ДВУДОЛЬНЫЕ (d, λ)–ДИЗАЙНЫ

Г. С. Гаспарян, А. Э. Лазарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 1, 1998

Пусть $A = \{A_1, ..., A_m\}$ и $B = \{B_1, ..., B_m\}$ – две системы подмножеств некоторого n-элементного множества S, где $|A_i \cap B_j| = \lambda$ для любых $i \neq j$ и $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. Нетрудно показать, что $m \leq n+1$. В статье исследуется крайний случай, когда $m = n+1$. В частности, полученные результаты обобщают известное неравенство Фишера о блок схемах.

Дан метод построения неограниченного класса таких пар систем подмножеств для $\lambda = 1$, но все они имеют вершину, принадлежащую точно двум подмножествам из A или B. Показано, что минимальный пример без таких вершин должен иметь не менее 19 подмножеств.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть даны разные m подмножества $\{S_1, ..., S_m\}$ некоторого n-элементного множества S, и $|S_i \cap S_j| = \lambda$ при $i \neq j$. Каково наибольшее значение m? В случае, когда все подмножества имеют одинаковое количество элементов, Фишер доказал [1], что $m \leq n$. Для произвольных систем подмножеств это неравенство было доказано Райзером [2], используя методы линейной алгебры. Метод, предложенный им, впоследствии стал одним из самых мощных методов в комбинаторике. Неравенство $m \leq n$, известное как неравенство Фишера, имело большое влияние в развитии теории дизайна.

Мы обобщаем неравенство Фишера для двух систем подмножеств $A = \{A_1, ..., A_m\}$ и $B = \{B_1, ..., B_m\}$, где $|A_i \cap B_j| = \lambda$, $i \neq j$ и $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. Мы показываем, что $m \leq n+1$ и исследуем случай, когда $m = n+1$.

Случай, когда $m = n$ и $\lambda = 1$, хорошо изучен. В частности, Эрдеш и де Бройен доказали [3], что если вершинно-множественные матрицы инцидентности A и

В систем A и B совпадают, то $A = B$ соответствует матрице проективной (может быть вырожденной) плоскости. Другой интересный результат был получен Легманом (см. [4]), который доказал, что если $|A_i \cap B_i| > 1$, $i = 1, ..., n$, то либо A и B имеют равное количество единиц во всех строках и столбцах (тотально регулярны), либо обе – матрицы вырожденной проективной плоскости, т.е.

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Недавно эти результаты были обобщены в [5], где рассмотрен общий случай $|A_i \cap B_i| \neq |A_i \cap B_j| = 1$ и найдены некоторые достаточные условия, при которых A и B тотально регулярны.

В настоящей статье употребляются следующие обозначения : маленькими жирными латинскими буквами обозначаются векторы, большими латинскими буквами – матрицы. В частности, $\mathbf{1}$ означает вектор соответствующей длины из одних единиц, а I и J означают, соответственно, единичную матрицу и матрицу, где все элементы единицы. Компоненты вектора $\mathbf{d}$ обозначаются через d_i, $i = 1, ..., m$, $\mathbf{d}^{-1}$ есть вектор $(d_1^{-1}, ..., d_m^{-1})$. Для матрицы A a_{ij} – ее (i, j)-ий элемент, $a_{i\bullet}$ – i-ая строка, $a_{\bullet j}$ – j-ий столбец.

Пусть даны два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ длины n, и пусть D – невырожденная $n \times n$ матрица. Определим D-произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$: $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_D = \mathbf{x}\ D^{-1}\mathbf{y}^T$. В случае, когда $D = I$, получаем скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_I = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Скажем, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *пересекаются*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$, в противном случае $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не пересекаются. Будем писать $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, если $x_i \leq y_i$, $i = 1, ..., n$. Линейную оболочку векторов $\mathbf{a}_i$, $i = 1, ..., m$ обозначим $span(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)$. Мы не будем отличать матрицу от множества ее столбцов. Матрицу с элементами $\{0, 1\}$ назовем $\{0, 1\}$–матрицей. Если A – система множеств, то A означает вершинно-множественную матрицу инцидентности этой системы и наоборот. D или $diag(\mathbf{d})$ означает диагональную матрицу, где диагональные элементы – компоненты вектора $\mathbf{d}$. Скажем, что A – *s-однородна (или r-регулярна)*, если $JA = sJ$ ($AJ = rJ$).

Определение 1.1. Пару $(n \times m)$ $\{0,1\}$–матриц (A, B) назовем *двудольным* (d, λ)–*дизайном* (или просто (d, λ)–дизайном), если

$$A^T B = \lambda J + diag(\mathrm{d}), \quad d_i \neq 0, \quad i = 1, ..., m, \quad \lambda \geq 1.$$

Если (A, B) – (d, λ)–дизайн, то столбцы матриц A и B с номером i назовем d_i–*столбцами.* Если $d_i > 0$, то соответствующий столбец назовем *положительным,* в противном случае столбец *отрицательный.*

Определение 1.2. Будем говорить, что пара $(n \times m)$ $\{0,1\}$–матриц (A, B) d–*нормирована* ($d_i \neq 0$, $i = 1, ..., m$), если

1) $(a_{i\bullet}, b_{j\bullet})_D = (a_{i\bullet}, 1)_D = (b_{i\bullet}, 1)_D = 0, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j;$

2) $(a_{i\bullet}, b_{i\bullet})_D = 1, \quad i = 1, ..., n,$

где $D = diag(\mathrm{d})$.

§2. СВОЙСТВА (d, λ)–ДИЗАЙНОВ

Пусть A, B – $(n \times m)$ $\{0,1\}$–матрицы. Обозначим через A_λ и B_λ следующие матрицы :

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} \cdot 1 \\ A \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda} \cdot 1 \\ B \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Лемма 2.1. *Если (A, B) – (d, λ)–дизайн, то $m \leq n + 1$.*

Доказательство. Легко убедиться, что $A_\lambda^T B_\lambda = D$. Так как $d_i \neq 0$, то матрица A_λ имеет m линейно независимых строк, т.е. $m \leq n + 1$.

В последующем мы будем изучать случай $m = n + 1$, т.е. A и B – $(n \times n + 1)$ $\{0,1\}$–матрицы и (A, B) – (d, λ)–дизайн.

Лемма 2.2. *Пара (A, B) – (d, λ)–дизайн тогда и только тогда, когда она d–нормирована и $(1, 1)_D = -1/\lambda$.*

Доказательство. Пусть (A, B) – (d, λ)–дизайн. Рассмотрим матрицы A_λ и B_λ, определенные в (1). Легко убедиться, что

$$A_\lambda^T B_\lambda = D \Longleftrightarrow A_\lambda^T B_\lambda D^{-1} = I \Longleftrightarrow B_\lambda D^{-1} A_\lambda^T = I.$$

Последнее равенство эквивалентно следующему :

1) $\sqrt{\lambda}b_{i\bullet}D^{-1}1^T = 0 \Longleftrightarrow (b_{i\bullet},1)_D = 0$, то же самое верно и для матрицы A. т.е. $(a_{i\bullet},1)_D = 0$, $i=1,...,n$;

2) $\quad b_{i\bullet}D^{-1}a_{i\bullet}^T = 1 \Longleftrightarrow (a_{i\bullet},b_{i\bullet})_D = 1$, $i=1,...,n$;

3) $\quad b_{j\bullet}D^{-1}a_{i\bullet}^T = 0 \Longleftrightarrow (a_{i\bullet},b_{j\bullet})_D = 0$, $i \neq j$;

4) $$-\lambda 1 D^{-1}1^T = -\lambda(1,1)_D = 1 \Longleftrightarrow (1,1)_D = -\frac{1}{\lambda} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} d_i^{-1} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Лемма 2.2 доказана.

Легко проверяется, что условие $(1,1)_D = -1/\lambda$ эквивалентно условию $det(\lambda J + D) = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть (A,B) – (d,λ)–дизайн. Тогда не имеют места ни $a_{i\bullet} \leq b_{i\bullet}$, ни $b_{i\bullet} \leq a_{i\bullet}$, $i=1,...,n$, т.е.*

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \setminus B_i) = \bigcup_{i=1}^{n+1}(B_i \setminus A_i) = \mathrm{S}.$$

Доказательство. Если $a_{i\bullet} \leq b_{i\bullet}$, то $1 = (a_{i\bullet},b_{i\bullet})_D = (a_{i\bullet},1)_D = 0$ есть противоречие. Рассмотрим множества $A_i \setminus B_i$, $i=1,...,n$, где A_i и B_i – подмножества из систем множеств $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Легко убедиться, что любой элемент базисного множества S принадлежит по меньшей мере одному из этих множеств, а это значит, что $\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \setminus B_i) = \mathrm{S}$. Аналогично получаем, что $\bigcup_{i=1}^{n+1}(B_i \setminus A_i) = \mathrm{S}$. Теорема 2.1 доказана.

Из теоремы 2.1 вытекает неравенство Фишера (см. [1]) : *пусть $A_1,...,A_m$ – разные подмножества некоторого n-элементного множества, и пусть для любых $i \neq j$ имеет место $|A_i \cap A_j| = \lambda$, где $1 \leq \lambda \leq n$. Тогда $m \leq n$.*

Лемма 2.3. *Если (A,B) – (d,λ)–дизайн, то матрицы A и B не могут быть s–однородными.*

Доказательство. Предположим, что матрица A – s–однородна. Сложив все строки матрицы, получим $1 \in span(\mathrm{a}_{1\bullet},...,\mathrm{a}_{m\bullet})$. С другой стороны, матрица A_λ невырожденная, т.е. $1 \notin span(\mathrm{a}_{1\bullet},...,\mathrm{a}_{m\bullet})$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.3.

Теперь рассмотрим случай, когда A r-регулярна.

Лемма 2.4. *Если (A, B) – (d, λ)–дизайн и A r-регулярна, то компоненты вектора* d *равны либо $-\lambda$, либо $r-\lambda$ и $n\lambda \equiv 0(mod\ r)$.*

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение А. Шебо (см. [6]) : *если (A, B) – (d, λ)–дизайни A r-регулярна, то $d_j \equiv -(n+1)\lambda(mod\ r)$, $j = 1, ..., n+1$.* Действительно

$$\lambda(n+1) + d_j = \sum_{i=1}^{n+1}(a_{*i}, b_{*j}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{*i}, b_{*j}\right) = r(1, b_{*j}), \tag{2}$$

следовательно, $d_j \equiv -(n+1)\lambda(mod\ r)$, $j = 1, ..., n+1$.

Предположим, что $d_j \equiv -k(mod\ r)$, $j = 1, ..., n+1$. Тогда $d_j \le -k$, если $d_j < 0$ и $d_j \ge r-k$, если $d_j > 0$. Кроме того, $(n+1)\lambda \equiv k(mod\ r)$. Так как (A, B) – d–нормирована, то для каждой строки матрицы A сумма всех чисел d_i^{-1}, соответствующих всем тем "положительным" столбцам, которые имеют единицу в этой строке, не меньше 1. Это также верно для "отрицательных" столбцов. Следовательно, каждая строка матрицы A имеет не менее k единиц в "отрицательных" столбцах и $r-k$ единиц в "положительных" столбцах. Так как A – r–регулярна, то она имеет ровно k единиц в "отрицательных" столбцах и $r-k$ единиц в "положительных" столбцах каждой строки. А это означает, что либо $d_j = -k$, либо $d_j = r-k$. Из того, что $(a_{i*}, b_{i*})_D = 1$ и a_{i*} имеет ровно $r-k$ единиц в "$r-k$ столбцах", следует, что a_{i*} и b_{i*} не имеют общих единиц в позициях, соответствующих "отрицательным" строкам : $(a_{*j}, b_{*j}) = 0$, если $d_j < 0$. Следовательно, $d_j = -\lambda$, если $d_j < 0$ и $d_j = r-\lambda$, если $d_j > 0$. Кроме того $(n+1)\lambda \equiv \lambda(mod\ r)$ и, следовательно, $n\lambda \equiv 0(mod\ r)$. Лемма 2.4 доказана.

Итак, мы получили, что число $p = \dfrac{n\lambda}{r}$ целое.

Лемма 2.5. *Если (A, B) – (d, λ)–дизайн и A r-регулярна, то*

$$(b_{*j}, 1) = \begin{cases} p, & \text{если} \quad d_j = -\lambda, \\ p+1, & \text{если} \quad d_j = r-\lambda, \end{cases} \quad (a_{*j}, 1) = r, \quad \text{если} \quad d_j = r-\lambda.$$

Более того, имеются ровно $p+1$ "$-\lambda$-столбцы".

Доказательство. Из (2) легко получается, что если $d_j = -\lambda$, то $\lambda n = r(1, b_{*j})$. Следовательно, $(1, b_{*j}) = n\lambda/r = p$. Аналогично, если $d_j = r-\lambda$, то $(1, b_{*j}) =$

$= (n\lambda+r)/r = p+1$. Рассмотрим $(n\times n+1)$ матрицу C, где $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Очевидно

$$(c_{\bullet j},1) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad d_j = -\lambda, \\ r, & \text{если} \quad d_j = r-\lambda, \end{cases} \qquad (c_{j\bullet},1) = r-\lambda, \quad j = 1,\dots,n.$$

Таким образом, $1^T C 1 = n(r-\lambda) = rx$, где x – число "положительных" столбцов. Следовательно, $x = n-(n\lambda)/r = n-p$, а число $-\lambda$-столбцов" равно $p+1$. Кроме того, если j – "$r-\lambda$-столбец", то $a_{\bullet j} \le b_{\bullet j}$. Отсюда $a_{\bullet j} = c_{\bullet j}$, если j – "$r-\lambda$-столбец". Следовательно, $(a_{\bullet j},1) = r$, если $d_j = r-\lambda$. Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. *Пусть (A,B) – (d,λ)–дизайн, а A r-регулярна. Если наибольший общий делитель $НОД(\lambda,r) = 1$, то $\lambda = 1$, $r = 2$.*

Доказательство. Предположим, что $НОД(\lambda,r) = 1$ и $\lambda \ne 1 \ne r-\lambda$. Мы уже доказали, что $d_i = -\lambda$ или $d_i = r-\lambda$. Первая строка A имеет r единиц : $r-\lambda$ – в "$r-\lambda$-столбцах" и λ – в "$-\lambda$-столбцах". Так как $(a_{1\bullet},b_{j\bullet})_D = 0$, $j = 2,\dots,n$, то либо $(a_{1\bullet},b_{j\bullet}) = 0$, либо $(a_{1\bullet},b_{j\bullet}) = r$. Поскольку B не имеет равных столбцов, получаем, что $a_{1\bullet}$ имеет только две единицы. Первая – в "$-\lambda$-столбце" и вторая – в "$r-\lambda$-столбце". Итак $\lambda = 1$ и $r-\lambda = 1$, т.е. $r = 2$. Лемма 2.6 доказана.

Объединяя леммы 2.4 – 2.6, получаем следующую теорему :

Теорема 2.2. *Пусть (A,B) – (d,λ)–дизайн, где A r-регулярна. Тогда d имеет ровно $p+1$ отрицательных компонент, равных $-\lambda$ и $n-p$ положительных компонент, равных $r-\lambda$. Кроме того*

$$(b_{\bullet j},1) = \begin{cases} p, & \text{если} \quad d_j = -\lambda, \\ p+1, & \text{если} \quad d_j = r-\lambda, \end{cases} \qquad (a_{\bullet j},1) = r, \quad \text{если} \quad d_j = r-\lambda.$$

Более того, $НОД(\lambda,r) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$ и $r = 2$.

Лемма 2.7. *Пусть (A,B) – (d,λ)–дизайн. Тогда число единиц в каждой строке матриц A и B не равно трем.*

Доказательство. Докажем утверждение для матрицы A. Любая строка A содержит единицу в отрицательных столбцах. Если строка, скажем $a_{1\bullet}$, содержит точно одну такую единицу, то из условия $(a_{1\bullet},b_{j\bullet})_D = 0$, $j = 2,\dots,n$ следует, что либо $(a_{1\bullet},b_{j\bullet}) = 0$, либо $a_{1\bullet} \le b_{j\bullet}$ и $a_{1j} \le b_{1j}$, если j – положительный столбец. Так как B не имеет равных столбцов, то $a_{1\bullet}$ имеет две единицы : одна – в "-1-столбце" и другая – в "$+1$-столбце". Если строка имеет больше двух единиц в отрицательных столбцах, то аналогично получаем, что она также имеет не менее единиц в положительных столбцах. Следовательно, строка имеет по меньшей мере 4 единицы. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. *Пусть* (A,B) – $(\mathbf{d},\lambda)$*–дизайн. Для любого* $d_k > 0$ *обозначим* $f_{d_k} = \{i : d_i = d_k\}$. *Если для всех* i *таких, что* $d_i \neq d_k$, $НОД(d_i,d_k) = 1$, то $|f_{d_k}| > d_k^2/\lambda$.

Доказательство. Предположим, для простоты, что все "d_k-столбцы" находятся в начале матриц A и B, $(a_{\bullet 1}, 1) = q \geq d_k+\lambda$ и все q единицы столбца $a_{\bullet 1}$ находятся в первых q строках. Мы знаем, что $(a_{\bullet 1}, b_{\bullet 1}) = d_k + \lambda$. Рассмотрим матрицу B', полученную от B строками $1,...,q$ и столбцами $2,...,|f_{d_k}|$. Каждый столбец в B' содержит ровно λ единиц. Из условия леммы и из того, что $(a_{j\bullet}, b_{j\bullet})_D = 1$, $j = 1,...,d_k+\lambda$ следует, что каждая из первых $d_k+\lambda$ строк матрицы B' содержит по меньшей мерс $d_k - 1$ единиц, следовательно, B' имеет не менее $(d_k + \lambda)(d_k - 1)$ единиц. Отсюда получаем, что число "d_k-столбцов" не меньше

$$\frac{(d_k + \lambda)(d_k - 1)}{\lambda} + 1 = \frac{d_k^2}{\lambda} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} d_k.$$

Итак, если $\lambda > 1$, то $|f_{d_k}| > d_k^2/\lambda$. Легко проверяется, что если $\lambda = 1$, то строгое неравенство сохраняется. Лемма 2.8 доказана.

Лемма 2.8 показывает, что если, например, среди компонент вектора $\mathbf{d}$ имеется простое число (скажем, существует k такое, что $d_k = 11$ и $\lambda = 2$), то размеры этого дизайна большие (число "11-столбцов" не меньше 61) и, поэтому, построить такой пример трудно.

§3. ДВУДОЛЬНЫЕ $(d,1)$–ДИЗАЙНЫ

Очевидно, что когда A 2-регулярна, то $\lambda = 1$, $d_i = \pm 1$ и n четно. Введем еще несколько обозначений. Пусть дан граф $G = G(V,E)$ и вершина $v \in V(G)$. Обозначим через $G \setminus v$ граф, полученный от G удалением вершины v, а через G/v – граф, полученный от G удвоением вершины v, т.е. добавлением новой вершины v', которая смежна со всеми вершинами, смежными с v.

Пусть (v_1, v_2) – ребро графа G. Граф, полученный от G подразбиением этого ребра, получается следующим образом : добавляется новая вершина v и вместо

(v_1, v_2) берутся ребра (v_1, v) и (v, v_2).

Определение 3.1. Будем говорить, что граф G *паросочетаемый*, если для любой вершины $v \in V(G)$ либо $G \setminus v$ либо G/v имеет совершенное паросочетание.

Очевидно, что число вершин паросочетаемого графа нечетно.

Лемма 3.1. *Паросочетаемые графы связные.*

Доказательство. Пусть G – паросочетаемый граф. Так как число его вершин нечетно, граф должен иметь связную компоненту с нечетным числом вершин. Для любой вершины v вне этой компоненты ни $G \setminus v$ ни G/v не имеют совершенного паросочетания. Следовательно граф G связный.

Мы будем связывать эти графы с $(\mathrm{d}, 1)$–дизайнами. Поэтому мы будем рассматривать паросочетаемые графы с $n + 1$ вершинами и n ребрами, т.е. паросочетаемые деревья.

Определение 3.2. Будем говорить, что дерево T – *2-дерево*, если оно получено от некоторого дерева T' подразбиением всех его ребер. Причем, вершину $v \in V(T)$ назовем *старой*, если $v \in V(T')$ и *новой* – в противном случае.

Лемма 3.2. *Пусть* (A, B) – $(\mathrm{d}, 1)$–*дизайн. A 2-регулярна тогда и только тогда, когда она – матрица инцидентности (реберно–вершинная) некоторого паросочетаемого графа.*

Доказательство. Пусть (A, B) – $(\mathrm{d}, 1)$–дизайн и $AJ = 2J$. Предположим, что A – матрица инцидентности некоторого графа с $n + 1$ ребрами и n вершинами. Тогда легко проверить, что i-й столбец матрицы B соответствует вектору инцидентности совершенного паросочетания графа $G \setminus v$, если это "-1 столбец", или G/v, если это "+1 столбец". Следовательно, граф паросочетаемый. Достаточность очевидна. Лемма 3.2 доказана.

Паросочетаемые деревья могут характеризоваться следующим образом :

Лемма 3.3. *Дерево T паросочетаемое тогда и только тогда, когда оно – 2-дерево.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу вершин. Случай $n = 3$ легко проверяется. Предположим, что лемма верна для деревьев с числом вершин, не превосходящим n, и докажем, что она также верна для любого $(n+2)$-вершинного дерева T.

Предположим теперь, что T – паросочетаемое дерево. Пусть v – лист дерева T. Обозначим через v' вершину, смежную с v. Очевидно, что совершенное паросочетание графа, полученного удалением или удвоением любой другой вершины, содержит ребро (v, v'). Следовательно, граф, полученный от T удалением вершин v и v', паросочетаемый. Это значит, что $deg(v') = 2$ и дерево $T \setminus \{v, v'\}$ – 2-дерево (применяем предположение индукции). Пусть v'' – вторая вершина, смежная с v'. Если v'' – "старая" вершина, то необходимость очевидна. Но v'' не может быть "новой" вершиной, потому что в этом случае совершенное паросочетание $T \setminus v$ содержит ребро (v', v''), а вершина v'' делит дерево $T \setminus \{v, v'\}$ на две части, каждая из которых имеет нечетное число вершин, следовательно, не может иметь совершенного паросочетания.

Предположим теперь, что T – 2-дерево и покажем, что оно паросочетаемое. Возьмем любую вершину $v \in V(T)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. v – "старая" вершина. Пусть $C_1, ..., C_p$ – связные компоненты графа $T \setminus v$. Каждая компонента C_i содержит "новую" вершину v_i, смежную с v. Через v_i' обозначим вторую вершину, смежную с v_i. Применяя индукцию получаем, что графы $C_i \setminus \{v_i, v_i'\}$, $i = 1, ..., p$ имеют совершенное паросочетание. Добавляя к ним ребра (v_i, v_i'), $i = 1, ..., p$, получим совершенное паросочетание графа $T \setminus v$.

Случай 2. v – "новая" вершина. Очевидно, что $T \setminus v$ содержит две связные компоненты C_1 и C_2. Пусть $v_1 \in C_1$ и $v_2 \in C_2$ – "старые" вершины, смежные с v. Применяя индукцию получаем, что совершенное паросочетание T/v получается следующим образом : берутся ребра (v, v_1) и (v, v_2) и совершенные паросочетания $C_i \setminus v_i$, $i = 1, 2$.

Итак, T – паросочетаемое дерево. Лемма 3.3 доказана.

Теперь предложим метод построения нового $(\mathrm{d}, 1)$–дизайна, $d_i = \pm 1$ композицией двух других $(\mathrm{d}, 1)$–дизайнов. Предположим, что (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – $(\mathrm{d}, 1)$–дизайны, $A_1 = [A'\mathrm{a}]$ и $B_1 = [B'\mathrm{b}]$, где a и b – последние столбцы матриц A_1 и B_1, соответственно. В качестве базиса можно брать $(\mathrm{d}, 1)$–дизайны, соответствующие паросочетаемым деревьям. Возьмем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A' & \mathbf{a} \cdot 1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B' & \mathbf{b} \cdot 1^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Последние столбцы матриц A_1 и B_1 повторяются вправо и последний столбец матрицы $A_1(B_1)$ находится над первым столбцом матрицы $A_2(B_2)$. Таким образом, мы получаем новый $(\mathbf{d}, 1)$–дизайн.

Легко убедиться, что если в качестве базиса брать паросочетаемые деревья, то полученные дизайны имеют строки с двумя единицами.

Теорема 3.1. *Пусть (A, B) – $(\mathbf{d}, 1)$–дизайн, где A и B не имеют строки с двумя единицами. Тогда $n \geq 19$.*

Доказательство. Сначала покажем что матрицы A и B имеют строки по меньшей мере с 3 единицами в позициях, соответствующих "-1 столбцам". Предположим обратное : пусть все единицы первого столбца находятся в первых p строках. Рассмотрим матрицу B', полученную от B первыми p строками и всеми "-1 столбцами" кроме, возможно, столбца $b_{\bullet 1}$. Каждая строка B' содержит точно 2 единицы и каждый столбец имеет одну 1, следовательно, число B' столбцов четно. Таким образом, если в качестве $a_{\bullet 1}$ взять положительный столбец, число всех "-1 столбцов" четно, в противном случае это число нечетно. Мы пришли к противоречию, следовательно, B имеет строку по меньшей мере с 3 единицами в "-1 столбцах".

Так как вышесказанное верно для любой пары положительного и отрицательного столбцов, то имеются как минимум две такие строки. Следовательно, B имеет не менее $4n + 4$ единиц. А это значит, что B имеет столбец с не меньше чем 5 единицами. Если это "-1 столбец", то мы имеем не меньше чем 11 "-1 столбцов" и 10 положительных столбцов. Следовательно, число столбцов больше или равно 21. Если этот столбец положительный, то мы имеем по меньшей мере 10 "-1 столбцов" и не менее чем 9 положительных столбцов. Таким образом, число столбцов самое меньшее 19. Теорема 3.1 доказана.

Получить пример $(\mathbf{d}, 1)$–дизайна без строк с двумя единицами кажется трудно. Поэтому предлагаем следующее.

Гипотеза. Если (A, B) – $(d, 1)$–дизайн, то либо A, либо B имеет строку с двумя единицами.

ABSTRACT. Let A = $\{A_1, ..., A_m\}$ and B = $\{B_1, ..., B_m\}$ be two systems of subsets of some n-element set S, such that $|A_i \cap B_j| = \lambda$ for any $i \neq j$ and $|A_i \cap B_i| \neq \lambda$. It is easy to show that $m \leq n + 1$. In this paper we investigate the extreme case when $m = n + 1$. In particular, our results generalize the well-known inequality of R. Fisher on block designs. We describe a method of construction of a class of such pairs A, B for $\lambda = 1$. However, pairs constructed by this method always have a vertex belonging to exactly two subsets from A or B. We show that a minimal example, where no such vertices occur should have at least 19 subsets.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Fisher, "An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks", Ann. Eugenics, vol. 10, pp. 52 – 75, 1940.
2. H. Ryser, "An extension of a theorem of De Bruijn and Erdős on combinatorial designs", J. Algebra, vol. 10, pp. 246 – 261, 1968.
3. N. G. De Bruijn, P. Erdős, "On a combinatorial problem", Indag. Math., vol. 10, pp. 421 – 423, 1948.
4. A. Lehman, "On the width-length inequality", Mathematical Programming, vol. 17, pp. 403 – 413, 1979.
5. G. S. Gasparian, "Bipartite designs", J. Combinatorics (in press).
6. A. Sebo, "Characterizing noninteger polyhedra with 0 – 1 constraints", J. Combinatorics (in press).

1 ноября 1997 Ереванский государственный университет