О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. О. Бабаян, С. А. Папян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 2, 1998

В работе рассмотрена задача типа Римана для одного класса неправильно-эллиптических уравнений. Изучены вопросы разрешимости и количества линейно независимых решений.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z\colon |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma = \partial D = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = 1\}$ – граница этого круга. В области D рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 2\,a\,\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + b\,u = 0. \qquad (1)$$

Здесь a и b – постоянные, u – искомая дважды дифференцируемая в D функция, удовлетворяющая условию Гельдера вместе со своими производными первого порядка в $D \bigcup \Gamma$. На границе Γ функция $u(x,y)$ должна удовлетворять краевым условиям типа Римана

$$\mathrm{Re}u\big|_\Gamma = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_\Gamma = g(x,y), \qquad (x,y) \in \Gamma, \qquad (3)$$

где f и g – заданные непрерывные по Гельдеру вещественнозначные функции на Γ, N – внутренняя нормаль к Γ в точке (x,y).

Дифференциальные уравнения типа (1) с другими краевыми условиями рассматривались в монографии [1]. В случае, когда $a = b = 0$, в [2], [3] было доказано, что задача (1) — (3) нетерова, неоднородная задача всегда разрешима, а однородная задача ($f \equiv g \equiv 0$) имеет четыре линейно независимых решения. В [6] рассматривалась задача (1) — (3) в смысле L^1–сходимости, где была доказана нетеровость этой задачи и вычислен индекс. Целью настоящей работы является доказательство аналогичных результатов в пространствах функций, удовлетворяющих условию Гельдера при произвольных постоянных a и b.

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2a\,\lambda + b = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Однородная задача (1) — (3) имеет четыре решения u_1, u_2, u_3, u_4, линейно независимые над полем действительных чисел. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то для $z = x + iy$*

$$\begin{aligned} &u_1(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}, \quad u_2(x,y) = i\,e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,(z + \overline{z}), \\ &u_3(x,y) = e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,(z - \overline{z}), \quad u_4(x,y) = e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}\,z\,\overline{z}. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} &u_1(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_1 \overline{z}}, \; u_2(x,y) = ie^{\overline{\lambda}_2 z + \lambda_2 \overline{z}}, \\ &u_3(x,y) = i\left(e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z} + e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_2 \overline{z}}\right), \; u_4(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z} - e^{\overline{\lambda}_1 z + \lambda_2 \overline{z}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение однородной задачи (1) — (3) представляется в виде линейной комбинации функций u_1, ..., u_4 с вещественными коэффициентами.

Теорема 2. *Для произвольных a и b задача (1) — (3) нетерова и индекс этой задачи равен четырем.*

Из теорем 1 и 2 следует, что неоднородная задача (1) — (3) всегда разрешима.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим случай $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет следующее представление :

$$u(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z}}\,(\overline{z}\,\varphi_1(z) + \varphi_2(z)), \qquad z = x + iy, \tag{7}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – произвольные аналитические в D функции.

Делая замену

$$\varphi_1(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}}\, \Psi_1(z), \qquad \varphi_2(z) = e^{\lambda_1 \bar{z}}\, \Psi_2(z), \quad z = x + iy,$$

после подстановки в (2) и (3) получим следующие уравнения для определения $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$:

$$\operatorname{Re}(\bar{z}\,\Psi_1(z) + \Psi_2(z))|_\Gamma = f_1(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial N}(\bar{z}\,\Psi_1(z) + \Psi_2(z))\Big|_\Gamma = g_1(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{9}$$

где

$$f_1(x, y) = e^{-(\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z)}\, f(x, y),$$

$$g_1(x, y) = e^{-(\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z)} \left[g(x, y) - \frac{\partial}{\partial N}\left(e^{\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z}\right) f_1(x, y) \right], \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Уравнения (8) и (9) были исследованы в [3] и [4]. Используя полученные в этих работах результаты, мы завершаем доказательство теоремы 1 в случае $\lambda_1 = \lambda_2$.

Пусть теперь $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет следующее представление :

$$u(x, y) = e^{\lambda_1 \bar{z}} \varphi_1(z) + e^{\lambda_2 \bar{z}} \varphi_2(z), \quad z = x + iy, \tag{10}$$

где функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ аналитичны в D. Из этого представления следует, что функции (6) – решения однородной задачи (1) — (3).

Пусть $u(x, y)$ – произвольное решение однородной задачи (1) — (3). Покажем, что

$$\operatorname{Re} u(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D. \tag{11}$$

Для этого представим функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = e^{-a\bar{z} - \bar{a}z}\, V(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad z = x + iy. \tag{12}$$

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + b u = e^{-a\bar{z} - \bar{a}z} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} + (b - a^2)\, V \right).$$

Таким образом, в D уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} + (b - a^2)\, V = 0, \quad (x, y) \in D. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (2) и (3), а также учитывая, что $e^{-a\bar{z}-\bar{a}z}$ – действительная функция, получим

$$\operatorname{Re} V|_\Gamma = 0, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Введем оператор L, действующий в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, и сопряженный с ним оператор L^* :

$$L = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + (b - a^2)\, I, \qquad L^* = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (\bar{b} - \bar{a}^2)\, I.$$

В этих обозначениях задача (13), (14) (эквивалентная однородной задаче (1) — (3)) примет вид

$$\begin{cases} (LV)(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ \operatorname{Re} V|_\Gamma = 0, & \operatorname{Re} \left.\dfrac{\partial V}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial}{\partial N}$ – вещественный оператор, получим, что если V – решение задачи (15), то функция

$$W(x, y) = \operatorname{Re} V(x, y) \tag{16}$$

будет решением задачи

$$(L^* L)\, W(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in D, \tag{17}$$

$$\operatorname{Re} W|_\Gamma = 0, \qquad \operatorname{Re} \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_\Gamma = 0. \tag{18}$$

Здесь W – четырежды непрерывно дифференцируемая в D искомая функция, удовлетворяющая условию Гельдера в $D \bigcup \Gamma$ вместе с производными первого порядка.

Покажем, что задача (17), (18) имеет только тривиальное решение. Пусть $W(x, y)$ – решение задачи (17), (18). Тогда из (17) имеем

$$\iint_D (L^* L) W(x, y) \cdot \overline{W(x, y)}\, dx\, dy = 0. \tag{19}$$

Функция $W(x, y)$ аналитична в D (см. [7]). Следовательно, в (19) можно дважды применить формулу Грина. Учитывая (18), получим

$$\iint_D |L\,W(x,y)|^2\,dx\,dy = 0. \tag{20}$$

Так как $(LW)(x, y)$ непрерывна в D, то $(LW)(x, y) = 0$ при $(x, y) \in D$. Следовательно, функция $W(x, y)$ представляется в виде

$$W(x,y) = e^{-c\bar{z}}\,\Psi_1(z) + e^{c\bar{z}}\,\Psi_2(z), \tag{21}$$

где $c = \sqrt{a^2 - b}$, $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$ – аналитические в D функции (ср. с (10)).

Из (18) для $(x, y) \in \Gamma$ получаем $e^{-c\bar{z}}\,\Psi_1(z) + e^{c\bar{z}}\,\Psi_2(z) = 0$. Поскольку $z\,\bar{z} = 1$ при $z \in \Gamma$, то

$$e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z) = 0, \qquad z \in \Gamma.$$

Функция $e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z)$ аналитична при $0 < |z| < 1$ и обращается в нуль при $|z| = 1$. Следовательно, по теореме единственности $e^{-c/z}\,\Psi_1(z) + e^{c/z}\,\Psi_2(z) = 0$ при $0 < |z| \le 1$, или

$$\Psi_1(z) = e^{2c/z}\,\Psi_2(z) \quad \text{при} \quad 0 < |z| \le 1. \tag{22}$$

Так как функция $\Psi_1(z)$ аналитична в нуле, то из (22) следует, что функция $\Psi_2(z)$ имеет нуль бесконечного порядка в точке $z = 0$, следовательно, $\Psi_2(z) \equiv 0$ при $z \in D$. Из (22) мы также имеем, что $\Psi_1(z) \equiv 0$ при $z \in D$. Окончательно, из (21) получаем, что однородная задача (17), (18) имеет только тривиальное решение и, используя (16) и (12), получаем (11). Далее, из (10) и (11) имеем

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1\bar{z}}\,\varphi_1(z) + e^{\lambda_2\bar{z}}\,\varphi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Введем функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ по формулам

$$\varphi_1(z) = e^{\overline{\lambda}_1 z}\,\Psi_1(z), \qquad \varphi_2(z) = e^{\overline{\lambda}_2 z}\,\Psi_2(z). \tag{23}$$

Аналитические в D функции $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ однозначно определяются по φ_1 и φ_2. Из (23) имеем

$$\operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1\bar{z}+\overline{\lambda}_1 z}\,\Psi_1(z) + e^{\lambda_2\bar{z}+\overline{\lambda}_2 z}\,\Psi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Используя вещественность функции $\exp(\lambda_1 \bar{z} + \bar{\lambda}_1 z)$, получим

$$\mathrm{Re}\left(\Psi_1(z) + e^{(\lambda_2-\lambda_1)\bar{z}+(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)z}\,\Psi_2(z)\right) = 0, \qquad z \in D \tag{24}$$

или

$$\Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)} + e^{(\lambda_2-\lambda_1)\bar{z}+(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)z}\left(\Psi_2(z) + \overline{\Psi_2(z)}\right) = 0, \qquad z \in D.$$

Применив к обеим частям этого равенства оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial \bar{z}\,\partial z}$, получим

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)\bar{z}+(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)z}\times$$

$$\times\left[|\lambda_2-\lambda_1|^2\left(\Psi_2(z)+\overline{\Psi_2(z)}\right) + (\lambda_2-\lambda_1)\Psi_2'(z) + \left(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1\right)\overline{\Psi_2'(z)}\right] = 0.$$

Следовательно

$$\mathrm{Re}\left(|\lambda_2-\lambda_1|^2\,\Psi_2(z) + (\lambda_2-\lambda_1)\,\Psi_2'(z)\right) = 0, \qquad z \in D. \tag{25}$$

Учитывая аналитичность $\Psi_2(z)$, из (25) получим дифференциальное уравнение

$$\Psi_2'(z) + \left(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1\right)\Psi_2(z) = iC_1\left(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1\right),$$

где C_1 – вещественная постоянная. Решая это уравнение находим $\Psi_2(z)$:

$$\Psi_2(z) = A\,e^{-(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)z} + i\,C_1, \tag{26}$$

где A – произвольная комплексная постоянная. После подстановки найденной функции в (24) находим

$$\Psi_1(z) = -\bar{A}\,e^{(\bar{\lambda}_2-\bar{\lambda}_1)z} + i\,C_2,$$

где C_2 – вещественная постоянная. Из (23) находим

$$\varphi_1(z) = -\bar{A}\,e^{\bar{\lambda}_2 z} + i\,C_2\,e^{\bar{\lambda}_1 z}, \qquad \varphi_2(z) = A\,e^{\bar{\lambda}_1 z} + i\,C_1\,e^{\bar{\lambda}_2 z}. \tag{27}$$

Наконец, подставляя функции (27) в (10), получим общее решение однородной задачи (1) — (3) :

$$u(x,y) = iC_2\,e^{\bar{\lambda}_1 z+\lambda_1\bar{z}} + iC_1\,e^{\bar{\lambda}_2 z+\lambda_2\bar{z}} + A\,e^{\bar{\lambda}_1 z+\lambda_2\bar{z}} - \bar{A}\,e^{\lambda_1\bar{z}+\bar{\lambda}_2 z}.$$

Разделяя действительные и мнимые части $e^{\lambda_1\bar{z}+\lambda_2\bar{z}}$, завершаем доказательство теоремы 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Как было показано в предыдущем параграфе, случай кратных корней ($\lambda_1 = = \lambda_2$) сводится к случаю $a = b = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если $u(x,y)$ - решение задачи (1) — (3), то для этой функции справедливо представление (10). Обозначим

$$\Psi_1(z) = \varphi_1(z)\, e^{-\overline{\lambda}_2 z}, \qquad \Psi_2(z) = -\varphi_2(z)\, e^{-\overline{\lambda}_1 z}. \tag{28}$$

Используя (28), получим представление

$$u(x,y) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z}\, \Psi_1(z) - e^{\lambda_2 \overline{z} + \overline{\lambda}_1 z}\, \Psi_2(z), \tag{29}$$

где $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$ - аналитические в D функции. Для сокращения записи будем использовать обозначение $a(z) = e^{\lambda_1 \overline{z} + \overline{\lambda}_2 z}$. Тогда равенство (29) примет вид

$$u(x,y) = a(z)\, \Psi_1(z) - \overline{a(z)}\, \Psi_2(z). \tag{30}$$

Функция (30) должна удовлетворять граничному условию (2). Прежде чем подставить функцию (30) в (2), представим правую часть (2) в виде ,

$$f(x,y) = \mathrm{Re}\,(a(z)\, F(z)), \qquad (x,y) \in \Gamma, \tag{31}$$

где $F(z)$ - функция, аналитическая в D. Индекс функции $a(z)$ равен нулю, следовательно (см. [5], стр. 254)

$$F(z) = e^{-i\Psi(z)} \left(\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma e^{-\mathrm{Im}\,\Psi(t)} \frac{f(t)}{|a(t)|\,(t-z)}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\mathrm{Im}\,\Psi(t)} \frac{f(t)}{|a(t)|\, t}\, dt \right),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\arg \dfrac{a(t)}{|a(t)|}}{t-z}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{t} \arg \frac{a(t)}{|a(t)|}\, dt.$$

Учитывая (30) и (31), граничное условие (2) представим в виде

$$\mathrm{Re}\,(a(z)\, \Psi_1(z) - \overline{a(z)}\, \Psi_2(z)) = \mathrm{Re}\,(a(z)\, F(z)), \qquad |z| = 1$$

или

$$\mathrm{Re}\, \Big(a(z)\,(\Psi_1(z) - F(z)) - a(z)\, \overline{\Psi_2(z)} \Big) = 0, \qquad |z| = 1. \tag{32}$$

Так как $z\bar{z}=1$ при $z\in\Gamma$, то

$$\operatorname{Re}\left(a(z)\,\left(\Psi_1(z)-F(z)-\overline{\Psi_2(1/\bar{z})}\right)\right)=0.$$

Таким образом, получаем граничную задачу для $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$:

$$\Psi_1(z)-F(z)-\overline{\Psi_2(1/\bar{z})}=i\,d(z)\,\overline{a(z)},\quad x+iy\in\Gamma, \tag{33}$$

где $d(z)$ – неизвестная вещественнозначная функция на Г. В (33) функция $\Psi_1(z)-$ $-F(z)$ аналитична при $|z|<1$, а $\overline{\Psi_2(1/\bar{z})}$ аналитична при $|z|>1$. Следовательно, эти функции определяются интегралом типа Коши :

$$\Psi_1(z)-F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt,\ |z|<1\quad\text{и}\quad\overline{\Psi_2(1/\bar{z})}=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt,\ |z|>1.$$

Так как функция $d(t)$ вещественна, то

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,\overline{a(t)}}{t-z}\,dt+F(z)\quad\text{и}\quad\Psi_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t}\,dt. \tag{34}$$

После подстановки (34) в (30) для решения $u(z)$ задачи (1) — (3) получаем представление

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d(t)\,\frac{a(z)\,\overline{a(t)}-\overline{a(z)}\,a(t)}{t-z}\,dt+\frac{\overline{a(z)}}{2\pi}\int_\Gamma\frac{d(t)\,a(t)}{t}\,dt+a(z)\,F(z),\quad |z|<1. \tag{35}$$

Полагая

$$z=r\,e^{i\theta}\in D,\quad t=e^{i\tau}\in\Gamma,\quad r\in[0,1),\quad \theta,\tau\in[0,2\pi],$$

запишем (35) в виде

$$u(r\,e^{i\theta})=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}d(e^{i\tau})\,\frac{a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})}-\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})}{1-re^{i(\theta-\tau)}}\,d\tau+\frac{i\,\overline{a(r\,e^{i\theta})}}{2\pi}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d(e^{i\tau})\,a(e^{i\tau})\,d\tau+a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta}).$$

Из равенства

$$\frac{2-2r\cos(\theta-\tau)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}=1+\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)} \tag{36}$$

получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} u(r\,e^{i\theta}) = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\frac{2-2r\cos(\theta-\tau)}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau- \\
&-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,d\tau + \operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta})\right) = \\
&= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau+ \\
&+\operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(r\,e^{i\theta})\right).
\end{aligned} \tag{37}
$$

Для определения неизвестной функции $d(t)$ используем граничное условие (3). Поскольку оператор $\dfrac{\partial}{\partial N}$ действительный, то условие (3) можно представить в виде

$$
\frac{\partial}{\partial N}\operatorname{Re} u(t)\Big|_{\Gamma} = g(x,y), \qquad t = x+iy \in \Gamma.
$$

После представления (37) получим

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}a(e^{i\tau})\right)'_r\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\,d\tau+\right. \\
&+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})\right)\,\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\right. \\
&\left.\left.+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)\,d\tau\right) = \Psi(e^{i\theta}),
\end{aligned} \tag{38}
$$

где

$$
\Psi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0}\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\,\left(a(r\,e^{i\theta})\,F(e^{i\theta})\right) - g(\cos\theta,\sin\theta)
$$

– известная функция. Обозначим

$$
K(r\,e^{i\theta}, e^{i\tau}) = a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau})
$$

и рассмотрим первое слагаемое в левой части (38). Имеем

$$
\left(K(r\,e^{i\theta}, e^{i\tau})\right)'_r = \left(\lambda_1\,e^{-i\theta} + \overline{\lambda_2}\,e^{i\theta}\right)a(r\,e^{i\theta})\,\overline{a(e^{i\tau})} - \left(\overline{\lambda_1}\,e^{i\theta} + \lambda_2\,e^{-i\theta}\right)\overline{a(r\,e^{i\theta})}\,a(e^{i\tau}).
$$

Эта функция равномерно по $\theta \in [0,2\pi]$ стремится к $K'_r(e^{i\theta}, e^{i\tau})$ при $r \to 1-0$. Следовательно, используя свойства ядра Пуассона, получим

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to 1-0}\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(K\left(r\,e^{i\theta}, e^{i\tau}\right)\right)'_r\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\theta-\tau)}\,d\tau = \\
&= \frac{i}{2}\,d(e^{i\tau})\,K'_r(e^{i\theta}, e^{i\tau}) = -|a(e^{i\theta})|^2\,d(e^{i\tau})\operatorname{Im}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right).
\end{aligned} \tag{39}
$$

Для оценки второго слагаемого в (38), отметим, что

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{2\pi} \frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}\,d\tau &= -\frac{4\pi}{1-r^2},\\
\int_0^{2\pi} \frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\,d\tau &= \frac{4\pi}{1-r^2}.
\end{aligned} \tag{40}
$$

Следовательно второе слагаемое представляется в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau})\times\\
\times\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau = I_1+I_2,
\end{gathered} \tag{41}
$$

где

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})\times\\
&\times\left(-\frac{2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau,\\
I_2 &= \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\left(\frac{K(re^{i\theta},e^{i\tau})-K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{r-1}-K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\right)\times\\
&\times\left(\frac{2(1-r)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}-\frac{2(1-r)^3(1+\cos(\theta-\tau))}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau.
\end{aligned} \tag{42}
$$

При $r\to 1$

$$
\frac{K(r\,e^{i\theta},e^{i\tau})-K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{r-1}-K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\to 0
$$

равномерно по θ и τ, а из (40) следует, что интеграл (42) равномерно ограничен при $r\to 1$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$
\lim_{r\to 1-0} I_2 = 0. \tag{43}
$$

Рассмотрим слагаемое I_1. Имеем

$$
-\lim_{\tau\to\theta}\frac{K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\theta-\tau)} = K'_r(e^{i\theta},e^{i\tau})\big|_{\tau=\theta} = 2\,i\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\,|a(e^{i\theta})|^2, \tag{44}
$$

откуда вытекает

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(\frac{i\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\tau-\theta)}+2|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\right)\times\\
&\times\left(-\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau+\\
&+\frac{1}{2\pi}\,|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\,e^{-i\theta}\right)\times\\
&\times\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\left(\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}-\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right)d\tau.
\end{aligned}
$$

Учитывая (44) и предельное соотношение

$$\lim_{r\to 1}\left[\frac{2\sin(\tau-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\tau)}+\frac{2(1-r)^2\,(1+\cos(\theta-\tau))\,\sin(\theta-\tau)}{(1+r^2-2r\cos(\theta-\tau))^2}\right]=$$

$$=\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)},\quad \theta\neq\tau,$$

получим

$$\lim_{r\to 1} I_1=\frac{1}{2\pi}|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\;e^{-i\theta}\right)\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)}d\tau+ \tag{45}$$
$$+\int_0^{2\pi} d(e^{i\tau})\,R(\tau,\theta)\,d\tau,$$

где функция

$$R(\tau,\theta)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i\,K(e^{i\theta},e^{i\tau})}{\sin(\tau-\theta)}+2|a(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\lambda_1-\lambda_2)\;e^{-i\theta}\right)\right)\frac{\sin(\theta-\tau)}{1-\cos(\theta-\tau)}$$

удовлетворяет условию Гельдера на Г, а интеграл (45) понимается в смысле главного значения.

Окончательно, из (38), (39) (41), (43) и (45) получаем следущее сингулярное интегральное уравнение для функции $d(e^{i\,\tau})$:

$$|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,d(\zeta)+i\mathrm{Re}\,\left((\dot{\overline{\lambda_1}}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,|a(\zeta)|^2\,\frac{1}{\pi\,i}\int_{|t|=1} d(t)\,\frac{dt}{t-\zeta}+ \tag{46}$$
$$+\int_{|t|=1} d(t)\,T(t,\zeta)\,dt=\Psi(\zeta),$$

где $t=e^{i\,\tau}$, $\zeta=e^{i\,\theta}$, а $T(t,\zeta)=R(\tau,\theta)+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)\,|a(\zeta)|^2\,\bar{t}$ удовлетворяет условию Гельдера.

Коэффициенты этого уравнения

$$A(\zeta)=|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Im}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right),\quad B(\zeta)=i\,|a(\zeta)|^2\,\mathrm{Re}\,\left((\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\;\zeta\right)$$

удовлетворяют условию

$$A^2(\zeta)-B^2(\zeta)=|a(\zeta)|^2\,\left|\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2}\right|^2\neq 0,\qquad \zeta\in\Gamma.$$

Следовательно, задача (46) (а значит и исходная задача (1) — (3)) нетерова (см. [1]), а индекс вычисляется по формуле

$$n=\frac{1}{\pi}\left[\arg\frac{A(\zeta)-B(\zeta)}{A(\zeta)+B(\zeta)}\right]=\frac{1}{\pi}\left[\arg\frac{-i(\overline{\lambda_1}-\overline{\lambda_2})\,\zeta}{i(\lambda_1-\lambda_2)\,\overline{\zeta}}\right]_\Gamma=4.$$

Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The paper considers Riemann type boundary value problem for a class of improperly elliptic differential equations. The questions of solvability and the number of linearly independent solutions is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Джураев, Метод сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1987.
2. Н. Е. Товмасян, "Задача типа Дирихле для неправильно-эллиптических уравнений высокого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 1, стр. 78 — 81, 1992.
3. А. А. Закарян, "Краевые задачи для неправильно-эллиптических уравнений", Диссертация, Ереван, 1989.
4. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, Наука, М., 1968.
5. А. В. Бицадзе, Основы теории функций комплексного переменного, Наука, М., 1984.
6. Г. М. Айрапетян, "Задача типа Римана для неправильно-эллиптических уравнений в классе L^1", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 71 — 79, 1993.
7. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, ГИТТЛ, М., 1948.

5 декабря 1997

Армянский государственный
инженерный университет