ТЕОРЕМА ОБ (S,h)-ОСНАЩЕННОМ КОБОРДИЗМЕ

А. А. Огникян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 1, 1998

В работе расматриваются морфизмы векторных касательных пространств. Внимание сосредотачивается на понятии (S,h)-оснащенного кобордизма. Из теоремы о (S,h)-оснащенных кобордизмах и обобщенной теоремы Понтрягина-Тома, в частности, следует аналог теоремы Понтрягина для a-оснащенных многообразий.

ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] было введено понятие a-оснащенного кобордизма, как естественное обобщенние хорошо известного понятия оснащенного бордизма [2]. Как и в классическом случае, a-оснащение нормального расслоения определяется последовательностью векторных полей, удовлетворяющих некоторому условию. Подробно a-оснащенные расслоения и их классифицирующие пространства изучались автором в [3].

Настоящая работа возникла из первоначального намерения получить аналог результата Понтрягина (см. [2], теоремы 9 и 10) для a-оснащенных многообразий. В подготовительном §1 мы рассматриваем эквивалентные гомотопии и эквивалентные изоморфизмы векторных расслоений. В §2 вводится основное для даной статьи понятие (S,h)-оснащенного бордизма и доказывается теорема 1 о редукции к (B,f)-кобордизмам. Эта теорема в сочетании с обобщенной теоремой Понтрягина-Тома (см. [4]) приводит к теореме 2 о существовании канонических изоморфизмов. Непосредственным следствием теоремы 2 является теорема 3, которая является аналогом теоремы Понтрягина для a-оснащенных многообразий. Отметим, что теорема 2 может оказаться полезной в ситуациях, когда дополнительная структура на нормальном расслоении не является (B, f)-структурой.

Подготовительные предложения в §1 доказаны полностью за исключением наиболее простых случаев (предложения 5,8,10,12,15,16,18).

§1. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГОМОТОПИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В этом параграфе базы всех рассматриваемых векторных расслоений будут предполагаться парокомпактными пространствами. Пусть X – векторное пространство и I – отрезок $[0,1]$. Для любого $t \in I$ рассмотрим вложение $i_t : X \longmapsto X \times I$, $i_t(x) = (x,t)$, $x \in X$. Если $G : X \times I \longmapsto Y$ – некоторая гомотопия, то отображение $G \circ i_t$ в дальнейшем будем обозначать через G_t. Пусть γ^k – каноническое k-мерное векторное расслоение над $G_{k,\infty}$. Положим

$$\xi = F^* \gamma^k = (tl\xi, P, X \times I), \quad \xi_t = F_t^* \gamma^k,$$

где $tl\xi$ – полное пространство расслоения ξ и $P : tl\xi \longmapsto X \times I$ – проекция ξ. Имеем

$$i_t^* \xi = \xi_t, \quad (F_1 \circ P_1)^* \gamma^k = P_1^* \xi_1,$$

где $P_1 : X \times I \longmapsto X$ – каноническая проекция. Пусть

$$(\Phi_t', i_t) : i_t^* \xi \longmapsto \xi, \quad (\Phi_t'', P_1) : P_1^* \xi_t \longmapsto \xi_t$$

– канонические морфизмы, где

$$\Phi_t' : tl(i_t^* \xi) \longmapsto tl\xi, \quad \Phi_t'' : tl(P_1^* \xi_t) \longmapsto tl\xi_t.$$

Согласно теореме 3.4.3 из [5] расслоение ξ изоморфно каждому из расслоений $P_1^* \xi_0$ и $P_1^* \xi_1$. Пусть $\Psi_i : \xi \longmapsto P_1^* \xi_i$, $i = 0,1$ – некоторые изоморфизмы. Рассмотрим некоторую гомотопию $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ и такой морфизм расслоений $(\Phi, P_1) : \xi \longmapsto \xi_1$, что для любого $t \in I$ морфизм $(\Phi_t, 1_X) : \xi_t \longmapsto \xi_1$, $\Phi_t = \Phi \circ \Phi_t'$ является изоморфизмом, причем $\Phi_1 = 1_{\xi_1}$. Всякий такой морфизм вместе с семейством изоморфизмов Φ_t будем называть *присоединенным к гомотопии* F. Изоморфизм Φ_0 также называют присоединенным к F.

Предложение 1. *Для любой гомотопии* $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ *существует морфизм, присоединенный к* F, *и существует изоморфизм* $\widetilde{\Psi}_0 : \xi \longmapsto P_1^*\xi_0$ *такой, что*

$$(\Phi_0'', P_1) \circ (\widetilde{\Psi}_0, 1_{X\times I}) \circ (\Phi_0', i_0) = 1_{\xi_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим изоморфизм $(\Phi_1'', P_1) \circ (\Psi_1, 1_{X\times I}) \circ (\Phi_1', i_1)$, и пусть $\chi : \xi_1 \longmapsto \xi_1$ – обратный к нему изоморфизм. Положим $\Phi = \chi \circ \Phi_1'' \circ \Psi_1$. Тогда морфизм

$$(\Phi, P_1) = (\chi, 1_X) \circ (\Phi_1'', P_1) \circ (\Psi_1, 1_{X\times I})$$

будет требуемым морфизмом. Существует морфизм $(\overline{\Phi}, P_1) : \xi \longmapsto \xi_0$ такой, что для любого $t \in I$ морфизм $(\overline{\Phi}_t, 1_X)$ является изоморфизмом и $\overline{\Phi}_0 = 1_{\xi_0}$. Изоморфизм $\widetilde{\Psi}_0 : tl\xi \longmapsto tl(P_1^*\xi_0)$ определим следующим образом : если $y \in tl\xi$, то $\widetilde{\Psi}_0(y) = (P(y), \overline{\Phi}(y))$.

Предложение 2. *Пусть даны два морфизма* $(\Phi^j, P_1) : \xi \longmapsto \xi_1$ *и* $\Phi_t^j : \xi_t \longmapsto \xi_1$, $j = 0, 1$, *присоединенные к одной и той же гомотопии* F. *Тогда существует такой изоморфизм* $\varphi : P_1^*\xi_0 \longmapsto P_1^*\xi_1$, *что*

$$(\Phi_1'', P_1) \circ (\varphi, 1_{X\times I}) \circ (\Psi_0 \circ \Phi_j', i_j) = (\Phi_0^j, 1_X), \quad j = 0, 1.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $((x,\tau), v)$, где $(x,\tau) \in X \times I$, и пусть v – некоторый вектор, принадлежащий слою расслоения ξ_t над точкой x. Определим отображение $\varphi : tl(P_1^*\xi_0) \longmapsto tl(P_1^*\xi_1)$ формулой

$$\varphi((x,t), v) = \begin{cases} ((x,t), \Phi^0((x,2t), \widetilde{\Psi}_0^{-1}((x,2t), v))), & 0 \le t \le 1/2, \\ ((x,t), \Phi^1((x,2-2t), \widetilde{\Psi}_0^{-1}((x,2-2t), v))), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Пусть X' – подпространство пространства X и $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия. Положим

$$F' = F\big|_{X'\times I}, \quad P_1' = P_1\big|_{X'\times I}, \quad \xi = F^*\gamma^k,$$

$$\xi' = (F')^*\gamma^k, \quad \xi_t = F_t^*\gamma^k, \quad \xi_t' = (F_t')^*\gamma^k, \quad t \in I.$$

Рассмотрим некоторый морфизм $(\Phi, P_1) : \xi \longmapsto \xi_1$, $\Phi_t : \xi_t \longmapsto \xi_1$, $t \in I$, присоединенный к гомотопии F, и пусть $(\Phi', P_1') : \xi' \longmapsto \xi_1'$, $\Phi_t' : \xi_t' \longmapsto \xi_1'$ –

морфизмы, полученные ограничением морфизмов (Φ, P_1) и Φ_t на подрасслоения ξ' и ξ'_t, соответственно. Следующее утверждение легко следует из доказательства предложения 1.

Предложение 3. *Морфизм (Φ', P'_1) вместе с семейством изоморфизмов Φ'_t определяет некоторый морфизм, присоединенный к гомотопии F'*

Пусть $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторые отображения. Положим $\xi = f_0^*\gamma^k$, $\eta = f_1^*\gamma^k$. Пусть $(\varphi, 1_{X\times I}) : P_1^*\xi \longmapsto P_1^*\eta$ – некоторый морфизм векторных расслоений. Рассмотрим морфизмы

$$(\widetilde{\Phi}_t, 1_X) : \xi = i_t^*(P_1^*\xi) \longmapsto P_1^*\xi \xrightarrow{(\varphi, 1_{X\times I})} P_1^*\eta \longmapsto \eta, \quad t \in I,$$

где $i_t^*(P_1^*\xi) \longmapsto P_1^*\xi$ и $P_1^*\eta \longmapsto \eta$ – канонические морфизмы, индуцированные отображениями i_t и P_1, соответственно. Изоморфизмы $\Phi_i : \xi \longmapsto \eta$, $i = 0, 1$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\varphi : P_1^*\xi \longmapsto P_1^*\eta$ такой, что $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i$, $i = 0, 1$. Следующее утверждение легко вытекает из предложения 2.

Предложение 4. *Пусть $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия и $\xi_0 = F_0^*\gamma^k$, $\xi_1 = F_1^*\gamma^k$. Пусть $\Phi_F^i : \xi_0 \longmapsto \xi_1$, $i = 0, 1$ – некоторые изоморфизмы, присоединенные к F. Тогда изоморфизмы Φ_F^0 и Φ_F^1 эквивалентны.*

Две гомотопии $F'F'' : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ будем называть *эквивалентными*, если $F'_i = F''_i$, $i = 0, 1$ и отображения F' и F'' гомотопны относительно ∂I.

Предложение 5. *Пусть $F', F'' : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – эквивалентные гомотопии и $\Phi_{F'}$, $\Phi_{F''}$ – произвольные изоморфизмы, присоединенные к F' и F'', соответственно. Тогда эти изоморфизмы эквивалентны.*

Для данного символа Шуберта $a = (a_1, ..., a_n, k)$ (см. [3]) положим $\hat{a} = (a_1+n+k, ..., a_n+n+k, n+2k)$. Через $S(a)$ и $S(\hat{a})$ обозначим псевдомногообразия Шуберта, порожденные символами a и $\hat{a}$, соответственно. Стандартное вложение $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{2n+2k}$ индуцирует канонические вложения

$$i_{n,k} : G_{n,k} \longmapsto G_{n,n+2k}, \quad i_a : S(a) \longmapsto S(\hat{a}).$$

Имеем $s_{\hat{a}} \circ i_a = i_{n,k} \circ s_a$, где s_a обозначает каноническое вложения $S(a) \longmapsto G_{n,k}$.

Предложение 6. *Пусть $f_0, f_1 : X \longmapsto S(a)$ – непрерывные отображения. Векторные расслоения $f_0^*\gamma(a)$ и $f_1^*\gamma(a)$ изоморфны тогда и только тогда, когда отображения $i_a \circ f_0$, $i_a \circ f_1 : X \longmapsto S(\hat{a})$ гомотопны.*

Доказательство. Пусть $a = (a_1, ..., a_n, k)$, и пусть $u^0 = (u_1^0, ..., u_{n+k}^0)$, $v^1 = (v_1^1, ..., v_{n+k}^1)$ – a-оснащения расслоений $\xi_0 = f_0^*\gamma(a)$ и $\xi_1 = f_1^*\gamma(a)$, индуцированные отображениями f_0 и f_1, соответственно. Допустим, что расслоения ξ_0 и ξ_1 изоморфны и рассмотрим некоторый изоморфизм $\Psi : \xi_0 \longmapsto \xi_1$. Положим $v^0 = (v_1^0, ..., v_{n+k}^0)$, где $v_i^0 = \Psi \circ u_i^0$. Последовательности $\hat{v}_i = (v_1^i, ..., v_{2n+2k}^i)$, $i = 0, 1$, где $v_i^j = 0$ при $j > n + k$, определяют некоторые $\hat{a}$-оснащения $\hat{v}^0$, $\hat{v}^1$ расслоения ξ_1. Для любого $t \in I$ и $i = 1, ..., 2n + 2k$ определим сечения v_i^t расслоения ξ_1 формулой

$$v_i^t = \begin{cases} (1-t)v_i^0 + tv_i^1, & 1 \le i \le n+k, \\ (t-t^2)v_{i-n-k}^0, & n+k+1 \le i \le 2n+2k. \end{cases}$$

Для каждого $t \in I$ последовательность сечений $\hat{v}^t = (v_1^t, ..., v_{2n+2k}^t)$ определяет некоторое $\hat{a}$-оснащение расслоения ξ_1. Пространство расслоений $P_1^*\xi_1$ канонически гомеоморфно к $tl\xi_1 \times I$, а пересечения

$$v_i : X \times I \longmapsto tl\xi_1 \times I, \quad v_i(x,t) = (v_i^t(x), t), \quad x \in X, \quad t \in I, \quad i = 1, ..., 2n+2k$$

определяют некоторое $\hat{a}$-оснащение $\hat{v} = (v_1, ..., v_{2n+2k})$ расслоения $P_1^*\xi_1$. Пусть $F : X \times I \longmapsto S(\hat{a})$ – гауссово отображение расслоения $(P_1^*\xi_1; \hat{v})$, т.е. $P_1^*\xi_1 = F^*\gamma(\hat{a})$, $\hat{v} = F^*v_{\hat{a}}$. Поскольку

$$(P_1^*\xi_1; \hat{v})\big|_{X \times i} = (f_i^*\gamma(\hat{a}); \hat{v}^i), \quad i = 0, 1,$$

то из теоремы 1 в [3] следует, что $i_a \circ f_0 = F_0$, $i_a \circ f_1 = F_1$. Следовательно, отображения $i_a \circ f_0$ и $i_a \circ f_1$ гомотопны. Справедливость обратного утверждения следует из теоремы 3.4.7 в [5].

Построенную гомотопию $X \times I \longmapsto S(\hat{a})$ между отображениями $i_a \circ f_0$ и $i_a \circ f_1$ в дальнейшем будем обозначать через $F^\Psi(f_0, f_1)$.

Следствие 1. Пусть $(\Phi, P_1) : P_1^*\xi_1 \longmapsto \xi_1$ – канонический морфизм. Тогда $\Phi \circ v_i(x,t) = v_i^t(x)$ и, поэтому, для любого $t \in I$ композиция каноническх морфизмов

$$(\Phi_t, 1_X) : i_t^*(P_1^*\xi_1) \longmapsto P_1^*\xi_1 \longmapsto \xi_1$$

является изоморфизмом и $\Phi_0 = \Psi$. Так как

$$(P_1^*\xi; \hat{v}) = \big(F^\Psi(f_0, f_1)^*\gamma(\hat{a}), F^\Psi(f_0, f_1)^* v_{\hat{a}}\big),$$

то (Φ, P_1) является морфизмом, присоединенным к гомотопии $s'_{\hat{a}} \circ F^\Psi(f_0, f_1)$, где $s'_{\hat{a}} : S(\hat{a}) \longmapsto G_{k,\infty}$ – каноническое вложение, причем Ψ является изоморфизмом, присоединенным к гомотопии $s'_{\hat{a}} \circ F^\Psi(f_0, f_1)$.

Введем понятие гомотопии, присоединенной к данному изоморфизму векторных расслоений. Пусть X – компактное пространство, и пусть $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – такие отображения, что векторные расслоения $f_0^*\gamma^k$ и $f_1^*\gamma^k$ изоморфны. Пусть $\Psi : f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$ – некоторый изоморфизм. Ввиду компактности X существуют такое число n и такие отображения $f'_0, f'_1 : X \longmapsto G_{k,n}$, что $f_0 = i'_{k,n} \circ f'_0$ и $f_1 = i'_{k,n} \circ f'_1$, где $i'_{k,n} : G_{k,n} \longmapsto G_{k,\infty}$ – каноническое вложение. Ясно, что $f_j^*\gamma^k = f_j'^*\gamma^{k,n}$, $j = 0, 1$. Для $a = (n+1, ..., n+k; n)$ имеем $S(a) = G_{k,n}$ и $S(\hat{a}) = G_{k,k+2n}$. Пусть $F^\Psi(f'_0, f'_1) : X \times I \longmapsto G_{k,k+2n}$ – каноническая гомотопия между отображениями $s_a \circ f'_0$ и $s_a \circ f'_1$, построенными в предложении 6. Положим $F^\Psi = i'_{k,k+2n} \circ F^\Psi(f'_0, f'_1)$. Отображение $F^\Psi : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ называется *гомотопией, присоединенной к изоморфизму* Ψ.

Предложение 7. *Пусть X – компактное пространство, $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторые отображения и $\Psi : f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$ – изоморфизм векторных расслоений. Если F^Ψ - гомотопия, присоединенная к изоморфизму Ψ, то Ψ – изоморфизм, присоединенной к гомотопии F^Ψ.*

Доказательство. Пусть $F^\Psi = i'_{k,k+2n} \circ F^\Psi(f'_0, f'_1)$, где $f'_0, f'_1 : X \longmapsto G_{k,n}$ – такие отображения, что $f_i = i'_{k,n} \circ f'_i$, $i = 0, 1$. Для символа Шуберта $a = (n+1, ..., n+k; n)$ имеем $s'_{\hat{a}} = i'_{k,k+2n}$, и требуемое утверждение вытекает из следствия 1.

Изоморфизм Ψ называется *каноническим изоморфизмом, присоединенным к гомотопии* F^Ψ, а соответствующий морфизм $(\Phi, P_1) : (F^\Psi)^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$, построенный в следствии 1, называется *каноническим морфизмом, присоединенным к гомотопии* F^Ψ.

Предложение 8. *Пусть даны некоторые отображения $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ и некоторый изоморфизм $\Psi : f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$. Если $F^\Psi, G^\Psi : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – две гомотопии, присоединенные к Ψ, то F^Ψ и G^Ψ эквивалентны.*

Предложение 9. *Пусть X – компактное пространство, $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторые отображения, $\Phi_0, \Phi_1 : f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$ – эквивалентные изоморфизмы и F^{Φ_0}, F^{Φ_1} – гомотопии, присоединенные к Φ_0 и Φ_1, соответственно. Тогда гомотопии F^{Φ_0} и F^{Φ_1} эквивалентны.*

Доказательство. Положим $\xi = f_0^*\gamma^k$, $\eta = f_1^*\gamma^k$. Существует некоторый изоморфизм $\varphi : P_1^*\xi \longmapsto P_1^*\eta$ такой, что для любого $t \in I$ морфизм

$$\widetilde{\Phi}_t : \xi = i_t^*(P_1^*\xi) \longmapsto P_1^*\xi \xrightarrow{\varphi} P_1^*\eta \longmapsto \eta$$

является изоморфизмом, где $i_t^*(P_1^*\xi) \longmapsto P_1^*\xi$ и $P_1^*\eta \longmapsto \eta$ – канонические морфизмы и $\widetilde{\Phi}_i = \Phi_i$, $i = 0, 1$. Пусть $F^\varphi : X \times I \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – гомотопия, присоединенная к φ. Отображения $F^\varphi\big|_{X\times I\times 0}$ и $F^\varphi\big|_{X\times I\times 1}$ являются гомотопиями, присоединенными к изоморфизмам Φ_0 и Φ_1, соответственно. В силу предложения 8 эти гомотопии эквивалентны, соответственно, гомотопиям F^{Φ_0} и F^{Φ_1}. Следовательно F^{Φ_0} и F^{Φ_1} эквивалентны.

Пусть X – компактное пространство, $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия. Положим $\xi = F^*\gamma^k$ и $\xi_t = F_t^*\gamma^k$. Пусть

$$(\Phi, P_1) : \xi \longmapsto \xi_1, \quad \Phi_t : \xi_t \longmapsto \xi_1$$

– некоторый морфизм, присоединеннный к F. Ввиду компактности $X \times I$ существуют отображения $F_t' : X \longmapsto G_{k,n}$, $t \in I$ такие, что $F_t = i_{k,n}' \circ F_t'$. Пусть $F^{\Phi_t} : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ_t. Отметим, что $\Phi_1 : \xi_1 \longmapsto \xi_1$ – тождественный изоморфизм и $F^{\Phi_1}(x,t) = F_1(x)$ для любых $x \in X$, $t \in I$.

Предложение 10. *Гомотопии F^{Φ_0} и F эквивалентны.*

Пусть X – компактное пространство, и пусть $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – непрерывные отображения. Обозначим через $[f_0^*\gamma^k, f_1^*\gamma^k]$ множество классов эквивалентности всех изоморфизмов $f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$, через $[f_0, f_1]$ – множество классов эквивалентности всех гомотопий

$$F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}, \quad F_0 = f_0, \quad F_1 = f_1.$$

Если $\Psi : f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$ – некоторый изоморфизм, то сопоставление $\Psi \longmapsto F^\Psi$, где F^Ψ – гомотопия, присоединенная к изоморфизму Ψ, определяет, в силу предложений 8 и 9, некоторое отображение $\alpha : [f_0^*\gamma^k, f_1^*\gamma^k] \longmapsto [f_0, f_1]$. Рассмотрим соответствие $F \longmapsto \Phi_F$, где Φ_F – изоморфизм $f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$, приосоединенный к гомотопии F. В силу предложений 4 и 5 это соответствие определяет некоторое отображение $\beta : [f_0, f_1] \longmapsto [f_0^*\gamma^k, f_1^*\gamma^k]$. Из предложений 7 и 10 следует, что отображения $\beta \circ \alpha$ и $\alpha \circ \beta$ являются тождественными отображениями множеств $[f_0^*\gamma^k, f_1^*\gamma^k]$ и $[f_0, f_1]$. Тем самым доказано следующее

Предложение 11. *Пусть X – компактное пространство и $f_0, f_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – непрерывные отображения. Тогда существует каноническое биективное соответствие между элементами множеств классов эквивалентности всех изоморфизмов $f_0^*\gamma^k \longmapsto f_1^*\gamma^k$ и элементами множеств классов эквивалентности всех гомотопий $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$, $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.*

Рассмотрим вложение евклидовых пространств $\mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Для $e \in \in (\mathbb{R}^{n+k})^\perp$, $|e| = 1$ положим

$$j_k : G_{k,\infty} \longmapsto G_{k+1,\infty}, \quad j_k^*\gamma^{k+1} = \gamma^k \oplus \theta$$

– каноническое вложение, где θ – тривиальное одномерное расслоение, оснащенное канонической тривиализацией, возникающей на векторе e. Пусть $F_0, F_1 : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторые отображения и $\Phi_0 : F_0^*\gamma^k \longmapsto F_1^*\gamma^k$ – некоторый изоморфизм. Рассмотрим расслоения

$$(j_k \circ F_i)^*\gamma^{k+1} = F_i^*\gamma^{k+1} \oplus F_i^*\theta, \quad i = 0, 1.$$

Так как все слои расслоения θ канонически изоморфны между собой, то имеется канонический изоморфизм $\varepsilon : F_0^*\theta \longmapsto F_1^*\theta$. Поэтому возникает изморфизм

$$\Phi \oplus \varepsilon : (j_k \circ F_0)^*\gamma^{k+1} \longmapsto (j_k \circ F_1)^*\gamma^{k+1},$$

который будем называть *надстройкой* над изоморфизмом Φ и будем обозначать его через $E(\Phi)$.

Предложение 12. *Пусть* $F : X \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ *– некоторая гомотопия и* $\Phi_F : F_0^*\gamma^k \longmapsto F_1^*\gamma^k$ *– изоморфизм, присоединенный к* F. *Тогда* $E(\Phi_F)$ *является изоморфизмом, присоединенным к* $j_k \circ F$.

Пространство путей в $G_{k,\infty}$ будем обозначать через $G_{k,\infty}^I$. Если $\omega \in G_{k,\infty}^I$, $t \in I$, то определим *путь* $\omega^t \in G_{k,\infty}^I$ формулой $\omega^t(t') = \omega(t \circ t')$, $t' \in I$ и рассмотрим отображения

$$\alpha : G_{k,\infty}^I \times I \longmapsto G_{k,\infty}^I, \ . \ \alpha_k(\omega, t) = \omega^t, \quad \omega \in G_{k,\infty}^I, \quad t \in I,$$

а также отображения

$$(j_k)_* : G_{k,\infty}^I \longmapsto G_{k+1,\infty}^I, \quad (j_k)_*(\omega) = j_k \circ \omega,$$

порожденные отображениями $j_k : G_{k,\infty} \longmapsto G_{k+1,\infty}$. Для $\beta_k : G_{k,\infty}^I \longmapsto G_{k,\infty}$, $\beta_k(\omega) = \omega(1)$ имеем

$$(j_k)_* \circ \alpha_k = \alpha_{k+1} \circ ((j_k)_* \times 1_I), \quad j_k \circ \beta_k = \beta_{k+1} \circ (j_k)_*, \quad \beta_k(\omega^t) = \omega(t).$$

В дальнейшем постоянный путь в точке $x \in G_{k,\infty}$ будем обозначать через ω_x.

Пусть S_k – произвольное пространство, $h_k : S_k \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторое непрерывное отображение. Определим расслоение $f_k : B_k \longmapsto G_{k,\infty}$ (см. [6]), гомотопически эквивалентное отображению h_k. Напомним, что B_k определяется как подпространство в $S_k \times G_{k,\infty}^I$, состоящее из всех таких точек (x, ω), для которых $\omega(0) = h_k(x)$, а отображение f_k определяется формулой $f_k(x, \omega) = \omega(1)$. Рассмотрим взаимно обратные гомотопические эквивалентности

$$r_k : B_k \longmapsto S_k, \, q_k : S_k \longmapsto B_k, \, r_k(x, \omega) = x, \, q_k(x) = (x, \omega_{h_k(x)}), \, x \in S_k, \, \omega \in G_{k,\infty}^I.$$

Отметим, что $f_k \circ q_k = h_k$, $r_k \circ q_k = 1_{S_k}$. Пусть отображения $f : M \longmapsto G_{k,\infty}$, $\hat{f} : M \longmapsto B_k$ и гомотопия $F : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ такие, что $f = f_k \circ \hat{f}$, $F_0 = f$. Рассмотрим накрывающую гомотопию $\hat{F} : M \times I \longmapsto B_k$, $f_k \circ \hat{F} = F$, $\hat{f}_0 = f$, построенную в [6] при доказательстве теоремы 2.8.9. Эту гомотопию будем называть *каноническим поднятием* гомотопии F. Она строится следующим образом : пусть $l_k : B_k \longmapsto S_k \times G^I_{k,\infty}$ – каноническое вложение. Рассмотрим отображения $\overline{f} = P_1 \circ l_k \circ \hat{f}$, $f' = P_2 \circ l_k \circ \hat{f}$, где

$$P_1 : S_k \times G^I_{k,\infty} \longmapsto S_k, \quad P_2 : S_k \times G^I_{k,\infty} \longmapsto G^I_{k,\infty}$$

– канонические проекции. Тогда $\hat{f}(x) = \left(\overline{f}(x), f'(x)\right)$, $x \in M$. Далее, рассмотрим отображение $f'' : M \times I \longmapsto G^I_{k,\infty}$, задаваемое формулой

$$f''(x,t)(t') = \begin{cases} f'(x)(\frac{2t'}{2-t}), & 0 \le 2t' \le 2-t \le 2, \quad x \in M, \\ F(x, 2t'+t-2), & 1 \le 2-t \le 2t' \le 2, \quad x \in M. \end{cases}$$

Каноническое поднятие $\hat{F}$ определяется формулой

$$\hat{F}(x,t) = \left(\overline{f}(x), f''(x,t)\right), \quad x \in M, \quad t \in I.$$

Заметим, что $r_k \circ \hat{F}_t = \overline{f}$, $t \in I$.

Предложение 13. *Пусть $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$, $\overline{g} : M \longmapsto S_k$ – некоторые отображения, и пусть $G : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$, $G_0 = h_k \circ \overline{g}$, $G_1 = g$ – некоторая гомотопия. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{G}$, $\hat{G}_0 = q_k \circ \overline{g}$ гомотопии G. Тогда $r_k \circ \hat{G}_t = \overline{g}$.*

Доказательство. Так как

$$q_k \circ \overline{g}(x) = \left(\overline{g}(x), \omega_{h_k \circ \overline{g}(x)}\right), \quad x \in M,$$

то $r_k \circ \hat{G}_t = \overline{g}$, $t \in I$.

Предложение 14. *Для всякого отображения $\hat{g} : M \longmapsto B_k$ отображения $h_k \circ r_k \circ \hat{g}$ и $f_k \circ \hat{g}$ канонически гомотопны между собой.*

Доказательство. Если $x \in M$, то $\hat{g}(x) = (r_k \circ \hat{g}(x), g'(x))$, где $g'(x) \in G^I_{k,\infty}$ – некоторый путь такой, что $g'(x)(0) = h_k \circ r_k \circ \hat{g}(x)$. Имеем, $f_k \circ \hat{g}(x) = g'(x)(1)$. Рассмотрим гомотопию $F : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$, $F = \beta_k \circ \alpha_k \circ (g' \times 1_I)$. Тогда

$$F_0(x) = (g'(x))^0(x) = g'(x)(0) = h_k \circ r_k \circ \hat{g}(x),$$
$$F_1(x) = (g'(x))^1(x) = g'(x)(1) = f_k \circ \hat{g}(x).$$

Следовательно, F – требуемая гомотопия.

Построенную гомотопию будем называть *канонической гомотопией, соединяющей отображения $h_k \circ r_k \circ \hat{g}$ и $h_k \circ \hat{g}$*, и будем обозначать через $H[\hat{g}]$. Таким образом, если $\hat{g} = (r_k \circ \hat{g}, g')$, то $H[\hat{g}] = \beta_k \circ \alpha_k \circ (g' \times 1_I)$. Для $M' \subset M$ положим $\hat{g}' = \hat{g}\big|_{M'}$. Имеем $H[\hat{g}'] = H[\hat{g}]\big|_{M' \times I}$.

Следствие 2. Пусть $\hat{g}_0, \hat{g}_1 : M \longmapsto B_k$ – некоторые послойно гомотопные поднятия отображения $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$. Тогда существует гомотопия $G : (M \times I) \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ такая, что

$$G\big|_{(M\times I)\times 0} = H[\hat{g}_0], \quad G\big|_{(M\times I)\times 1} = H[\hat{g}_1], \quad G\big|_{(M\times 1)\times t} = g, \quad t \in I.$$

Доказательство. Пусть $\hat{G} : M \times I \longmapsto B_k$, $\hat{G}_0 = \hat{g}_0$, $\hat{G}_1 = \hat{g}_1$ – некоторая послойная гомотопия. Тогда гомотопия $H[\hat{G}]$ будет требуемой.

Предложение 15. *Пусть $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$, $\overline{g} : M \longmapsto S_k$ – некоторые отображения, и пусть $F : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$, $F_0 = h_k \circ \overline{g}$, $F_1 = g$ – некоторая гомотопия. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F} : M \times I \longmapsto B_k$, $\hat{F}_0 = q_k \circ \overline{g}$ гомотопии F. Тогда гомотопии $H[\hat{F}_1]$ и F эквивалентны.*

Предложение 16 *Пусть $\hat{g} : M \longmapsto B_k$ – произвольное отображение, положим $\overline{g} = r_k \circ \hat{g}$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{H}[\hat{g}]$, $\hat{H}[\hat{g}]_0 = \hat{g}$ канонической гомотопии $H[\hat{g}]$. Тогда отображения $\hat{H}[\hat{g}]_1$ и $q_k \circ \overline{g}$ послойно гомотопны между собой.*

Зафиксируем некоторое пространство M и отображение $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$. Рассмотрим всевозможные пары $(\overline{g}, F)$, где $F : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия такая, что $F_0 = h_k \circ \overline{g}$, $F_1 = g$. Пары $(\overline{g}', F')$ и $(\overline{g}'', F'')$ будем считать эквивалентными, если F' и F'' гомотопны относительно конца 1 отрезка $I = [0,1]$. Обозначим класс эквивалентности пары $(\overline{g}, F)$ через $[(\overline{g}, F)]$, множество всех классов эквивалентности – через $\{[(\overline{g}, F)]\}$.

Рассмотрим множество всех поднятий $\hat{g} : M \longmapsto B_k$, $f_k \circ \hat{g} = g$ отображения g. Два таких поднятий будем считать эквивалентными, если они послойно гомотопны. Класс эквивалентности отображения $\hat{g}$ обозначим через $[\hat{g}]_p$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F}$ гомотопии F с условием $F_0 = q_k \circ \overline{g}$. В силу теоремы 2.8.10 из [6] возникает отображение

$$\alpha' : \{[(\overline{g}, F)]\} \longmapsto \{[\hat{F}_1]_p\}, \quad \alpha'[(\overline{g}, F)] = [\hat{F}_1]_p.$$

Рассмотрим некоторый элемент $[\hat{g}]_p$ и каноническую гомотопию

$$H[\hat{g}] : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}, \quad H[\hat{g}]_0 = h_k \circ r_k \circ \hat{g}, \quad H[\hat{g}]_1 = g$$

(см. следствие 2) вместе с отображением

$$\beta' : \{[\hat{g}]_p\} \longmapsto \{[(r_k \circ \hat{g}, H[\hat{g}])]\}, \quad \beta'([\hat{g}]_p) = [(r_k \circ \hat{g}, H[\hat{g}])].$$

Из предложений 15 и 16 получаем

Предложение 17. *Для произвольного пространства M и отображения $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$ отображения α', β' являются взаимно обратными биективными соответствиями.*

Пусть $\{S_k\}$ – последовательность пространств, и пусть $\{h_k\}$, $\{s_k\}$ – последовательность отображений таких, что

$$h_k : S_k \longmapsto G_{k,\infty}, \quad s_k : S_k \longmapsto S_{k+1}, \quad j_k \circ h_k = h_{k+1} \circ s_k, \quad k \geq k_0.$$

Пусть f_k – построенные выше расслоения, гомотопически эквивалентные отображениям h_k. Определим отображения $J_k : B_k \longmapsto B_{k+1}$ следующим образом : если $(x, \omega) \in B_k$, где $x \in S_k$, $\omega \in G^I_{k,\infty}$, $\omega(0) = h_k(x)$, то положим $J_k(x, \omega) = (s_k(x), j_k \circ \omega)$.

Предложение 18. *Для произвольного отображения $\hat{g} : M \longmapsto B_k$ имеем $H[J_k \circ \hat{g}] = j \circ H[\hat{g}]$.*

§2. (S, h)-ОСНАЩЕННЫЕ КОБОРДИЗМЫ

Пусть S_k – топологическое пространство, $h_k : S_k \longmapsto G_{k,\infty}$ – непрерывное отображение. Положим $\eta^k = h^*_k \gamma^k$. Пусть $\xi = g^* \gamma^k$, $g : X \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторое k-мерное векторное расслоение на некотором пространстве X. Определим (S_k, h_k)-*оснащение* расслоения ξ как пару $(\overline{g}, \Phi)$, состоящую из некоторого непрерывного отображения $\overline{g} : X \longmapsto S_k$, $h_k \circ \overline{g} = g$ и некоторого изоморфизма $\Phi : \overline{g}^* \eta^k \longmapsto \xi$ векторных расслоений. Пару $(\xi, (\overline{g}, \Phi))$, где ξ – векторное расслоение, а $(\overline{g}, \Phi)$ – ее (S_k, h_k)-оснащение, будем называть (S_k, h_k)-*оснащенным расслоением*. В частном случае, когда

$$S_k = S(a), \quad a = (a_1, ..., a_k; l), \quad h_k = s'_a : S(a) \longmapsto G_{k,\infty}, \ .$$

имеем $\eta^k = \gamma(a)$. В силу теоремы 1 из [3] в этом случае (S_k, h_k)-оснащение расслоения ξ эквивалентно некоторому a-оснащению. Если $a = (1, ..., k; 0)$, то

(S_k, h_k)-оснащение эквивалентно k линейно независимым сечениям (классическое оснащение по Понтрягину, см. [2]). Если $S_k = G_{k,\infty}$, $h_k = 1_{G_{k,\infty}}$, то $\eta^k = \gamma^k$, и в силу теоремы 2 из [3] (S_k, h_k)-оснащение расслоения ξ эквивалентно его счетному оснащению.

Пусть M и N – гладкие многообразия размерности n и $n+k$, соответственно, и M – подмногообразие в N. Предположим, что либо они оба без края, либо с краем. В последнем случае преполагается, что ∂M – подмногообразие в ∂N и имеет непустое пересечение с каждой компонентой связности многообразия ∂N. Ниже N будет обозначать либо евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+k}$, либо его замкнутое полупространство $\mathbb{R}^{n+k}_+$, образованное всеми точками $(x_1, ..., x_{n+k})$, $x_{n+k} \geq 0$, либо многообразие $\mathbb{R}^{n+k} \times I$. Край $\partial\mathbb{R}^{n+k}_+$ и каждую компоненту связности края

$$\partial(\mathbb{R}^{n+k} \times I) = (\mathbb{R}^{n+k} \times 0) \cup (\mathbb{R}^{n+k} \times 1)$$

будем отождетсвлять с $\mathbb{R}^{n+k}$. Пусть ν – нормальное расслоение подмногообразия M. Тогда $\nu = g^*\gamma^k$, где $g : M \longmapsto G_{k,n}$ – гауссово отображение расслоения ν. Отображение g является композицией соответствующего нормального отображения $M \longmapsto G_{k,n}$ и отображения стандартного вложения $G_{k,n} \longmapsto G_{k,\infty}$. Если $\partial M \neq \emptyset$, то предполагается, что M в токчах края ортогонально к ∂N. Тогда ограничение расслоения ν на ∂M совпадает с нормальным расслоением подмногообразия $\partial M \subset \partial N$.

Будем говорить, что *имеется (S_k, h_k)-оснащение* подмногообразия M, если дано некоторое (S_k, h_k)-оснащение его нормального расслоения ν. Пару, состоящую из подмногообразия M и его некоторого (S_k, h_k)-оснащения $(\overline{g}, \Phi)$ будем обозначать через $(M, (\overline{g}, \Phi))$ и называть *(S_k, h_k)-оснащенным подмногообразием* многообразия N, ил просто *(S_k, h_k)-оснащенным многообразием*.

Пусть $(M, (\overline{g}, \Phi))$ – некоторое (S_k, h_k)-оснащенное n-мерное многообразие, и пусть L – связная компонента многообразия $\partial N \neq \emptyset$. Пусть $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$ – гауссово отображение нормального расслоения подмногообразия $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Положим $g' = g|_L$, $\overline{g}' = \overline{g}|_L$. Ограничение отображения Φ на $tl(h_k \circ \overline{g}')^*\gamma^k$

порождает изоморфизм

$$\Phi' : (h_k \circ \overline{g}')^* \gamma^k \longmapsto (g')^* \gamma^k$$

и (S_k, h_k)-оснащенное многообразие $(L, (\overline{g}', \Phi'))$. Будем называть (S_k, h_k)-оснащение $(\overline{g}', \Phi')$ *ограничением на* L (S_k, h_k)*-оснащения* $(\overline{g}, \Phi)$.

Пусть $(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$ – некоторые (S_k, h_k)-оснащенные n-мерные подмногообразия евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$. Будем говорить, что $(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$ (S_k, h_k)*-оснащенно бордантны*, если существует такое (S_k, h_k)-оснащенное $(n+1)$-мерное подмногообразие $(M, (\overline{g}, \Phi))$ многообразия $\mathbb{R}^{n+k} \times I$, что

$$M \cap (\mathbb{R}^{n+k} \times i) = M_i \times i, \quad i = 0, 1$$

и ограничения оснащения $(\overline{g}, \Phi)$ на $M_0 \times 0$ и $M_1 \times 1$ совпадают с $(\overline{g}_0, \Phi_0)$ и $(\overline{g}_1, \Phi_1)$, соответственно. Подмногообразие $(M, (\overline{g}, \Phi))$ будем называть *пленкой* (S_k, h_k)*-оснащенного бордизма* между $(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$.

Отношение (S_k, h_k)-оснащенной бордантности для (S_k, h_k)-оснащенных многообразий является отношением эквивалентности. Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для классически оснащенных многообразий (см. [2]). Класс (S_k, h_k)-оснащенных бордизмов (S_k, h_k)-оснащенного многообразия $(M, (\overline{g}, \Phi))$ будем обозначать через $[(M, (\overline{g}, \Phi))]_k$. Множество классов (S_k, h_k)-оснащенных бордизмов n-мерных замкнутых (S_k, h_k)-оснащенных многообразий обозначим через $\Pi_n(S_k, h_k)$. Множество $\Pi_n(S_k, h_k)$ превращается в группу с несвязным объединением (S_k, h_k)-оснащенных подмногообразий многообразия $\mathbb{R}^{n+k}$. Таким образом, для всякого фиксированного $k \geq 0$ возникает категория кобордизма [4], которую будем обозначать через $\Pi(S_k, h_k)$ и называть *категорией кобордизма* (S_k, h_k)-оснащенных многообразий.

Пусть имеются последовательность пространств $\{S_k\}$ и последовательности $\{s_k\}$, $\{h_k\}$ таких отображений $s_k : S_k \longmapsto S_{k+1}$, $h_k : S_k \longmapsto G_{k,\infty}$, что $h_{k+1} \circ s_k = j_k \circ h_k$, $k \geq 0$. Пусть $(M, (\overline{g}, \Phi))$ – произвольное (S_k, h_k)-оснащенное многообразие. Изоморфизм Φ порождает канонический изоморфизм

$$E(\Phi) : (h_{k+1} \circ (s_k \circ \overline{g}))^* \gamma^{k+1} \longmapsto (j_k \circ g)^* \gamma^{k+1}.$$

Вложение $M \subset \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$ вместе с отображением $s_k \circ \overline{g}$ и изоморфизмом $E(\Phi)$ определяют некоторое (S_{k+1}, h_{k+1})-оснащенное многообразие $(M, (s_k \circ \overline{g}, E(\Phi)))$, которое обозначим через $E(M, (\overline{g}, \Phi))$ и будем называть *надстройкой* над $(M, (\overline{g}, \Phi))$. Введем обозначения

$$E^0(M, (\overline{g}, \Phi)) = (M, (\overline{g}, \Phi)), \quad E^m(M, (\overline{g}, \Phi)) = E(E^{m-1}(M, (\overline{g}, \Phi))), \quad m \geq 1.$$

Класс эквивалентности $[\{E^m(M, (\overline{g}, \Phi))\}]$ последовательностей $\{E^m(M, (\overline{g}, \Phi))\}$ будем называть *(S,h)-оснащенным многообразием* (две последовательности считаются эквивалентными, если они совпадают, начиная с некоторого m). Понятие края (S,h)-оснащенного многообразия определяется естественным образом.

Два (S,h)-оснащенные многообразия называются *(S,h)-оснащенно бордантными*, если в соответствующих классах эквивалентности существуют такие последовательности

$$\{E^m(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))\} \quad \text{и} \quad \{E^m(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))\},$$

что (S_k, h_k)-оснащенные многообразия $E^m(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $E^m(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$ являются (S_k, h_k)-бордантными, начиная с некоторого значения m. Легко проверяется, что определение корректно и отношение (S,h)-бордантности является отношением эквивалентности. Тем самым возникает *категория кобордизма (S,h)-оснащенных многообразий*, которую будем обозначать через $\Pi(S,h)$. Класс (S,h)-оснащенных бордизмов (S,h)-оснащенного многообразия $[\{E^m(M, (\overline{g}, \Phi))\}]$ будем обозначать через $[(M, (\overline{g}, \Phi))]$, а множество классов (S,h)-оснащенных бордизмов n-мерных замкнутых (S,h)-оснащенных многообразий будем обозначать через $\Pi_n(S,h)$. Если $(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$ (S_k, h_k)-оснащенно бордантны, то $E(M_0, (\overline{g}_0, \Phi_0))$ и $E(M_1, (\overline{g}_1, \Phi_1))$ также (S_k, h_k)-оснащенно бордантны. Ввиду этого сопоставление $[(M, (\overline{g}, \Phi))]_k \longmapsto [E(M, (\overline{g}, \Phi))]_{k+1}$ определяет гомоморфизм групп

$$E_* : \Pi_n(S_k, h_k) \longmapsto \Pi_n(S_{k+1}, h_{k+1}).$$

Гомоморфизм E_* называется *надстроенным гомоморфизмом*, индуцированным оператором надстройки E.

Теперь, следуя [7], исходя из последовательностей пространств S_k и отображений

$$h_k : S \longmapsto G_{k,\infty}, \quad s_k : S_k \longmapsto S_{k+1}, \quad h_{k+1} \circ s_k = j_k \circ h_k,$$

определим категорию кобордизма (S, h)-многообразий. Для этого рассмотрим расслоения $f_k : B_k \longmapsto G_{k,\infty}$, гомотопически эквивалентные отображениям h_k. Пусть M – некоторое n-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+k}$ и $\overline{g} : M \longmapsto B_k$ – некоторое поднятие гауссово отображения $g : M \longmapsto G_{k,\infty}$ подмногообразия M. Согласно принятой в [4] терминологии всякий класс послойной гомотопий $[\hat{g}]_p$ называется (S_k, h_k)-*структурой* расслоения $g^*\gamma^k$. Пара $(M, [\hat{g}]_p)$, состоящая из подмногообразия M и некоторой (S_k, h_k)-структуры нормального расслоения $g^*\gamma^k$, называется *многообразием с* (S_k, h_k)-*структурой*, или (S_k, h_k)-многообразием. Понятие ограничения (S_k, h_k)-структуры на край и понятие (S_k, h_k)-бордантности для (S_k, h_k)-многообразий определяется аналогично соответствующим понятиям для (S_k, h_k)-оснащенных многообразий.

Класс (S_k, h_k)-бордантности данного (S_k, h_k)-многообразия $(M, [\hat{g}]_p)$ будем обозначать через $[(M, [\hat{g}]_p)]_k$. Обозначим через $\Omega_n(S_k, h_k)$ группу (S_k, h_k)-кобордизмов n-мерных замкнутых (S_k, h_k)-многообразий. Таким образом, для всякого фиксированного k возникает *категория кобордизма* (S_k, h_k)-*многообразий*, которую будем обозначать через $\Omega(S_k, h_k)$. Пусть $(M, [\hat{g}]_p)$ – некоторое (S_k, h_k)-многообразие. Тогда возникает (S_{k+1}, h_{k+1})-многообразие $(M, [J_k \circ \hat{g}]_p)$, которое будем обозначать через $\Sigma(M, [\hat{g}]_p)$ и называть *надстройкой над* $(M, [\hat{g}]_p)$. Положим

$$\Sigma^0(M, [\hat{g}]_p) = (M, [\hat{g}]_p), \quad \Sigma^m(M, [\hat{g}]_p) = \Sigma\big(\Sigma^{m-1}(M, [\hat{g}]_p)\big), \quad m \geq 1.$$

Если $(M_0, [\hat{g}_0]_p)$ и $(M_1, [\hat{g}_1]_p)$ (S_k, h_k)-бордантны, то $\Sigma(M_0, [\hat{g}_0]_p)$ и $\Sigma(M_1, [\hat{g}_1]_p)$ также (S_k, h_k)-бордантны. Поэтому, сопоставление $[(M, [\hat{g}]_p)]_k \longmapsto [\Sigma(M, [\hat{g}]_p)]_{k+1}$ определяет гомоморфизм групп

$$\Sigma_* : \Omega_n(S_k, h_k) \longmapsto \Omega_n(S_{k+1}, h_{k+1}),$$

который будем называть *надстроенным гомоморфизмом*, индуцированным оператором Σ. Напомним, что (S,h)-многообразие в смысле [4] представляет собой класс эквивалентности последовательностей $\{\Sigma^m(M,[\hat{g}]_p)\}$ (две последовательности считаются эквивалентными, если они совпадают, начиная с некоторого m.) Категорию кобордизма (S,h)-многообразий будем обозначать через $\Omega(S,h)$. Пусть $\Omega_n(S,h)$ – группа (S,h)-кобордизмов n-мерных замкнутых (S,h)-многообразий (см. [4]). Тогда $\Omega_n(S,h) = \varinjlim \Omega_n(S_k,h_k)$, где предел определяется последовательностью

$$\Omega_n(S_0,h_0) \xrightarrow{\Sigma_*} \Omega_n(S_1,h_1) \xrightarrow{\Sigma_*} \cdots .$$

Пример 1. Пусть $a = (a_1,\ldots,a_k;l)$ – произвольный символ Шуберта. Положим

$$E(a) = (1, a_1+1, \ldots, a_k+1; l), \quad E^m(a) = E(E^{m-1}(a)), \quad m \geq 2.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[r, "j_a"] \arrow[d, "s'_a"] & S(E(a)) \arrow[r, "j_{E(a)}"] \arrow[d, "s'_{E(a)}"] & S(E^2(a)) \arrow[r, "j_{E^2(a)}"] \arrow[d, "s'_{E^2(a)}"] & \cdots \\
G_{k,\infty} \arrow[r, "j_k"] & G_{k+1,\infty} \arrow[r, "j_{k+1}"] & G_{k+2,\infty} \arrow[r, "j_{k+2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Положим

$$S_t = S(S^{t-k}(a)), \quad h_t = s'_{E^{t-k}(a)}, \quad s_t = j_{E^{t-k}(a)}, \quad t \geq k.$$

Для всякого $t \geq k$ можно рассматривать категорию кобордизма $\Pi(S_t,h_t)$. Возникает также категория кобордизма $\Pi(S,h)$. Как было отмечено выше, задание (S_k,h_k)-оснащения n-мерного подмногообразия евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+k}$ равносильно заданию некоторого a-оснащения его нормального расслоения. Введем обозначения : $\Pi(a) = \Pi(S_k,h_k)$ (категория кобордизма a-оснащенных многообразий), $\Pi^E(a) = \Pi(S,h)$ (категория кобордизма стабильно a-оснащенных многообразий), $\Pi_n(a) = \Pi_n(S_k,h_k)$ (n-мерная группа a-оснащенных бордизмов), $\Pi_n^E(a) = \Pi_n(S,h)$.

Пример 2. Рассмотрим особый случай, когда $S_k = G_{k,\infty}$, $h_k = 1_{G_{k,\infty}}$, $s_k = j_k$. Напомним, что в этом случае (S_k,h_k)-оснащение подмногообразия евклидова пространства эквивалентно счетному оснащению его нормального расслоения. Можно доказать, что данная категория кобордизма счетно-оснащенных многообразий эквивалентна категории кобордизма неорентированных многообразий.

Теперь для любой пары (n,k) определим канонические гомоморфизмы

$$Q(n,k):\Pi_n(S_k,h_k)\longmapsto\Omega_n(S_k,h_k),\quad R(n,k):\Omega_n(S_k,h_k)\longmapsto\Pi_n(S_k,h_k).$$

Пусть $(M,(\overline{g},\Phi))$ – произвольное (S_k,h_k)-оснащенное многообразие, и пусть F^{Φ} – некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ. Тогда $(F^{\Phi})_0=h_k\circ\overline{g}$, $(F^{\Phi})_1=g$. Рассмотрим расслоение $f_k:B_k\longmapsto G_{k,\infty}$ и каноническое поднятие F^{Φ}:

$$\hat{F}^{\Phi}:M\times I\longmapsto B_k,\quad (\hat{F}^{\Phi})_0=q_k\circ\overline{g}.$$

Из предложения 8 и теоремы 2.8.10 [6] следует, что класс послойных гомотопий $[(F^{\Phi})_1]_p$ не зависит от выбора гомотопии F^{Φ}. Пусть $(M_0,(\overline{g}_0,\Phi_0))$ и $(M_1,(\overline{g}_1,\Phi_1))$ (S_k,h_k)-оснащенно бордантны и $(M,(\overline{g},\Phi))$ – пленка (S_k,h_k)-оснащенного бордизма между ними. Ограничение гомотопии F^{Φ} на $M_i\times I\subset M\times I$, $i=0,1$ представляет собой гомотопию, присоединенную к Φ_i. Положим $F^{\Phi_i}=F^{\Phi}|_{M_i\times I}$. Пусть $\hat{F}^{\Phi},\hat{F}^{\Phi_0}$ и $\hat{F}^{\Phi_1}$ – канонические поднятия, соответственно, гомотопий F^{Φ},F^{Φ_0} и F^{Φ_1} такие, что

$$(\hat{F}^{\Phi})_0=q_k\circ\overline{g},\quad (\hat{F}^{\Phi_0})_0=q_k\circ\overline{g}_0,\quad (\hat{F}^{\Phi_1})_0=q_k\circ\overline{g}_1.$$

Тогда

$$(\hat{F}^{\Phi})_1\Big|_{M_i\times 1}=(\hat{F}^{\Phi_i})_1,\quad i=0,1.$$

Следовательно, (S_k,h_k)-многообразие $(M,[(\hat{F}^{\Phi})_1]_p)$ является пленкой (S_k,h_k)-бордизма между $(M_0,[(\hat{F}^{\Phi_0})_1]_p)$ и $(M_1,[(\hat{F}^{\Phi_1})_1]_p)$. Ввиду этого можем определить гомоморфизм $Q(n,k)$ формулой

$$Q(n,k)[(M,(\overline{g},\Phi))]_k=\Big[(M,[(\hat{F}^{\Phi})_1]_p)\Big]_k.$$

Прежде чем определить гомоморфизм $R(n,k)$ докажем вспомогательное утверждение. Пусть $M\subset\mathbb{R}^{n+k}$ – некоторое замкнутое n-мерное подмногообразие. Рассмотрим его гауссово отображение $g:M\longmapsto G_{k,\infty}$, и пусть отображение $\hat{g}:M\longmapsto B_k$ такое, что $f_k\circ\hat{g}=g$.

Предложение 19. *Пусть $F^0, F^1 : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – эквивалентные гомотопии такие, что $F_0^0 = F_0^1 = h_k \circ r_k \circ \hat{g}$, $F_1^0 = F_1^1 = g$, а Φ_{F^0} и Φ_{F^1} – некоторые изоморфизмы, присоединенные к F^0 и F^1, соответственно. Тогда*

$$\left[(M,(r_k \circ \hat{g}, \Phi_{F^0}))\right]_k = \left[(M,(r_k \circ \hat{g}, \Phi_{F^1}))\right]_k.$$

Пусть $(M, [\hat{g}]_p)$ – произвольное (S_k, h_k)-многообразие. В силу предложения 14 существует каноническая гомотопия

$$H[\hat{g}] : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}, \quad H[\hat{g}]_0 = h_k \circ r_k \circ \hat{g}. \quad H[\hat{g}]_1 = g.$$

Рассмотрим некоторый изоморфизм $\Phi : (h_k \circ r_k \circ \hat{g})^* \gamma^k \longmapsto g^* \gamma^k$, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$ и (S_k, h_k)-оснащенное многообразие $(M, (r_k \circ \hat{g}, \Phi))$. Определим гомоморфизм $R(n,k)$ формулой

$$R(n,k)[(M,[\hat{g}]_p)]_k = [(M,(r_k \circ \hat{g}, \Phi))]_k.$$

Корректность определения доказывается на основании предложений 19 и 3. Доказательство следующей теоремы (об (S,h)-оснащенном кобордизме) основано на предложениях 11 и 17.

Теорема 1. *Для любой пары $n, k \geq 0$ имеются канонические изоморфизмы*

$$\Pi_n(S_k, h_k) = \Omega_n(S_k, h_k), \quad \Pi_n(S,h) = \Omega_n(S,h).$$

Доказательство. Для установления первого утверждения докажем, что гомоморфизмы $R(n,k)$ и $Q(n,k)$ взаимно обратны. Пусть $[(M,(\overline{g},\Phi))]_k$ – произвольный элемент из $\Pi_n(S_k, h_k)$, и пусть $F^\Phi : M \times I \longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{F}^\Phi$, $(\hat{F}^\Phi)_0 = q_k \circ \overline{g}$ гомотопии F^Φ. Тогда

$$R(n,k) \circ Q(n,k)[(M,(\overline{g},\Phi))]_k = \left[(M,(r_k \circ (\hat{F}^\Phi)_1, \Phi^1))\right]_k,$$

где Φ^1 – некоторый изоморфизм, присоединенный к канонической гомотопии $H[(\hat{F}^\Phi)_1]$. Из предложений 15 и 19 следует, что

$$\left[(M,(r_k \circ (\hat{F}^\Phi)_1, \Phi))\right]_k = [(M,(\overline{g},\Phi))]_k.$$

Следовательно, $R(n,k)\circ Q(n,k) = 1_{\Pi_n(S_k,h_k)}$. Теперь покажем, что $Q(n,k)\circ$ $\circ R(n,k) = 1_{\Omega_n(S_k,h_k)}$. Пусть $[(M,[\hat{g}]_p)]_k$ – произвольный элемент из $\Omega_n(S_k,h_k)$. Полагая $g = r_k\circ\hat{g}$, мы можем написать

$$R(n,k)[(M,[\hat{g}]_p)]_k = [(M,(\overline{g},\Phi))]_k\,,$$

где Φ – некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$. Рассмотрим каноническое поднятие $\hat{H}[\hat{g}]$ гомотопии $H[\hat{g}]$ такое, что $\hat{H}[\hat{g}]_0 = \hat{g}$. Пусть F^Φ : $M\times I\longmapsto G_{k,\infty}$ – некоторая гомотопия, присоединенная к изоморфизму Φ, и пусть $\hat{F}^\Phi : M\times I\longmapsto B_k$ – каноническое поднятие гомотопии F^Φ такое, что $(\hat{F}^\Phi)_0 = q_k\circ\overline{g}$. Тогда

$$Q(n,k)[(M,(\overline{g},\Phi))]_k = \Big[(M,[(\hat{F}^\Phi)_1]_p)\Big]_k$$

Покажем, что $[(\hat{F}^\Phi)_1]_p = [\hat{g}]_p$. Согласно предложению 16 существует послойная гомотопия

$$T : M\times I\longmapsto B_k,\quad T_0 = q_k\circ\overline{g},\quad T_1 = (\hat{H}[\hat{g}])_1,\quad f_k\circ T_t = h_k\circ\overline{g},\quad t\in I.$$

В силу предложения 10 гомотопии $H[\hat{g}]$ и F^Φ эквивалентны, т.е. существует такая гомотопия $G : M\times I\times I\longmapsto G_{k,\infty}$, что

$$G\big|_{M\times 0\times I} = H[\hat{g}],\quad G\big|_{M\times 1\times I} = F^\Phi,$$

$$G(x,t,0) = q_k\circ\overline{g}(x),\quad G(x,t,1) = g(x),\quad x\in M,\ t\in I.$$

Так как

$$f_k\circ\hat{H}[\hat{g}] = H[\hat{g}]),\quad f_k\circ\hat{F}^\Phi = F^\Phi,\quad f_k\circ T_t = h_k\circ\overline{g},\quad t\in I,$$

то согласно теореме 2.8.10 из [6] существует такое поднятие $\hat{G} : M\times I\times I\longmapsto B_k$ гомотопии G, что

$$\hat{G}\big|_{M\times 0\times I} = \hat{H}[\hat{g}],\quad \hat{G}\big|_{M\times 1\times I} = \hat{F}^\Phi,\quad \hat{G}\big|_{M\times I\times 0} = T.$$

Тогда отображение $\hat{G}\big|_{M\times I\times 1}$ определяет послойную гомотопию между отображениями $\hat{g}$ и $(\hat{F}^\Phi)_1$, т.е. $[(M,[(\hat{F}^\Phi)_1]_p)]_k = [(M,[\hat{g}]_p)]_k$ и, следовательно

$$Q(n,k)\circ R(n,k) = 1_{\Omega_n(S_k,h_k)}.$$

Для доказательства второй части теоремы 1 покажем, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n(S_k,h_k) & \xrightarrow{R(n,k)} & \Pi_n(S_k,h_k) \\ \downarrow \Sigma_* & & \downarrow E_* \\ \Omega_n(S_{k+1},h_{k+1}) & \xrightarrow{R(n,k+1)} & \Pi_n(S_{k+1},h_{k+1}) \end{array}$$

коммутативны. Пусть $[(M,[\hat{g}]_p)]_k \in \Omega_n(S_k,h_k)$. Тогда

$$E_* \circ R(n,k)[(M,[\hat{g}]_p)]_k = E_* \left[(M,(r_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[\hat{g}]}))\right]_k =$$

$$= \left[(M,(s_k \circ r_k \circ \hat{g}, E(\Phi_{H[\hat{g}]})))\right]_{k+1},$$

где $\Phi_{H[\hat{g}]}$ – некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[\hat{g}]$. С другой стороны

$$R(n,k+1) \circ \Sigma_*[(M,[\hat{g}]_p)]_k = R(n,k+1)[(M,[J_k \circ \hat{g}]_p)]_{k+1} =$$

$$= \left[(M,(r_{k+1} \circ J_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}))\right]_{k+1},$$

где $\Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}$ – некоторый изоморфизм, присоединенный к гомотопии $H[J_k \circ \hat{g}]$. Согласно предложению 18 имеем $H[J_k \circ \hat{g}] = j_k \circ H[\hat{g}]$. Из предложения 12 получаем, что изоморфизм $E(\Phi_{H[\hat{g}]})$ присоединен к гомотопии $j_k \circ H[\hat{g}]$. Так как $s_k \circ r_k = r_{k+1} \circ J_k$, то из предложения 19 следует, что

$$\left[(M,(r_k \circ J_k \circ \hat{g}, \Phi_{H[J_k \circ \hat{g}]}))\right]_{k+1} = \left[(M,(s_k \circ r_k \circ \hat{g}, E(\Phi_{H[\hat{g}]})))\right]_{k+1}.$$

Следовательно, $E_* \circ R(n,k) = R(n,k+1) \circ E_*$. Отсюда и из первой части теоремы 1 получаем, что $\Sigma_* \circ Q(n,k) = Q(n,k+1) \circ \Sigma_*$. Поэтому возникают взаимно обратные изоморфизмы

$$Q(n) : \Pi_n(S,h) \longmapsto \Omega_n(S,h), \quad R(n) : \Omega_n(S,h) \longmapsto \Pi_n(S,h),$$

где

$$Q(n) = \lim_{k\to\infty} Q(n,k), \quad R(n) = \lim_{k\to\infty} R(n,k).$$

Следовательно группы $\Omega_n(S,h)$ и $\Pi_n(S,h)$ канонически изоморфны. Теорема 1 доказана.

Согласно обобщенной теореме Понтрягина-Тома (см. [4]) существуют канонические изоморфизмы

$$\theta(n,k) : \Omega_n(S_k, h_k) \longmapsto \pi_{n+k}(T(f_k^*\gamma^k); y_k),$$

$$\theta(n) : \Omega_n(S, h) \longmapsto \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T(f_k^*\gamma^k); y_k),$$

где $T(f_k^*\gamma^k)$ – пространство Тома расслоения $f_k^*\gamma^k$,

$$y_k = T(f_k^*\gamma^k) \setminus tl(f_k^*\gamma^k), \quad \theta(n) = \lim_{k\to\infty} \theta(n,k).$$

Положим $x_k = T(h_k^*\gamma^k) \setminus tl(h_k^*\gamma^k)$.

Теорема 2. *Для любых $n, k \geq 0$ существуют канонические изоморфизмы*

$$\theta'(n,k) : \Pi_n(S_k, h_k) \longmapsto \pi_{n+k}(T(h_k^*\gamma^k); x_k),$$

$$\theta'(n) : \Pi_n(S, h) \longmapsto \lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T(h_k^*\gamma^k); x_k).$$

Доказательство. Гомотопическая эквивалентность $r_k : B_k \longmapsto S_k$ канонически продолжается до гомотопической эквивалентности

$$\bar{r}_k : T(f_k^*\gamma^k) \longmapsto T(h_k^*\gamma^k), \quad \bar{r}_k(g_k) = x_k.$$

Рассмотрим индуцированные отображениями r_k изоморфизмы

$$r(n,k) : \pi_{n+k}(T(f_k^*\gamma^k); y_k) \longmapsto \pi_{n+k}(T(h_k^*\gamma^k); x_k).$$

Имеются коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Sigma T(f_k^*\gamma^k) & \xrightarrow{\Sigma\bar{r}_k} & \Sigma T(h_k^*\gamma^k) \\ \downarrow TJ_k & & \downarrow Ts_k \\ T(f_{k+1}^*\gamma^{k+1}) & \xrightarrow{\bar{r}_{k+1}} & T(h_{k+1}^*\gamma^{k+1}) \end{array},$$

в которых отображения TJ_k, Ts_k определяются отображениями J_k, s_k (см. [4]). Возникают коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+k}(T(f_k^*\gamma^k); y_k) & \xrightarrow{r(n,k)} & \pi_{n+k}(T(h_k^*\gamma^k); x_k) \\ \downarrow (TJ_k)_* \circ \Sigma' & & \downarrow (Ts_k)_* \circ \Sigma' \\ \pi_{n+k+1}(T(f_{k+1}^*\gamma^{k+1}); y_{k+1}) & \xrightarrow{r(n,k+1)} & \pi_{n+k+1}(T(h_{k+1}^*\gamma^{k+1}); x_{k+1}) \end{array},$$

в которых Σ' обозначают гомоморфизмы надстройки. Положим $r_n = \lim_{k\to\infty} r(n,k)$ и определим требуемые изоморфизмы формулами

$$\theta'(n,k) = r(n,k) \circ \theta(n,k) \circ Q(n,k), \quad \theta'(n) = r(n) \circ \theta(n) \circ Q(n).$$

Отметим, что $\theta'(n) = \lim_{k\to\infty} \theta'(n,k)$. Теорема 2 доказана.

Как следствие из теоремы 2 получаем следующее.

Теорема 3. *Для любого символа Шуберта $a = (a_1, \ldots, a_k : l)$ существуют канонические изоморфизмы*

$$\Pi_n(a) = \pi_{n+k}(T(\gamma(a)) : \infty) \quad и \quad \Pi_n^E(a) = \pi_{n+k}^S(T(\gamma(a)) : \infty).$$

ABSTRACT. The paper considers morphisms of vector fiber spaces. It concentrates on the concept of a (S, h)-framed cobordism. A theorem on (S, h)-framed cobordisms in conjunction with generalized Pontriagin–Thom's theorem imply, in particulary, an analog of Pontriagin's theorem for a-framed manifolds.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Огникян, "Об одном обобщении оснащенного бордизма". ДАН АрмССР. т. 79, № 5, стр. 195 – 198, 1984.
2. Л. С. Понтрягин, Гладкие многообразия и их приложения в теории гомотопий. М., Наука, 1976.
3. А. А. Огникян, "О классифицирующих пространствах a-оснащенных расслоений". Уч. записки ЕГУ, т. 186, № 1, 1997.
4. Р. Е. Стронг, Заметки по теории кобордизмов. М., Мир, 1973.
5. Д. Хьюзмоллер, Расслоенные пространства. М., Мир, 1971.
6. Э. Спеньер, Алгебраическая топология, М., Мир, 1971.
7. R. Lashof, "Poincare duality and cobordism", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 109. pp. 257 – 277, 1963.

11 апреля 1997

Ереванский государственный университет