1) \alpha'_2(\tau_0) \alpha''_2(\tau_0), \quad (6.30)$$

$$\Psi_0(\tau) \neq 0 \quad \text{при} \quad r_0 \leq \tau \leq R_0, \quad \tau \neq \tau_0.$$

Из (6.24) и (6.26) имеем

$$(x_1 - \tau_0)^{-1} = x_0 + 1, \quad \alpha'_2(\tau_0) = (x_1 - \tau_0)^{-2} = (x_0 + 1)^2,$$

$$\alpha''_2(\tau_0) = 2(x_1 - \tau_0)^{-3} = 2(x_0 + 1)^3.$$

Следовательно, условия (6.29) и (6.30) запишутся в виде

$$\Psi''_0(\tau_0) = \varphi'(1) (x_0 + 1)^4, \quad \Psi'''_0(\tau_0) = 3(x_0 + 1)^5(1 - x_0)\varphi'(1).$$

Согласно лемме 15 функция $\Psi_0(\tau)$ аналитически продолжается в область $|\tau| > R_0$ за исключением точек

$$\tau_k = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-2} \tau_0}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.31)$$

причем главная часть этого аналитического продолжения в точке τ_k определяется формулой

$$g_k(\tau) = \frac{1}{\varphi'(1)} \left[\frac{c_{k1}}{\tau - \tau_k} + \frac{c_{k2}}{(\tau - \tau_k)^2} \right], \quad (6.32)$$

где

$$c_{k1} = \frac{2\tau_k(2 + (1 - x_0^2)\tau_0)}{(x_0 + 1)^4}, \quad c_{k2} = \frac{2\tau_k^2}{(x_0 + 1)^4 \tau_0^2}. \quad (6.33)$$

Из принципа симметрии и условия (6.28) следует, что аналитическое продолжение $\Psi_0(t)$ удовлетворяет условиям (см. [1], стр. 158)

$$|\Psi_0(t)| = 1 \quad \text{при} \quad |\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r^{2k-2}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.34)$$

Так как $d_0 > 0$, $R > 1 + d$ и $d_0 < \rho_0$, $\rho_0 + d_0 < 1$, то единичная окружность $|t| = 1$ принадлежит области D_0 , ограниченной окружностями (1.1) и (6.16). Теперь рассмотрим отображение (2.5). Известно (см. [1], стр. 30), что функция $t = \beta_1(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на область $|t| > 1$. Отображение $z = \alpha_1(t)$, обратное к отображению $t = \beta_1(z)$, конформно отображает область $|t| > 1$ на внешность отрезка $[-1, 1]$.

Образ γ окружности $|t| = 1$ при отображении $\tau = \beta_2(t)$ является окружностью в кольце G_0 . Функция $\tau = \beta_2(t)$ конформно отображает область $|t| > 1$ на внешность окружности γ . Пусть $\alpha_2(\tau)$ — обратное отображение. Тогда

$$z = \alpha_1(\alpha_2(\tau)) \equiv \alpha(\tau) \quad (6.35)$$

конформно отображает внешность окружности γ на внешность отрезка $[-1, 1]$, а функция $z = \beta_2(\beta_1(z)) \equiv \beta(z)$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на внешность окружности γ и является обратным к отображению $z = \alpha(\tau)$. Положим

$$z_k = \alpha(\tau_k), \quad (6.36)$$

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = -\frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{1}{x_0} \right). \quad (6.37)$$

Из (6.36) следует, что $\tau_k = \beta(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, функция

$$\varphi_0(z) \equiv \Psi_0(\beta(z)) \quad (6.38)$$

аналитична вне отрезка $[-1, 1]$ за исключением последовательности точек z_k и предела $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$. Из (6.14) и (6.27) имеем

$$\Psi_0(\tau) = \varphi(\alpha(\tau)) \quad \text{при} \quad \tau \in G_0.$$

Отсюда получим

$$\Psi_0(\beta(z)) = \varphi(z) \quad \text{при} \quad z \in D_1, \quad (6.39)$$

где $D_1 = D \setminus [-1, 1]$. Из (6.38) и (6.39) имеем

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) \quad \text{при } z \in D_1. \quad (6.40)$$

Из (6.40) следует, что функция $\varphi_0(z)$ аналитически продолжается на отрезок $[-1, 1]$. Следовательно, она аналитична всюду в комплексной плоскости за исключением последовательности z_k , предела a_0 этой последовательности, и удовлетворяет условиям

$$\varphi_0(z) = \varphi(z) \quad \text{при } z \in D. \quad (6.41)$$

Таким образом, при помощи этой формулы осуществляется разложение функции $\varphi(z)$ на простейшие дроби. Так как контур Γ является аналитической кривой, то конформно отображающая функция $\varphi(z)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность Γ (см. [1], стр. 163). Поэтому из равенства (6.40) следует, что особые точки z_k и a_0 функции $\varphi_0(z)$ находятся вне замкнутой области $D \cup \Gamma$.

Пусть $d > 0$, $R > 1 + d$. Из формул (6.17) и (6.20) имеем

$$d_0 \rightarrow 0, \quad \rho_0 \rightarrow \frac{1}{R}, \quad d_1 \rightarrow 0, \quad x_2 \rightarrow +\infty \quad \text{при } d \rightarrow 0 (d > 0).$$

Следовательно

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{x_2 [(1-d)x_2 + R^2]}{x_2 + 1 - d} = +\infty.$$

Поэтому при достаточно малых положительных значениях d имеет место неравенство

$$\frac{x_2 [(1-d)x_2 + R^2]}{x_2 + 1 - d} \geq R^2. \quad (6.42)$$

Неравенство (6.42) можно записать в виде

$$x_1 \geq \frac{R_0^2}{\tau_0} = \tau_1, \quad (6.43)$$

где x_1 , R_0 , τ_0 и τ_k определяются из (6.21), (6.24) и (6.31). Поскольку неравенство (6.43) имеет место при достаточно малых положительных значениях d , то возможны следующие два случая :

$$\tau_k \neq x_1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.44)$$

или

$$\tau_m = x_1, \quad (6.45)$$

где m – некоторое натуральное число.

Пусть сначала имеет место условие (6.44). Тогда из формулы (6.36) следует, что $|z_k| < \infty$. Так как точки τ_k являются полюсами второго порядка для функции $\Psi_0(\tau)$ и $\beta'(z_k) \neq 0$, то точки z_k являются полюсами второго порядка для функции $\varphi(z) = \Psi_0(\beta(z))$.

Теперь напомним главную часть $f_k(z)$ функции $\varphi(z)$ в ее полюсах z_k . Согласно лемме 17 и формуле (6.32) имеем

$$f_k(z) = \left[\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right] \frac{1}{\varphi'(1)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.46)$$

где

$$a_{k1} = \frac{c_{k1}}{\beta'(z_k)} - \frac{c_{k2}\beta''(z_k)}{(\beta'(z_k))^3}, \quad a_{k2} = \frac{c_{k2}}{(\beta'(z_k))^2}. \quad (6.47)$$

Так как функция $\alpha(\tau)$ – обратная к функции $\beta(z)$ и $z_k = \alpha(\tau_k)$, то

$$\beta'(z_k) = [\alpha'(\tau_k)]^{-1}, \quad (6.48)$$

$$\beta(\alpha(\tau)) = \tau. \quad (6.49)$$

Дифференцируя обе части (6.49) дважды по τ и подставляя $\tau = \tau_k$, получим

$$\beta''(z_k) = -\frac{\beta'(z_k)\alpha''(\tau_k)}{(\alpha'(\tau_k))^2} = -\frac{\alpha''(\tau_k)}{[\alpha'(\tau_k)]^3}. \quad (6.50)$$

Подставляя $\beta'(z_k)$ и $\beta''(z_k)$ из (6.48) и (6.50) в (6.47), получим

$$a_{k1} = c_{k1}\alpha'(\tau_k) + c_{k2}\alpha''(\tau_k), \quad a_{k2} = c_{k2}[\alpha'(\tau_k)]^2, \quad (6.51)$$

где c_{k1} и c_{k2} определяются формулами (6.33). Пусть

$$t_k = \alpha_2(\tau_k) = \frac{1}{x_1 - \tau_k} - x_0. \quad (6.52)$$

Из (1.2), (6.26) и (6.35) имеем

$$\alpha'(\tau_k) = \frac{1}{2}(1 - t_k^{-2})(x_1 - \tau_k)^{-2}, \quad \alpha''(\tau_k) = t_k^{-3}(x_1 - t_k)^{-4} + (1 - t_k^{-2})(x_1 - \tau_k)^{-3}. \quad (6.53)$$

Таким образом, функция $f_k(z)$ определяется формулой (6.46), где a_{k1} , a_{k2} , c_{k1} , c_{k2} , $\alpha'(\tau_k)$, $\alpha''(\tau_k)$ и t_k определяются формулами (6.33), (6.51) — (6.53). Пусть γ_k — образ окружности

$$|\tau| = \frac{R_0^{2k}}{r_0^{2k-1}}$$

при отображении $z = \alpha(\tau)$. Контуры γ_k стягиваются к точке a_0 при $k \rightarrow +\infty$ (см. (6.37)). Из (6.34) и (6.38) следует, что

$$|\varphi_0(z)| = 1 \quad \text{при } z \in \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.54)$$

Так как $\beta(z) \rightarrow z_1$ при $|z| \rightarrow +\infty$, то из условия (6.44) следует, что $\Psi(\tau)$ аналитична в окрестности z_1 и

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \varphi_0(z) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \Psi_0(\beta(z)) = \Psi_0(z_1). \quad (6.55)$$

Из (6.46), (6.54) и (6.55) следует, что функция $\varphi_0(z) - c$ ($c = \Psi_0(z_1)$) удовлетворяет всем условиям леммы 9. Поэтому имеем

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right) \frac{1}{\varphi'(1)} + c. \quad (6.56)$$

Дифференцируя обе части (6.56) и подставляя $z = 1$, получим

$$[\varphi'(1)]^2 = A, \quad (6.57)$$

где

$$A = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{(1 - z_k)^2} + \frac{2 a_{k2}}{(1 - z_k)^3} \right). \quad (6.58)$$

Из (6.57) и неравенства $\varphi'(1) > 0$ имеем $A > 0$ и $\varphi'(1) = \sqrt{A}$. Подставляя $z = 1$ в (6.56) и учитывая неравенство $\varphi_0(1) = \varphi(1) = 0$, получим

$$c = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{1 - z_k} + \frac{a_{k2}}{(1 - z_k)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{A}}. \quad (6.59)$$

Из (6.41) и (6.56) окончательно получим

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{A}} + c, \quad (6.60)$$

где A и c определяются формулами (6.58) и (6.59).

Пусть теперь имеет место условие (6.45). Так как последовательность τ_k возрастает, то из (6.45) следует, что $\tau_k \neq z_1$, $k = 1, 2, \dots, k \neq m$. В этом случае $|z_m| = +\infty$. Поэтому особыми точками функции $\varphi_0(z)$ являются последовательность z_k , точка $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ и бесконечно удаленная точка.

Главные части $f_m(z)$ функции $\varphi_0(z)$ в точке z_k при $k \neq m$ определяются формулой (6.46). Теперь определим главную часть $f_m(z)$ функции $\varphi_0(z)$ в бесконечно удаленной точке. Имеем

$$\beta(z) = z_1 - \frac{1}{2z} + \frac{z_0}{4z^2} + \frac{1}{z^3} \beta_0(z), \quad (6.61)$$

где $\beta_0(z)$ аналитична и ограничена в окрестности бесконечности.

Так как $z_1 = \tau_m$ и τ_m является полюсом функции $\Psi_0(\tau)$, то

$$\lim_{\tau \rightarrow z_1} |\Psi_0(\tau)| = +\infty.$$

Применяя лемму 16 для функции $\varphi_0(z) = \Psi_0(\beta(z))$ и учитывая формулу (6.32) при $k = m$ и представление (6.61), получим

$$f_m(z) = (a_{m1}z + a_{m2}z^2) \frac{1}{\varphi'(1)},$$

где $a_{m1} = -2c_{m1} + 4c_{m2}z_0$, $a_{m2} = 4c_{m2}$.

Следовательно, функция $\varphi_0(z) - f_m(z)$ имеет конечный предел c при $|z| \rightarrow +\infty$. Функция $\varphi_0(z) - f_m(z) - c$ имеет полюсы второго порядка в точках z_k при $k \neq m$ и стремится к нулю при $|z| \rightarrow +\infty$. Применяя лемму 9, получим

$$\varphi_0(z) - f_m(z) - c = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} f_k(z). \quad (6.62)$$

Используя формулу (6.62), аналогично формуле (6.60) получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{z - z_k} + \frac{a_{k2}}{(z - z_k)^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{A}} (a_{m1}z + a_{m2}z^2) + c, \quad (6.63)$$

где

$$A = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{(1 - z_k)^2} + \frac{a_{k2}}{(1 - z_k)^3} \right) + a_{m1} + 2a_{m2},$$

$$c = - \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \left(\frac{a_{k1}}{1 - z_k} + \frac{a_{k2}}{(1 - z_k)^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{A}} (a_{m1} + a_{m2}).$$

Согласно лемме 9, ряды (6.60) и (6.63) сходятся равномерно в любой ограниченной области, не содержащей точек z_k и малую окрестность точки a_0 .

3. Пусть теперь конформно отображающая функция $\varphi_1(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(1) = 0, \quad \arg \varphi_1'(1) = \theta.$$

Тогда очевидно, что эта функция допускает представление $\varphi_1(z) = \varphi(z) e^{i\theta}$, где $\varphi(z)$ – выше построенная конформно отображающая функция при $\theta = 0$.

4. Пусть, наконец, конформно отображающая функция $\Psi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$ удовлетворяет условиям $\Psi(-1) = 0$, $\arg \Psi'(-1) = \theta$. Тогда $\Psi(z) = -\varphi(-z) e^{i\theta}$, где $\varphi(z)$ – выше построенная конформно отображающая функция.

Полученные результаты остаются в силе, если R – произвольное положительное число, d – произвольное комплексное число, $R > 1 + |d|$ и $\varphi_1(z_0) = 0$, где $z_0 = 1$ или $z_0 = -1$.

Таким образом, конформно отображающая функция $\varphi(z)$ области D на круг $|\zeta| < 1$, удовлетворяющая одному из условий $\varphi(1) = 0$ или $\varphi(-1) = 0$, аналитически продолжается в расширенную комплексную плоскость за исключением некоторой последовательности точек z_k и предела $a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ этой последовательности, причем точки z_k являются полюсами второго порядка для $\varphi(z)$.

ABSTRACT. The paper considers a problem of analytic continuation of analytic function beyond ellipse type arcs, provided that either the real part or the modulus of function in question is constant. We study the cases of a half-plane and a disk. The results are applied to obtain decompositions into partial fractions for conformal mappings which map domains with elliptical boundaries onto the disk or half-plane. In the case of an ellipse we prove that the conformal mappings are meromorphic functions with a countable number of second order or simple poles.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1973.
2. Н. Е. Товмасян, "Принцип аналитического продолжения через дугу эллипса и его применения", Изв. НАН Армении, т. 26, № 2, стр. 108 — 119, 1991.
3. Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Наука, М., 1962.

12 декабря 1997

Армянский государственный
инженерный университет