

О РЕШЕНИЯХ КЛАССА ЖЕВРЕ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 33, № 1, 1998

Для n -мерного многогранника N мы определяем мультианизотропное функциональное пространство Жевре $\Gamma^N(\Omega)$ и доказываем, что решения гипозеллиптических уравнений с переменными коэффициентами из $\Gamma^{M^{(l)}}(\Omega)$ принадлежат $\Gamma^{M^{(l)}}(\Omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Л. Хёрмандером введено понятие гипозеллиптичности и доказано, что решения гипозеллиптического уравнения $P(D)u = 0$ с постоянными коэффициентами принадлежат классам Жевре Γ^l , характеризуемым показателем гипозеллиптичности l оператора $P(D)$. В работе [2] Л. Катабрига получил условия, при которых отображение $P(D) : \Gamma^l \rightarrow \Gamma^l$ является изоморфизмом.

В работах [3] – [5] доказано, что решения уравнений $P(x, D)u = f(x)$ с достаточно гладкими коэффициентами принадлежат классам Γ^l при любых $f \in \Gamma^l$. В этих и других работах рассмотрены лишь изотропные классы Жевре.

В работах [6] – [7] для одного класса гипозеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами доказаны оценки роста производных, улучшающие результаты выше перечисленных работ. В работе [8] для n -мерного многогранника M введено понятие мультианизотропного класса Жевре Γ^M и установлено, что решения определенного класса гипозеллиптических уравнений $P(x, D)u = 0$ с аналитическими коэффициентами принадлежат классам Γ^M , где M является многогранником веса гипозеллиптичности оператора $P(x, D)$.

В настоящей работе для широкого класса гипозеллиптических уравнений

$P(x, D)u = 0$ с переменными коэффициентами (вообще говоря не аналитическими) доказывалась принадлежность слабых решений к определенному мультианизотропному классу Жевре. В §1 вводятся необходимые обозначения и определения. Доказываются некоторые свойства многогранников Ньютона изучаемых операторов. В §2 вводятся понятие дополняющего многогранника и связанные с этим мультианизотропные классы Жевре. В §3 в терминах дополняющих многогранников уточняются те классы Жевре, которым принадлежат слабые решения уравнения $P(x, D)u = 0$.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ

СВОЙСТВА МНОГОГРАННИКОВ

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное вещественное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}_0^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdots x_n \neq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Пусть N_0^n — множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми компонентами. Для $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in N_0^n$ обозначим

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad |x|^\alpha = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

$$\|\xi\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2}, \quad (x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

где

$$D_j = -i \frac{d}{dx_j} \quad (i^2 = -1), \quad \text{или} \quad D_j = \frac{d}{dx_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Мы будем рассматривать наборы

$$B = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^k, \quad (1.1)$$

где

$$\lambda^j \in \mathbb{R}_+^n, \quad \min_{1 \leq l \leq n} \lambda_l^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Определение 1.1. Характеристическим многогранником набора B называется множество

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(B) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d_j, j = 1, \dots, k\}.$$

Полсжим

$$\mathcal{N}^t = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \frac{\nu}{t} \in \mathcal{N}\}, \quad t > 0,$$

$$\partial \mathcal{N} = \{\nu \in \mathcal{N} : (\nu, \lambda^j) = d_j, j = 1, \dots, k\},$$

$\Sigma(\mathcal{N})$ – множество вершин многогранника $\mathcal{N}$.

Пусть $A, B \in \mathbb{R}_+^n$ – ограниченные множества. Положим

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad A \ominus B = \{x : x + y \in A, \forall y \in B\}.$$

Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник этого набора. Положим

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathcal{N}) = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq 1, j = 1, \dots, k\},$$

$$\mathcal{M}'_j = \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}^j, \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}'_1, \quad \mathcal{M}_j = \mathcal{M}'_j \setminus \mathcal{M}'_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Легко доказать следующее

Предложение 1.1. Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник этого набора. Тогда

а) если $j \geq [d_0] + 1$ ($d_0 = \max_{1 \leq j \leq k} d_j$), то $\mathcal{M}'_j = \emptyset$;

б) $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{[d_0]} \mathcal{M}_j$;

в) для любого целого $j \geq 0$

$$A_j = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^i) \leq d_i - j, i = 1, \dots, k\} \subset \mathcal{M}'_j.$$

Рассмотрим множество $F = \{\mathcal{N} : \mathcal{N} \text{ – характеристический многогранник некоторого набора } B \text{ вида (1.1) и удовлетворяет условию : существует натуральное число } j_0 \text{ такое, что для любых } j \geq j_0 \text{ и } \alpha \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^j \text{ найдется мультииндекс } \beta \in \mathcal{N} \text{ такой, что } \beta \leq \alpha \text{ и } \alpha - \beta \in \mathcal{M}^j\}$. При $n = 2$ справедливы следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора $B = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^k$, где

$$\lambda^j \in \mathbb{R}_+^2, \quad \lambda^1 > \dots > \lambda^k \geq (1, 1), \quad \min_{1 \leq i \leq 2} \lambda_i^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^2$, то $\mathcal{N} \in F$.

Лемма 1.2. Пусть

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^2, \quad \lambda > (1, 1) < \mu, \quad \mu_1 = \lambda_2 = 1, \quad d, \rho > 0,$$

$$\mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^2 : (\nu, \lambda) \leq d, (\nu, \mu) \leq \rho\}.$$

Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^2$, то $\mathcal{N} \in F$.

Пусть k и n — натуральные числа

$$e_k = \{1, \dots, k\}, \quad \lambda^j \in \mathbb{R}_+^n, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^j = 1, \quad d > 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Обозначим

$$E_e = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) = d; j \in e, (\nu, \lambda^j) \leq d, j = 1, \dots, k\}, \quad \emptyset \neq e \subset e_k;$$

$$R_+^{n,m} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : \nu_i = 0; i \in m\};$$

$$D_m(\varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in m} \nu_i \leq \varepsilon \right\}, \quad \emptyset \neq m \subset e_n, \quad \varepsilon > 0.$$

Предложение 1.2. Если для некоторого множества $e \subset e_k$ $E_e = \emptyset$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что система

$$\begin{cases} (\nu + \eta^i, \lambda^i) = d & \text{при } i \in e, \\ (\nu, \lambda^i) \leq d & \text{при } i \notin e \end{cases}$$

не имеет решения в $\mathbb{R}_+^n$ при любых $\eta^i \in \mathbb{R}^n$, $\|\eta^i\| \leq \varepsilon$, $i \in e$.

Доказательство. Положим

$$G_e = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) = d, j \in e\}, \quad \mathcal{N} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq d, j = 1, \dots, k\}.$$

Множество G_e замкнуто, а $\mathcal{N}$ замкнуто и ограничено (что следует из условия $\mathcal{N} \cap G_e = E_e = \emptyset$). Следовательно, существует окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^n$ такая, что

$$(G_e \oplus U) \cap (\mathcal{N} \oplus U) = \emptyset.$$

Предложение 1.2 доказано.

Через ε_0 обозначим то наибольшее число, для которого выполняется предложение 1.2 при всех $\emptyset \neq e \subset e_k$, для которых $E_e = \emptyset$.

Предложение 1.3. Если $E_e \cap \mathbb{R}_+^{n,m} = \emptyset$ при некоторых $\emptyset \neq e \subset e_k$ и $\emptyset \neq m \subset e_n$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $E_e \cap D_m(\varepsilon) = \emptyset$.

Доказательство следует из того, что множества E_e и $\mathbb{R}_+^{n,m}$ замкнуты, E_e ограничено и $D_m(\varepsilon) = \mathbb{R}_+^{n,m} \oplus U_\varepsilon$, где

$$U_\varepsilon = \left\{ \nu \in \mathbb{R}_+^n : \nu_j = 0, j \notin m, \sum_{j=1}^n \nu_j \leq \varepsilon \right\}.$$

Обозначим через ε_1 то наибольшее число, для которого выполняется утверждение 1.3 при любом $m \subset e_n$ таком, что $E_e \cap \mathbb{R}_+^{n,m} = \emptyset$.

Теорема 1.1. Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Если $\Sigma(\mathcal{N}) \subset N_0^n$ и $\mathcal{M}(\mathcal{N}) \sim \mathcal{N}$ (т.е. $\mathcal{M}_N^d = \mathcal{N}$ для некоторого $d > 0$), то $\mathcal{N} \in F$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' = \min(\varepsilon_0/4, \varepsilon_1/4)$ ($\varepsilon_0, \varepsilon_1$ – числа, определенные выше), $j_0 \geq 4d^2/\varepsilon'$ – натуральное число и α – любой фиксированный мультииндекс такой, что

$$\alpha \in \mathcal{M}_N^{d+s} \setminus \mathcal{M}_N^{d+s-1} = (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_N^s) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}_N^{s-1}), \quad s > j_0.$$

Возможны следующие случаи :

а) $\alpha_i \geq l_i = \min_{1 \leq j \leq k} \frac{d}{\lambda_j^i}, \quad i = 1, \dots, n;$

б) существует множество $m = \{1, \dots, q\} \subset e_n$ такое, что $\alpha_i < l_i, i \notin m$.

В случае а) для некоторого $\delta \in [0, 1]$ имеем

$$\max_{1 \leq j \leq k} (\alpha, \lambda^j) = d + s - \delta = td, \quad t = \frac{d + s - \delta}{d}.$$

Пусть ради определенности грани $\mathcal{N}_i^{n-1}$ с внешними (относительно $\mathcal{N}$) нормальными $\lambda^i, i = 1, \dots, p, p \leq k$ имеют пересечение с шаром $U_{e'}(\alpha/t)$ радиуса ε' с центром в точке α/t . В силу предложения 1.2 имеем $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{N}_i^{n-1} \neq \emptyset$. Пусть β – вершина многогранника $\mathcal{N}$ такая, что $\beta \in \bigcap_{i=1}^p \mathcal{N}_i^{n-1}$. Так как $\alpha \geq \beta$, то $\alpha - \beta \in \mathcal{N}_0^n$. Поскольку $\alpha/t \in \partial \mathcal{N}$, то для некоторого $t' \in [1, t/(t-1)]$ имеем $t' \frac{\alpha - \beta}{t} \in \partial \mathcal{N}$. Используя это, получим

$$\left| t' \frac{\alpha - \beta}{t} - \frac{\alpha}{t} \right| \leq \frac{|\alpha|}{t} (t' - 1) + \frac{t'}{t} |\beta| \leq |\alpha| \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t-1} |\beta| \leq \frac{2d}{t-1} = \frac{2d^2}{s-\delta} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

т.е.

$$t' \frac{\alpha - \beta}{t} \in U_{\epsilon'} \left(\frac{\alpha}{t} \right) \cap \partial N.$$

Так как шар $U_{\epsilon'}(\alpha/t)$ пересекается только с гранями N_i^{n-1} , $i = 1, \dots, p$, то существует индекс j , $1 \leq j \leq p$ такой, что $t' \frac{\alpha - \beta}{t}$ лежит на грани N_j^{n-1} и, следовательно, для любого индекса $i = 1, \dots, k$

$$\left(t' \frac{\alpha - \beta}{t}, \lambda^i \right) \leq \left(t' \frac{\alpha - \beta}{t}, \lambda^j \right).$$

Так как $(\beta, \lambda^i) = d$, то

$$(\alpha - \beta, \lambda^i) \leq (\alpha - \beta, \lambda^j) = (\alpha, \lambda^j) - (\beta, \lambda^j) \leq d + s - d = s, \quad i = 1, \dots, k,$$

следовательно, $\alpha - \beta \in M_{\mathcal{N}}^s$.

Рассмотрим случай б). Ради определенности предположим, что только грани N_i^{n-1} , $i = 1, \dots, p$, $p \leq k$ пересекаются с шаром $U_{\epsilon'}(\alpha/t)$. Тогда, в силу предложения 1.2, $\mathcal{N} \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \neq \emptyset$. Так как $U_{\epsilon'}(\alpha/t) \subset D_m(\epsilon')$, то в силу предложения 1.3

$$\mathcal{N} \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^{n,m} \neq \emptyset.$$

Пусть

$$\beta \in \Sigma(\mathcal{N}) \cap \bigcap_{i=1}^p N_i^{n-1} \cap \mathbb{R}_+^{n,m}.$$

Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве случая а), получим, что $\alpha - \beta \in M_{\mathcal{N}}^s$, т.е. $\mathcal{N} \in F$.

§2. ДОПОЛНЯЮЩИЕ МНОГОГРАННИКИ И

МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫЕ КЛАССЫ ЖЕВРЕ

Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Положим

$$h_{\mathcal{N}}(\xi) = 1 + \sum_{\beta \in \Sigma(\mathcal{N})} |\xi|^\beta, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Пусть B^* – другой набор вида (1.1), а $\mathcal{N}^*$ – соответствующий характеристический многогранник.

Определение 2.1. Говорят, что многогранник $\mathcal{N}^*$ дополняет многогранник $\mathcal{N}$, если при некоторой постоянной $C > 0$

$$h_{\mathcal{N}}(\xi - \eta) \leq C(h_{\mathcal{N}}(\xi) + h_{\mathcal{N}^*}(\eta)), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

и если для любого многогранника $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}^* \not\subset \mathcal{M}$ отношение $\frac{h_{\mathcal{N}}(\xi - \eta)}{h_{\mathcal{N}}(\xi) + h_{\mathcal{N}^*}(\eta)}$ не ограничено на $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2.1. (см. [8]) Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Тогда многогранник $\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^0) \leq 1\}$, где

$$\lambda^0 = \left(\min_{1 \leq j \leq r} \left(\frac{\lambda_1^j}{d_j} \right), \dots, \min_{1 \leq j \leq r} \left(\frac{\lambda_n^j}{d_j} \right) \right),$$

дополняет $\mathcal{N}$.

Предложение 2.2. Пусть B – набор вида (1.1) и $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B . Если $\mathcal{N}^*$ дополняет $\mathcal{N}$, то для любого $t > 0$ многогранник $(\mathcal{N}^t)^*$ дополняет многогранник $\mathcal{N}^t$.

Доказательство. Так как для любого $t > 0$ имеем с некоторой постоянной $C = C(t) > 0$

$$C^{-1}h_{\mathcal{N}^t}(\xi) \leq h_{\mathcal{N}}^t(\xi) \leq Ch_{\mathcal{N}^t}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то доказательство следует из определения дополняющего многогранника.

Пусть B – набор вида (1.1), $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B и Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Через $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ обозначим множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для любого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K, f) > 0$ такая, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^j, \quad \alpha \in \mathcal{N}^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

(описание свойств класса $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ см. в [8]).

Предложение 2.3. Для того, чтобы $f \in \Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $C = C(K, f) > 0$ такая, что для любого компакта $K \subset \Omega$

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C^{j+1} j^{j/t}, \quad \alpha \in \mathcal{N}^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Доказательство следует из определения множества $\Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega)$.

Предложение 2.4. Пусть B – набор вида (1.1), $\mathcal{N}(B)$ – характеристический многогранник набора B и Ω – область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого $t > 0$

$$\Gamma^{(\mathcal{N}^t)^*}(\Omega) \times \Gamma^{\mathcal{N}^t}(\Omega) \subset \Gamma^{\mathcal{N}'}(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $t > 0$ – некоторое число и $g(x) \in \Gamma^{(\mathcal{N}^t)' }(\Omega)$, $f(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}^t}(\Omega)$. Достаточно показать, что $g(x) \cdot f(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}^t}(\Omega)$. Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathcal{N}^j$, $j = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_K |D^\alpha(gf)| &= \sup_K \left| \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta g \cdot D^{\alpha-\beta} f \right| \leq \sup_K \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta |D^\beta g| \cdot |D^{\alpha-\beta} f| \leq \\ &\leq \sup_K \sum_{l=0}^j \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta |D^\beta g| \cdot |D^{\alpha-\beta} f|. \end{aligned}$$

Так как $\alpha - \beta \in \mathcal{N}^{j-l}$ для $l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1$, то в силу предложения 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \sup_K |D^\alpha(gf)| &\leq \sum_{l=0}^j \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta C_1^{l+2} (l+1)^{(l+1)/t} C_2^{j-l+1} (j-l)^{(j-l)/t} \leq \\ &\leq C_3^{j+1} \sum_{l=0}^j (l+1)^{(l+1)/t} (j-l)^{(j-l)/t} \sum_{l \leq (\beta, \lambda^0) < l+1} C_\alpha^\beta \leq C_3^{j+1} C_4^{j+1} \times \\ &\times \left(\sum_{l=0}^j (l+1)^{(l+1)/t} (j-l)^{j-l} \right)^{1/t} \leq C_5^{j+1} (j+1)^{1/t} j^{j/t} \leq C_6^{j+1} j^{j/t}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Предложение 2.4 доказано.

§3. ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть (P) – конечный набор мультииндексов, и пусть $\gamma_\alpha(x)$ – бесконечно дифференцируемые функции для всех $\alpha \in (P)$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$P(x, D) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha(x) D^\alpha,$$

а для $f \in C^\infty(\Omega)$

$$N(P, f) = \{u \in D' : P(x, D)u = f\}.$$

Определение 3.1. (см. [1], определение 13.4.3) Оператор $P(x, D)$ называется *гипоеллиптическим* в Ω , если для любого $f \in C^\infty(\Omega)$ имеем $N(P, f) \subset C^\infty(\Omega)$.

Определение 3.2. (см. [9]) Оператор $P(x, D)$ называется *равномерно регулярным* в Ω , если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$1 + |P(x, \xi)| \geq C \sum_{\alpha \in (P)} |\xi|^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega.$$

Определение 3.3. Характеристический многогранник оператора $P(x, D)$ называется *характеристическим многогранником набора* (P) .

Равномерно регулярный оператор $P(x, D)$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами гипозллиптичен тогда и только тогда, когда $P(x, D)$ вполне правилен (см. [9]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Лемма 3.1. Пусть $P(x, D)$ – равномерно регулярный оператор в Ω . Тогда существует окрестность $\omega \subset \Omega$ точки $x \in \Omega$ и постоянная $C > 0$ такие, что

$$\|D^\alpha \varphi\|_{L_2(\omega)} \leq C \|P(x, D)\|_{L_2(\omega)}, \quad \alpha \in \mathcal{N}(P) \cap (N_0^n), \quad \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Доказательство см. в работе [1], теорему 13.2.1.

Пусть $v \in L_2^{loc}(\Omega)$. Положим

$$K_\varepsilon(v) = \left[\int_{\Omega_\varepsilon} |v|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Пусть $P(x, D)$ – равномерно регулярный оператор в Ω , характеристический многогранник которого порождается набором

$$B_1 = \{\lambda^j, d_j\}_{j=1}^M, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^j = 1, \quad d_j > 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

Положим

$$\mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{R}_+^n : (\nu, \lambda^j) \leq 1, \quad j = 1, \dots, M\}, \quad d_0 = \max_{1 \leq j \leq M} d_j.$$

Лемма 3.2. Пусть $P(x, D)$ как в лемме 3.1. Тогда для любых $t \in (0, 1]$ и $v \in C^\infty(\omega)$ существуют постоянные $\varepsilon, \varepsilon_1, C > 0$ такие, что

$$\varepsilon^{(d_0-j)/t} K_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D^\alpha v) \leq C \left[\varepsilon^{d_0/t} K_{\varepsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in M_j} \varepsilon^{(d_0-j)/t} K_{\varepsilon_1}(D^\beta v) \right],$$

$$\alpha \in M_j, \quad 0 \leq j \leq [d_0].$$

(3.1)

Доказательство. Неравенство (3.1) для $j \geq 1$ очевидно. Пусть $j = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega_{\varepsilon_1})$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in \omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ (существование такой функции $\varphi(x)$ следует из леммы 3.1). В силу леммы 3.1 для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеем

$$K_{\varepsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_1 K_{\varepsilon_1}(P(x, D)(v\varphi)) \leq$$

$$\leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{\nu < \beta} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-|\beta - \alpha|} \right]$$

Так как $\mathcal{N} = \bigcup_{j=0}^{[d_0]} \mathcal{M}_j$ (см. предложение 1.1), то имеем

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=0}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_j} \sum_{\nu < \beta} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-|\beta - \alpha|} \right].$$

Отсюда следует, что

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_2 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{j=0}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_j} \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\substack{\nu \in \mathcal{M}_i \\ \nu < \beta}} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-i/t} \right].$$

Если $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ и $\beta < \alpha$, то $\beta \in \mathcal{M}'_i$. Следовательно, для $0 < \epsilon < 1$ и $0 < t \leq 1$ при некоторых постоянных $C_3 > 0$ получаем

$$K_{\epsilon_1}(D^\alpha(v\varphi)) \leq C_3 \left[K_{\epsilon_1}(P(x, D)v) + \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\nu \in \mathcal{M}_i} K_{\epsilon_1}(D^\nu v) \epsilon^{-i/t} \right].$$

Умножая это неравенство на $\epsilon^{d_0/t}$ и замечая, что $\varphi(x) = 1$ для $x \in \omega_{\epsilon + \epsilon_1}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 3.3. Пусть $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}_+^n$ — многогранник, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с диаметром не больше двух. Для любых $\epsilon, \epsilon_1, C > 0$, $t \in (0, 1]$ и $\gamma(x) \in \Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}^j$, $j = 1, 2, \dots$

$$\epsilon^{j/t} |D^\alpha \gamma(x)| \leq C^{j+1} j!^{-j/t}, \quad x \in \Omega_{\epsilon_1 + l\epsilon}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Поскольку диаметр $\Omega \leq 2$, то $\Omega_{\epsilon_1 + l\epsilon} = \emptyset$ для $l\epsilon \geq 1$ и утверждение следует из определения $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$.

Теорема 3.1. Пусть $P(x, D)$ — равномерно регулярный оператор в Ω , характеристический многогранник $\mathcal{N}$ которого из F и $\gamma_\alpha(x) \in \Gamma^{(\mathcal{M}')^*}(\Omega)$ для всех $\alpha \in (P)$. Тогда для любого $t \in (0, 1]$ имеем $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $x_0 \in \Omega$ существует окрестность $\omega(x_0) \subset \Omega$, удовлетворяющая условию $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$. Для такой окрестности мы можем взять любую область с диаметром меньшим двух,

для которой выполняется неравенство (3.1). Так как $\gamma_\beta(x) \in \Gamma^{(\mathcal{M}^j)^*}(\Omega)$, то существует постоянная $A > 0$ такая, что

$$\sup_{\omega} |D^\alpha \gamma_\beta(x)| \leq A^{j+1} j^{j/t}, \quad \alpha \in (\mathcal{M}^j)^*, \quad \beta \in (P), \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Покажем что для любого $u \in N(P, 0)$ существует постоянная

$$B = B(u) \geq (1 + C)q[1 + 2(4(1 + j_0))^{1/t}(A + t)^3]$$

(q – количество элементов множества (P) , C – постоянная из (3.1), j_0 – число из определения множества F) такая, что для всех $\alpha \in (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1})$

$$\varepsilon^{(d_0+j_0-1+j)/t} K_{j\varepsilon}(D^\alpha u) \leq B^{d+j_0+1}, \quad 1 \leq j, \quad \varepsilon \in (0, 1). \quad (3.3)$$

Так как $N(P, 0) \subset C^\infty(\Omega)$, то за счет взятия постоянной достаточно большой можно добиться выполнения неравенства (3.3) при $j = 1$.

Пусть неравенство (3.3) выполняется при $j \leq l$, $l \geq 1$. Покажем его выполнение при $j = l + 1$. Та как $\mathcal{N} \in F$ и $\alpha \in (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}) \setminus (\mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1})$, то существует мультииндекс $\alpha' \leq \alpha$, $\alpha' \in \mathcal{M}^{j_0+l}$, для которого $\alpha - \alpha' \in \mathcal{N}$ и $\alpha' + \gamma \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l}$ для любого $\gamma \in \Sigma(\mathcal{N})$. В силу неравенства (3.1) при $\varepsilon_1 = l\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(d_0+j_0+j)/t} K_{(l+1)\varepsilon}(D^\alpha u) &= \varepsilon^{(d_0+j+1)/t} K_{(l+1)\varepsilon}(D^{\alpha'} D^{\alpha-\alpha'} u) \leq \\ &\leq C \varepsilon^{(j_0+l)/t} \left[\varepsilon^{d_0/t} K_{l\varepsilon}(P(x, D) D^{\alpha'} u) + \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'} u) \varepsilon^{(d_0-i)/t} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко проверить для любого мультииндекса $\beta \in \mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq [d_0]$, что $\beta + \alpha' \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l-1}$. Тогда по предположению индукции

$$C \varepsilon^{(j_0+l)/t} \sum_{i=1}^{[d_0]} \sum_{\beta \in \mathcal{M}_i} K_{l\varepsilon}(D^{\beta+\alpha'} u) \varepsilon^{(d_0-i)/t} \leq Cq B^{d_0+j_0+l}. \quad (3.5)$$

Теперь оценим выражение

$$E = \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon}(P(x, D)(D^{\alpha'} u)).$$

Так как $P(x, D)u = 0$, то имеем

$$E = \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \gamma_\beta(x) D^{\beta+\alpha'} u - \sum_{\beta \in \mathcal{N}} D^{\alpha'} (\gamma_\beta(x) D^\beta u) \right) =$$

$$= \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{0 \neq \nu \leq \alpha'} C_{\beta}^{\nu} D^{\nu} \gamma_{\beta}(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} u \right).$$

Так как для любых двух мультииндексов β, ν таких, что $\beta \in \mathcal{N}$ и $0 \neq \nu \leq \alpha'$, имеем $\beta + \alpha' - \nu \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0+l-1}$, то в силу леммы 3.3

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{(d_0+l+j_0)/t} K_{l\varepsilon} \left(\sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^l \sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} D^{\nu} \gamma_{\beta}(x) D^{\beta+\alpha'-\nu} u \right) \leq \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathcal{N}} \sum_{i=1}^l \sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} E &\leq \sum_{i=1}^l q \left(\sum_{i \leq (\nu, \lambda^0) < i+1} C_{\alpha'}^{\nu} \right) [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^l q 2^{i/t} \frac{(j_0+1)^{i/t}}{(i!)^{1/t}} [(i+1)! l^{-i}]^{1/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq q \sum_{i=1}^l [4(1+j_0)]^{i/t} A^{i+2} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq q [4(1+j_0)]^{1/t} A^3 \sum_{i=1}^l \frac{B^{i-1}}{2^{i-1}} B^{d_0+j_0+l-i+1} \leq \\ &\leq 2q [4(1+j_0)]^{1/t} A^3 B^{d_0+j_0+l} \leq B^{d_0+j_0+l+1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.5), в силу неравенства (3.4), немедленно следует выполнение неравенства (3.3). Пусть $\delta > 0$, $\varepsilon = d/j$. Тогда из неравенства (3.3) при $\alpha \in \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}^{j_0-1+j}$

$$\left(\int_{\omega_{\varepsilon}} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{1/2} \leq B^{d_0+j_0+j} \frac{j^{(d_0+j_0+j-1)/t}}{\delta^{(d_0+j_0+j-1)/t}} \leq B^{d_0+j_0+j} j^{j/t}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы 3.1.

Когда коэффициенты гипозэллиптического оператора $P(x, D)$ постоянны, то полученный результат совпадает с уже известными результатами [6], [7] и дает тот же неулучшаемый класс Жевре, которому принадлежат все слабые решения $u \in D'(\Omega)$ уравнения $P(D)u = 0$.

Когда оператор $P(x, D)$ с аналитическими коэффициентами является эллиптическим, то полученный результат совпадает с результатами Петровского, т.е. $N(P, 0) \subset A(\Omega)$, ибо в этом случае многогранники $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ совпадают и

$$\Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega) = \Gamma^{\mathcal{M}^*}(\Omega) = \Gamma^{\lambda}(\Omega) = A(\Omega).$$

Если оператор $P(x, D)$ с аналитическими коэффициентами регулярен, то полученный результат при $t = 1$ совпадает с результатами, доказанными нами в [8]. Если же характеристический многогранник $\mathcal{N}$ оператора $P(x, D)$ также порождается одним единственным вектором и единственным числом $d > 0$, то многогранники $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ совпадают. Следовательно, $\Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega) = \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega) = \Gamma^{\lambda}(\Omega)$. Для $\gamma_{\beta}(x) \in \Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega)$ получаем $N(P, 0) \subset \Gamma^{\mathcal{M}}(\Omega)$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда если $f \in \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$, то $N(P, f) \subset \Gamma^{\mathcal{M}'}(\Omega)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

ABSTRACT. For n -dimensional polyhedron $\mathcal{N}$ we define multi-anisotropic Gevrey functional space $\Gamma^{\mathcal{N}}(\Omega)$ and prove that the solutions of hypoelliptic equations with variable coefficients from $\Gamma^{\mathcal{M}^{(*)}}(\Omega)$ belong to $\Gamma^{\mathcal{M}^{(*)}}(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов. т. I, М., Мир, 1986.
2. L. Cattabriga, "Solutions in Gevrey spaces of partial differential equations with constant coefficients", Asterisque, vol. 89 – 90, pp. 129 – 151, 1981.
3. T. Kotake, M. S. Narasimhan, "Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator", Bull. Soc. Math. France, vol. 90, pp. 449 – 471, 1962.
4. L. Zanghirati, "Iterati di una classe de operatori ipoellitici e classi generalizate de Gevrey", BUMI, vol. 1, pp. 177 – 195, 1980.
5. V. I. Burenkov, K. R. Maman, "Local bounds for the derivatives of the solutions of nonhomogeneous hypoelliptic equation" [in Russian], Diff. Uravn. i Funk. Analis, pp. 15 – 29, 1986.
6. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипозеллиптичности", Матем. сборник, т. 128(170), № 3(11), стр. 339 – 353, 1985.
7. Г. О. Акопян, "Об оценках производных решений одного класса гипозеллиптических уравнений", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 4, стр. 358 – 374, 1986.
8. Г. О. Акопян, В. Н. Маргарян, "О решениях типа Жевре гипозеллиптических уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 2, стр. 33 – 47, 1996.
9. Г. Г. Казарян, "Операторы постоянной силы с оценкой снизу через производные и формально гипозеллиптические операторы", Anal. Math., т. 3, № 4, стр. 263 – 289, 1977.

12 октября 1997

Ереванский государственный университет
E-mail : gagikhakobyan@hotmail.com