ОСОБЫЕ ТОЧКИ СПЕКТРА РАВНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Б. Т. Батикян, С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 33, № 1, 1998

В статье исследуются особые точки спектра равномерной алгебры. Показано, что кратные особые точки порождаются строго локальными точечными дифференцированиями, а приводимые особые точки – отождествлением в точку конечного подмножества спектра исходной алгебры. Доказана теорема о локальной нормализации особой точки.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе определяются и изучаются особые точки спектра $S(A)$ равномерной алгебры A. Мерой "особенности" точки $x \in S(A)$ будет служить целое число $\delta_A(x)$ – дефект точки x относительно алгебры A, которое определяется посредством алгебр ростков функций, A-голоморфных в (проколотой) окрестности точки x.

Показано, что если x – особая точка (тогда $x \in S(A)\backslash\partial A$ (теорема 4.3)), то алгебра A допускает такое расширение B, спектр $S(B)$ которого конечнолистно накрывает некоторую окрестность точки x, причем слой над x состоит из точек, регулярных относительно алгебры B (следствие 4.1). Другими словами, алгебра B осуществляет локальную нормализацию точки x. Мы покажем, что в процессе нормализации важную роль играют строго локальные точечные дифференцирования. С другой стороны, для одномерных аналитических множеств наше определение особой точки совпадает с обычным определением особой точки аналитического множества (теорема 5.1).

Однако, абстрактный случай существенно отличается от аналитического. В частности, могут существовать внутренние точки спектра, дефект которых бесконечен (такие точки мы называем существенно особыми) ; множество особых точек может быть достаточно массивным.

Приведем схему изложения работы. В §1 изучаются спектры и границы Шилова алгебр A-голоморфных функций. В §2 описываются конструкции прямого предела алгебр A-голоморфных функций и обратного предела их спектров, приводятся основные определения, рассматриваются примеры. В следующих параграфах исследуются свойства особых точек (кратность, приводимость), описывается нормализирующее расширение алгебры A.

Напомним теперь некоторые определения и результаты теории равномерных алгебр, используемые в работе, и зафиксируем обозначения. (Подробности см. [1]).

Коммутативная банахова алгебра A с единицей называется равномерной алгеброй, если $\|f^2\| = \|f\|^2$ для любого $f \in A$. Пусть $S(A)$ – спектр алгебры A, т.е. совокупность всех комплексных гомоморфизмов этой алгебры. Спектр $S(A)$ является компактом в слабо* топологии сопряженного к A пространства, причем алгебру A можно реализовать в виде такой равномерно замкнутой подалгебры в $C(S(A))$, которая содержит постоянные функции и разделяет точки $S(A)$. В нашей работе дополнительно предполагается сепарабельность A, что равносильно метризуемости компакта $S(A)$. Спектром элемента $f \in A$ называется множество значений функции f на $S(A)$.

Каждый гомоморфизм $\rho : A \to B$ равномерных алгебр автоматически непрерывен и порождает непрерывное отображение $\pi : S(B) \to S(A)$ спектров этих алгебр, где $\pi(\varphi) = \rho \circ \varphi, \varphi \in S(B)$. Отображение π называется двойственным к гомоморфизму ρ.

Для произвольного замкнутого подмножества $E \subset S(A)$ через $A|E$ обозначается сужение алгебры A на компакт E, а через A_E - замыкание $A|E$ по норме $\|f\|_E = \sup\limits_E |f|$. Спектр равномерной алгебры A_E содержится в $S(A)$ и называется A-выпуклой оболочкой множества E. Компакт E называется A-выпуклым, если $S(A_E) = E$. Каждая точка $x \in S(A)$ обладает базой замкнутых A-выпуклых окрестностей.

Через ∂A обозначается граница Шилова алгебры A, т.е такое наименьшее замкнутое подмножество $S(A)$, что $\|f\| = \|f\|_{\partial A}$ для всех $f \in A$. Точка $y \in \partial A$ называется точкой пика, если существует такая функция $g \in A$, что $g(y) = 1$ и $|g| < 1$ на $S(A)\setminus\{y\}$. Множество точек пика есть плотное подмножество границы Шилова. Согласно локальному принципу максимума модуля (теорема Росси) $\partial A_{\overline{U}} \subset (\partial A \bigcap \overline{U}) \bigcup bU$, где U – открытое подмножество $S(A)$, bU – топологическая граница U.

Если h - ограниченная непрерывная функция на U, то через $[A, h]$ будет обозначаться равномерная алгебра, порожденная элементами A и функцией h. Всякая функция из алгебры $[A, h]$ есть равномерный предел на U элементов вида $\sum a_n h^n$, где $a_n \in A$.

Непрерывный линейный функционал d на алгебре A называется точечным дифференцированием, отвечающим точке $x \in S(A)$, если $d(fg) = d(f)g(x)+$ $+d(g)f(x)$ для всех $f, g \in A$. Точечное дифференцирование, отвечающее точке пика, тривиально. Точечное дифференцирование d называется локальным, если $d(g) = 0$ для всякой функции $g \in A$, обращающейся в нуль на некоторой окрестности точки x.

§1. A–ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть A – равномерная алгебра, и E – локально компактное подмножество спектра $S(A)$. Функция $h \in C(E)$ называется A-голоморфной в точке $y \in E$, если существует такая замкнутая окрестность $\overline{V}$ точки y, что $h \in A_{\overline{V} \cap E}$. Функция h называется A-голоморфной на E, если она A-голоморфна в каждой точке E. Совокупность всех ограниченных A-голоморфных на E функций мы будем обозначать через $H_A(E)$, а ее замыкание по sup-норме на E – через $O_A(E)$. (Равномерный предел A-голоморфных функций не обязательно A-голоморфен [2]). Понятно, что $O_A(E)$ – равномерная алгебра, спектр которой, вообще говоря, не содержится в $S(A)$. Если E – замкнуто, то, очевидно, $A_E \subset O_A(E)$.

Зафиксируем произвольную неизолированную точку $x \in S(A)$; и пусть $\overline{U}$ – некоторая ее замкнутая окрестность, а $\overline{U}^* = \overline{U}\setminus\{x\}$ – соответствующая проколотая окрестность. Сопоставим этим окрестностям равномерные алгебры

$O_A(\overline{U})$, $O_A(\overline{U}^*)$ и $O^c_A(\overline{U}) = C(\overline{U})\bigcap O_A(\overline{U}^*)$. Ясно, что $H^c_A(\overline{U}) = C(\overline{U})\bigcap H_A(\overline{U}^*)$ есть плотная подалгебра алгебры $O^c_A(\overline{U})$. Кроме того

$$A_{\overline{U}} \subset O_A(\overline{U}) \subset O^c_A(\overline{U}) \subset O_A(\overline{U}^*). \tag{1.1}$$

Прежде чем перейти к описанию границ Шилова алгебр $O_A(\overline{U})$ и $O^c_A(\overline{U})$ заметим, что поскольку их элементы суть непрерывные функции на $\overline{U}$, то спектры этих алгебр содержат $\overline{U}$, а границы Шилова содержатся в $\overline{U}$. Далее, из (1.1) вытекают включения $\partial A_{\overline{U}} \subset \partial O_A(\overline{U}) \subset \partial O^c_A(\overline{U})$.

Теорема 1.1. $\partial O^c_A(\overline{U}) = \partial O_A(\overline{U}) = \partial A_{\overline{U}}$.

Доказательство. Пусть y принадлежит $\overline{U}\backslash\partial A_{\overline{U}}$ и отлична от x. Тогда для всякого $f \in H^c_A(\overline{U})$ найдется такая окрестность V точки y, что $\overline{V}\bigcap\partial A_{\overline{U}} = \emptyset$ и $f \in A_{\overline{V}}$. Согласно локальному принципу максимума модуля $\partial A_{\overline{V}} \subset b\overline{V}$, т.е. $|f(y)| \le \|f\|_{b\overline{V}}$. Это означает, что $\partial O^c_A(\overline{U})$ содержится в $\partial A_{\overline{U}}\bigcup\{x\}$.

Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $x \in \partial O^c_A(\overline{U})\backslash\partial A_{\overline{U}}$. В этом случае x, являясь изолированной точкой $\partial O^c_A(\overline{U})$, будет точкой пика для $O^c_A(\overline{U})$. Пусть g – функция из $O^c_A(\overline{U})$, образующая пик в x. Тогда последовательность g^n равномерно на $\partial O^c_A(\overline{U})$ сходится к характеристической функции h точки x. Таким образом, $h \in O^c_A(\overline{U})$ и x – изолированная точка $\overline{U}$ а, значит, и $S(A)$. Полученное противоречие доказывает, что $\partial O^c_A(\overline{U}) = \partial A_{\overline{U}}$.

Предположим, что окрестность $\overline{U}$ A-выпукла, т.е. $S(A_{\overline{U}}) = \overline{U}$. Рассмотрим естественное непрерывное отображение $\pi : S(O_A(\overline{U}^*)) \to \overline{U}$, вызванное вложением $A_{\overline{U}} \subset O_A(\overline{U}^*)$. Поскольку каждая функция из алгебры $O_A(\overline{U}^*)$ непрерывна на $\overline{U}^*$, то $S(O_A(\overline{U}^*))$ содержит в себе $\overline{U}^*$, т.е прообраз $\pi^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \overline{U}^*$ непуст. Однако, совсем не очевидно, что этот прообраз одноточечен, т.е. что комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\overline{U}}$, соответствующий точке $y \in \overline{U}^*$, однозначно продолжается до комплексного гомоморфизма $O_A(\overline{U}^*)$.

Теорема 1.2. *Пусть $\overline{U}$ – A-выпуклая окрестность точки $x \in S(A)$, $h \in H_A(\overline{U}^*)$, $B = [A_{\overline{U}}, h]$ – равномерная алгебра, порожденная алгеброй $A_{\overline{U}}$ и функцией h. Тогда комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\overline{U}}$, соответствующий любой точке $y \in \overline{U}^*$, однозначно продолжается до комплексного гомоморфизма алгебры B.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда, если обозначить через π_h естественное отображение $S(B) \to \overline{U}$, найдется такая точка $y_0 \in \overline{U}^*$, что $\pi_h^{-1}(y_0)$ – неодноточечно. В частности, множество $\Delta = S(B)\backslash(\overline{U}^* \bigcup \pi_h^{-1}(x))$ непусто. Заметим прежде всего, что

1) множество Δ открыто в $S(B)$. Действительно, если $\lambda \in \Delta$, то найдется такая ее окрестность W, что $\overline{W} \bigcap \pi_h^{-1}(x) = \emptyset$. Поэтому $\pi_h(\overline{W}) \subset \overline{U}^*$ и $V = W \backslash \pi_h(\overline{W})$ – открытая окрестность точки λ, содержащаяся в Δ;

2) $\Delta \bigcap \partial B = \emptyset$. В самом деле, если бы $\lambda \in \Delta$ являлась p-точкой (обобщенной точкой пика) для B, то нашлась бы функция $f \in B$ такая, что $|f(\lambda)| > 1/2$ и $|f| < 1/2$ на $\overline{U}^*$. Но тогда $\|f\| = \sup_{\overline{U}^*} |f(y)| \le 1/2$, что невозможно.

Положим $K = \overline{\Delta}$ и $D = B_K$. В силу локального принципа максимума модуля $\partial D \subset b\Delta \subset \overline{U}^* \bigcup \pi_h^{-1}(x)$. Пусть $\xi \in \partial D$ – обобщенная точка пика алгебры D. Предположим, что $\xi \in \overline{U}^*$. Тогда найдется такая окрестность W точки ξ, что $h \in A_{\overline{W}}$, т.е. существует последовательность $\{g_n\} \subset A$, равномерно на $\overline{W}$ сходящаяся к h. С другой стороны, по определению p-точки найдется такая функция $f \in D$, что $\|f\|_K \le 1$, $|f(\xi)| \ge 3/4$ и $|f| < 1/4$ всюду вне $\pi_h^{-1}(W)$. Так как $\xi \in b\Delta$, то множество $E = \{\lambda \in K : |f(\lambda)| \ge 1/2\}$ обязано содержать точки из Δ. Пусть $\lambda_0 \in E \bigcap \Delta$, а σ – ее мера Йенсена на ∂D. Носитель этой меры имеет непустое пересечение с W (иначе $|f(\lambda_0)| \le \int |f| d\sigma < 1/2$). Поэтому

$$\left|\int (h - g_n) d\sigma\right| = \exp\log\left|\int (h - g_n) d\sigma\right| \le \exp\int \log|h - g_n| d\sigma \to 0,$$

откуда $h(\lambda_0) = \lim \int g_n d\sigma = \lim g_n(\pi_h(\lambda_0)) = h(\pi_h(\lambda_0))$, т.е. точки λ_0 и $\pi_h(\lambda_0)$ не разделяются функцией h, что невозможно.

Таким образом, каждая p-точка алгебры D содержится в $\pi_h^{-1}(x) \bigcap S(D)$. Но множество $\pi_h^{-1}(x) \bigcap S(D)$ D-выпукло, а D-выпуклая оболочка ∂D совпадает, очевидно, с $S(D)$. Отсюда $\Delta \subset S(D) \subset \pi_h^{-1}(x)$, что тоже невозможно. Итак, $\Delta = \emptyset$, и теорема доказана.

Следствие 1.1. *Если окрестность $\overline{U}$ – A-выпукла, то*

1) $S(O_A(\overline{U}^*)) = \overline{U}^* \bigcup \pi^{-1}(x)$,

2) $\partial O_A(\overline{U}^*) \subset \partial A_{\overline{U}} \bigcup \pi^{-1}(x)$.

Доказательство. По теореме 1.2 всякий комплексный гомоморфизм алгебры $A_{\overline{U}}$, отвечающий точке множества $\overline{U}^*$, однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры, возникающей в результате присоединения заданной функции $h \in H_A(\overline{U}^*)$. Так как $H_A(\overline{U}^*)$ плотна в $O_A(\overline{U}^*)$, то отсюда следует первое утверждение. Для доказательства утверждения 2) надо повторить рассуждения доказательства теоремы 1.1.

Следствие 1.2. ([2], [3]) *Если в условиях теоремы 1.2 функция h принадлежит $H_A^c(\overline{U})$, то $S(B) = \overline{U}$.*

Доказательство. Так как элементы алгебры B – непрерывные функции на $\overline{U}$, то множество $\Delta = S(B)\backslash\overline{U}$ открыто и, кроме того, не пересекается с $\partial B = \partial A_{\overline{U}}$ (теорема 1.1). Так же как и в теореме 1.2 предположение о непустоте Δ приводит к противоречию.

Следствие 1.3. $S(O_A(\overline{U})) = S(O_A^c(\overline{U})) = \overline{U}$.

§2. ПРЯМЫЕ ПРЕДЕЛЫ АЛГЕБР A–ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ. РЕГУЛЯРНЫЕ И ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Пусть A – равномерная алгебра, и x – произвольная неизолированная точка из $S(A)$. Рассмотрим счетную локальную базу A-выпуклых окрестностей $\{\overline{U}_i\}$ точки x, образующих направленное множество по включению, и сопоставим каждой окрестности $\overline{U}_i$ тройку равномерных алгебр $O_A(\overline{U}_i) \subset O_A^c(\overline{U}_i) \subset O_A(\overline{U}_i^*)$. Всякой паре индексов i и j, связанных отношением $i < j$ (т.е. $\overline{U}_i \subset \overline{U}_j$), соотнесем отображение ρ_{ij}, сопоставляющее функции $f \in O_A(\overline{U}_i^*)$ ее сужение на $\overline{U}_j^*$. Очевидно, ρ_{ij} есть сохраняющий константы гомоморфизм из $O_A(\overline{U}_i^*)$ в алгебру $O_A(\overline{U}_j^*)$ (а также из $O_A^c(\overline{U}_i)$ в $O_A^c(\overline{U}_j)$ и из $O_A(\overline{U}_i)$ в $O_A(\overline{U}_j)$). Легко проверить, что $\{O_A(\overline{U}_i^*), \rho_{ij}\}$ образует прямую систему, так что мы можем рассмотреть прямой предел $O_A^*(x) = \varinjlim O_A(\overline{U}_i^*)$ этой системы. Напомним, что прямой предел есть множество классов, образованных в объединении $\bigcup_i O_A(\overline{U}_i^*)$ следующим отношением эквивалентности : функция $f \in O_A(\overline{U}_i^*)$ считается эквивалентной функции $g \in O_A(\overline{U}_j^*)$, если существует индекс $l > i, j$ такой, что $\rho_{il}(f) = \rho_{jl}(g)$. Множество классов эквивалентности наделяется естественной алгебраической структурой, превращающей $O_A^*(x)$ в комплексную коммутативную алгебру с единицей, причем каноническое отображение $\rho_i : O_A(\overline{U}_i^*) \to O_A^*(x)$, сопоставляющее любой функции алгебры $O_A(\overline{U}_i^*)$ содержащий ее класс эквивалентности, есть гомоморфизм алгебр. Класс $\rho_i(f) = \mathbf{f}$, содержащий функцию f, называется ростком функции f в точке x. (Подробнее о пределе прямой системы см. [4], стр. 263-278). Аналогично определяются алгебры $O_A^c(x) = \varinjlim O_A^c(\overline{U}_i)$ и $O_A(x) = \varinjlim O_A(\overline{U}_i)$.

Теорема 2.1. *Коммутативные алгебры $O_A^c(x)$ и $O_A(x)$ локальны, т.е. обладают единственным максимальным идеалом.*

Доказательство. Пусть M_i^c – максимальный идеал алгебры $O_A^c(\overline{U}_i)$, отвечающий точке x. Тогда $\{M_i^c, \rho_{ij}\}$ образует прямую систему, причем предел M^c этой системы есть максимальный идеал коразмерности 1 алгебры $O_A^c(x)$. Если $\mathbf{h} \in O_A^c(x) \setminus M^c$, то найдутся такие индекс i и функция $h \in O_A^c(\overline{U}_i)$, что $\rho_i(h) = \mathbf{h}$ и $h(x) \neq 0$. В силу непрерывности h можно подобрать такую окрестность $\overline{U}_j$ точки x, что $\rho_{ij}(h)$ не обращается в нуль на $\overline{U}_j$. По следствию 1.3 функция $\rho_{ij}(h)$ обратима в $O_A^c(\overline{U}_j)$, а тем самым росток $\mathbf{h}$ обратим в $O_A^c(x)$. Аналогично устанавливается локальность алгебры $O_A(x)$.

Если $\pi_{ij} : S(O_A(\overline{U}_j^*)) \to S(O_A(\overline{U}_i^*))$ – непрерывное отображение, двойственное к гомоморфизму ρ_{ij}, то $\{S(O_A(\overline{U}_i^*)), \pi_{ij}\}$ – есть обратная система компактных множеств. Пусть $S^* = \varprojlim S(O_A(\overline{U}_i^*))$ – обратный предел этой системы. Известно, что обратный предел компактных множеств непуст и компактен [4, стр.269], а обратный предел спектров прямой системы является спектром прямого предела [5]. Таким образом, S^* – непустое компактное множество, служащее спектром для коммутативной алгебры $O_A^*(x)$.

Покажем, что компакту S^* можно придать и другой смысл, связанный с предельным множеством ограниченной A-голоморфной функции. Число c называется предельным значением функции $f \in O_A(\overline{U}_i^*)$ в точке x, если существует такая последовательность $\{y_k\} \subset \overline{U}_i^*$, что $y_k \to x$ и $f(y_k) \to c$. Множество всех предельных значений f в точке x обозначим через $Cl(f, x)$.

Теорема 2.2. *Если $f \in O_A(\overline{U}_i^*)$, то $Cl(f,x)$ совпадает со спектром ростка $\rho_i(f)$ в алгебре $O_A^*(x)$.*

Доказательство. Пусть $y_k \to x$ и $f(y_k) \to 0$. Обозначим через N_i замкнутый идеал всех тех функций $g \in O_A(\overline{U}_i^*)$, для которых $\lim g(y_k) = 0$. Заметим, что $M_i^c \subset N_i$, поэтому оболочка K_i идеала N_i должна содержаться в $\pi^{-1}(x)$ (см. следствие 1.1). Далее, если $i < j$, то $\rho_{ij}(N_i) \subset N_j$, откуда $\pi_{ij}(K_j) \subset K_i$. Тем самым $\{K_i, \pi_{ij}\}$ образует обратную систему компактных множеств, причем ее предел K непуст и содержится в S^*. Теперь, если $\varphi \in K$, то найдутся индекс $j > i$ и комплексный гомоморфизм $\varphi_j \in K_j$ такие, что $\varphi(\rho_i(f)) = \varphi_j(\rho_{ij}(f)) = 0$.

Обратно, пусть число c не является предельным значением для f. Это означает, что при некотором $j > i$ функция $(f-c)^{-1}$ будет ограниченной на $\overline{U}_j^*$. Выберем $g_n \in H_A(\overline{U}_j^*)$ так, чтобы g_n равномерно сходилась к $f-c$ и $\|g_n\| \geq \delta > 0$. Ясно, что тогда и g_n^{-1} принадлежат $H_A(\overline{U}_j^*)$, причем $g_n^{-1} \to (f-c)^{-1}$ по sup-норме на $\overline{U}_j^*$. Таким образом, $f - c$ обратим в алгебре $O_A(\overline{U}_j^*)$, а потому росток $\rho_i(f-c) = \rho_i(f) - c$ обратим в $O_A^*(x)$, и c не принадлежит спектру ростка $\rho_i(f)$.

Следствие 2.1. *Алгебра $O_A^c(x)$ состоит из всех тех элементов алгебры $O_A^*(x)$, которые имеют одноточечный спектр.*

Доказательство. Действительно, пусть росток $\rho_i(f)$ функции $f \in O_A(\overline{U}_i^*)$ имеет одноточечный спектр. Согласно теореме 2.2 функция f имеет только одно предельное значение и потому принадлежит $O_A^c(\overline{U}_i)$.

Из определения прямого предела следует, что $O_A(x) \subset O_A^c(x) \subset O_A^*(x)$, причем эти алгебры имеют общую единицу. Обозначим через $\delta_A(x)$ размерность фактор-пространства $O_A^*(x)/O_A(x)$. Если положить $m_A(x) = \dim O_A^c(x)/O_A(x)$ и $r_A(x) = \dim O_A^*(x)/O_A^c(x)$, то, очевидно, $\delta_A(x) = m_A(x) + r_A(x)$.

Определение. Неизолированную точку x назовем

1) регулярной, если $\delta_A(x) = 0$,

2) особой, если $0 < \delta_A(x) < \infty$,

3) существенно особой, если $\delta_A(x) = \infty$.

Число $\delta_A(x)$ будем называть дефектом точки x относительно алгебры A.

Поскольку определение особой точки использует понятие подалгебры конечной коразмерности, приведем некоторые результаты о таких подалгебрах (см. [6], [7]). Пусть $A \subset B$ – коммутативные комплексные алгебры с общей единицей и $\dim B/A = k$. Тогда существует цепочка таких подалгебр

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{k-1} \subset A_k = B,$$

что $\dim A_{i+1}/A_i = 1$, $0 \leq i \leq k-1$. При этом либо существует точечное дифференцирование на A_{i+1}, ядром которого служит A_i, либо существуют такие $\varphi_1, \varphi_2 \in S(A_{i+1})$, что $A_i = \{a \in A_{i+1} : \varphi_1(a) = \varphi_2(a)\}$.

Пусть x – особая точка. Согласно следствию 2.1 компакт S^* состоит из $r_A(x)+1$ точек $\varphi_1, \ldots \varphi_{r_A(x)+1}$ и $O^c_A(x) = \{\mathrm{f} \in O^*_A(x) : \varphi_1(\mathrm{f}) = \cdots = \varphi_{r_A(x)+1}(\mathrm{f})\}$. В таких случаях говорят, что алгебра $O^c_A(x)$ получается из $O^*_A(x)$ отождествлением точек S^*.

Далее пусть $O_A(x) = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_{m_A(x)-1} \subset A_{m_A(x)} = O^c_A(x)$ – цепочка подалгебр коразмерности 1, соединяющая $O_A(x)$ с $O^c_A(x)$. Поскольку алгебра $O^c_A(x)$ локальна, то алгебра $A_{m_A(x)-1}$ является ядром дифференцирования d в отождествленной точке φ, соответствующей максимальному идеалу M^c. Но тогда и $A_{m_A(x)-1}$ – локальная алгебра, и $M^c \bigcap A_{m_A(x)-1}$ – ее единственный максимальный идеал. (Действительно, если $d(\mathrm{f}) = 0$, но $\varphi(\mathrm{f}) \neq 0$, то росток f обратим в $O^c_A(x)$. Тогда $0 = d(\mathrm{f}\mathrm{f}^{-1}) = d(\mathrm{f}^{-1})\varphi(\mathrm{f})$, т.е. $d(\mathrm{f}^{-1}) = 0$.) Поэтому и $A_{m_A(x)-2}$ является ядром точечного дифференцирования и т.д. Таким образом, элементы алгебры $O_A(x)$ принадлежат пересечению ядер $m_A(x)$ точечных дифференцирований. Учитывая все это, естественно число $m_A(x)$ назвать *кратностью*, а $r_A(x)$ – *порядком приводимости* особой точки x. В частности, если $m_A(x) > 0$, то x назовем кратной особой точкой, если же $r_A(x) > 0$ ($r_A(x) = 0$), то – приводимой (неприводимой) особой точкой.

1. Примеры простых особенностей.

а) Пусть G – открытый единичный диск в $\mathbb{C}$ и $A = A(\overline{G})$ – алгебра всех тех непрерывных на $\overline{G}$ функций, которые равномерно аппроксимируются функциями, голоморфными в окрестности $\overline{G}$. Ясно, что всякая точка G есть регулярная точка спектра $S(A) = \overline{G}$. Но если рассмотреть подалгебру $A_1 = \{f \in A(\overline{G}) : f'(0) = 0\}$, то $\delta_{A_1}(0) = m_{A_1}(0) = 1$. Остальные точки G регулярны.

б) Пусть $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ – непересекающиеся диски, ξ_1 и ξ_2 – их центры. Рассмотрим равномерную алгебру $A(\overline{G}_1 \bigcup \overline{G}_2) = A(\overline{G}_1) \oplus A(\overline{G}_2)$ и ее замкнутую подалгебру

$D = \{f \in A(\overline{G}_1) \oplus A(\overline{G}_2) : f(\xi_1) = f(\xi_2)\}$. Спектр алгебры D представляет собой букет $\overline{G}_1 \bigvee_{\xi_1 \equiv \xi_2} \overline{G}_2$ двух дисков с отождествленными центрами. Если x обозначает эту отождествленную точку, то $\delta_D(x) = r_D(x) = 1$. Остальные внутренние точки $S(D)$ регулярны.

в) Пусть B – алгебра тех непрерывных функций на цилиндре $[0,1] \times \overline{G}$, для которых при всяком фиксированном $t \in [0,1]$ функция $f(t,\xi)$ голоморфна на G. Рассмотрим замкнутый идеал I, состоящий из тех $g \in B$, для которых $g(t,0) = \frac{\partial g(t,0)}{\partial \xi} = 0$, и образуем равномерную алгебру $A = I \oplus \mathbb{C}$. Спектр алгебры A получается из цилиндра отождествлением в точку отрезка $[0,1] \times \{0\}$. Если x есть указанная точка $S(A)$, то $r_A(x) = \infty$, а $m_A(x) = 1$.

2. Пусть $\overline{U}_i$ принадлежит локальной базе точки x, и $B = A_{\overline{U}_i}$. Если $\overline{V} \subset \overline{U}_i$, то, очевидно, $A_{\overline{V}} = B_{\overline{V}}$. Отсюда следует, что $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j) = \mathcal{O}_B(\overline{U}_j)$, $\mathcal{O}^c_A(\overline{U}_j) = \mathcal{O}^c_B(\overline{U}_j)$ и $\mathcal{O}_A(\overline{U}_j^*) = \mathcal{O}_B(\overline{U}_j^*)$ при всех $j \geq i$. В частности, $\delta_A(x) = \delta_B(x)$.

3. Естественно, что в окрестности регулярной точки спектра возникает эффект устранения особенности A-голоморфной функции. Так, если $r_A(x) = 0$, то согласно теореме 2.2 $\mathcal{O}_A(\overline{U}^*) = \mathcal{O}^c_A(\overline{U})$. Если же $m_A(x) = 0$, то для любой функции $f \in \mathcal{O}^c_A(\overline{U})$ найдется такая окрестность $\overline{V} \subset \overline{U}$, что $f \in \mathcal{O}_A(\overline{V})$.

4. Понятие дефекта мы определили пока только для неизолированных точек спектра. Пусть теперь x_0 – изолированная точка $S(A)$. Тогда x_0 – точка пика и, начиная с некоторого места, $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i) = \mathcal{O}^c_A(\overline{U}_i) = \mathbb{C}$, а $\mathcal{O}_A(\overline{U}_i^*) = \emptyset$. Исходя из этого, мы будем считать, что $m_A(x_0) = 0$, а $\delta_A(x_0) = r_A(x_0) = -1$.

§3. КРАТНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Кратные особые точки тесно связаны с точечными дифференцированиями специального вида. Поэтому вначале мы укажем на одно простое свойство функционалов, ядра которых образуют равномерную алгебру.

Пусть $A \subset B$ – равномерные алгебры и $\dim B/A = 1$. Тогда $A = \ker \psi$, где, как уже отмечалось, ψ – либо непрерывное дифференцирование в некоторой точке из $S(B)$ (в этом случае $S(A) = S(B)$), либо $\psi = c(\varphi_y - \varphi_z)$, где c – константа, $y, z \in S(B)$, а φ_y, φ_z – соответствующие комплексные гомоморфизмы (в этом случае $S(A)$ получается из $S(B)$ отождествлением точек y и z).

Лемма 3.1. *Для любого открытого множества $U \subset S(B)$ либо $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$, либо $\dim B_{\overline{U}}/A_{\overline{U}} = 1$. Последнее утверждение справедливо в том и только том случае, когда функционал ψ ограничен на $\overline{U}$, т.е. когда найдется такая константа $c > 0$, что $|\psi(f)| \leq c\|f\|_{\overline{U}}$ для всех $f \in B$.*

Доказательство. Обозначим через I (соответственно, через J) идеал всех тех функций из B (соответственно, A), которые обращаются в нуль на $\overline{U}$. Алгебра $B|\overline{U}$ изоморфна фактор-алгебре B/I, а алгебра $A|\overline{U}$ – фактор-алгебре A/J. Если $I \neq J$, то $B|\overline{U} = A|\overline{U}$, если $I = J$, то функционал ψ продолжается на $B|\overline{U}$, а $A|\overline{U} = \ker\psi$. Теперь, если ψ не ограничен на $\overline{U}$, то $A|\overline{U}$ всюду плотно в $B|\overline{U}$, если же ψ ограничен на $\overline{U}$, то $\dim B_{\overline{U}}/A_{\overline{U}} = 1$.

В частности, если $\psi = c(\varphi_y - \varphi_z)$, а B-выпуклое множество $\overline{U}$ не содержит y или z, то $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$. Аналогично, если ψ – непрерывное точечное дифференцирование в x, и B-выпуклое множество $\overline{U}$ не содержит x, то $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$.

Точечное дифференцирование назовем *строго локальным*, если оно ограничено на каждой окрестности точки x. Оказывается, что каждое строго локальное дифференцирование автоматически порождает кратную особую точку.

Теорема 3.1. *Пусть B – равномерная алгебра, d – непрерывное дифференцирование на B в точке x, и $A = \ker d$. Тогда*

1) $r_A(y) = r_B(y)$ для всех $y \in S(B)$,

2) $m_A(y) = m_B(y)$ для всех $y \in S(B)$, отличных от x,

3) если d не строго локально, то $m_A(x) = m_B(x)$,

4) если d строго локально, то $m_A(x) = m_B(x) + 1$.

Доказательство. Согласно лемме 3.1 для любого $y \in S(B)$ найдется такая окрестность $\overline{U}$, что $O^c_A(\overline{U}) = O^c_B(\overline{U})$ и $O_A(\overline{U}^*) = O_B(\overline{U}^*)$, и для всякого $y \neq x$ существует такая окрестность $\overline{V}$, что $O_A(\overline{V}) = O_B(\overline{V})$. Следовательно, $O_A(y) = O_B(y)$ для всех $y \neq x$, и $O^c_A(y) = O^c_B(y)$, $O^*_A(y) = O^*_B(y)$ для всех $y \in S(B)$, что доказывает утверждения 1) и 2).

Если дифференцирование d не строго локально, то найдется такая окрестность $\overline{U}$ точки x, что $A_{\overline{U}} = B_{\overline{U}}$, т.е. $O_A(x) = O_B(x)$. Пусть теперь d строго локально. Поскольку для любой функции $h \in H_B(\overline{U}_i)$ найдется такая окрестность $\overline{V}$ точки x, что $\overline{V} \subset \overline{U}_i$ и $h|\overline{V} \in B_{\overline{V}}$, то мы можем продолжить d на h, полагая $d(h) = d(h|\overline{V})$. При этом $|d(h)| \leq c\|h\|_{\overline{V}} \leq c\|h\|_{\overline{U}_i}$, и если $d(h) = 0$, то $h|\overline{V} \in A_{\overline{V}}$. Таким образом, для любого индекса i дифференцирование d непрерывно продолжается на $O_B(\overline{U}_i)$, ядром d служит алгебра $O_A(\overline{U}_i)$, и если $j \geq i$, то $d(h) = d(\rho_{ij}(h))$. Отсюда $\dim O_B(x)/O_A(x) = 1$ и $m_A(x) = m_B(x) + 1$.

Следующая теорема в некотором смысле обратна к теореме 3.1. Кроме того, она гарантирует существование такого расширения равномерной алгебры, которое понижает кратность особой точки, а дефекты близких точек оставляет неизменными.

Теорема 3.2. *Пусть A – равномерная алгебра, и x – особая точка $S(A)$ кратности 1. Тогда существуют такие открытая окрестность U точки x, равномерная алгебра B_0, содержащая A, и непрерывное строго локальное дифференцирование d_0 на B_0, отвечающее точке x, что*

1) $S(B_0) = S(A)$ и $A \subset \{f \in B_0 : d_0(f) = 0\}$,

2) $\delta_{B_0}(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$,

3) $r_{B_0}(x) = r_A(x)$ и $m_{B_0}(x) = 0$.

Доказательство. Согласно условию теоремы существует такое точечное дифференцирование d на $O_A^c(x)$, что $\ker d = O_A(x)$. Выберем в связи с этим росток $\mathrm{g} \in O_A^c(x)$ так, чтобы $d(\mathrm{g}) = 1$ и $\mathrm{g}(x) = 0$. Для этого ростка найдутся такой индекс i и функция $g \in O_A^c(\overline{U}_i)$, что $g^2, g^3 \in O_A(\overline{U}_i)$, но $\rho_{ij}(g) \notin O_A(\overline{U}_j)$ для всех $j \geq i$. Дифференцирование d естественным образом индуцирует дифференцирование $d_i = d \circ \rho_i$ на $O_A^c(\overline{U}_i)$ в точке x, но а приори не ясно – непрерывен функционал d_i или нет.

Рассмотрим равномерную алгебру $D_i = [O_A(\overline{U}_i), g]$, представляющую собой полиномиальное расширение алгебры $O_A(\overline{U}_i)$. Легко видеть, что каждый элемент множества $\ker d_i \bigcap D_i$ можно представить в виде $f_1 + gf_0$, где f_0, f_1 принадлежат $O_A(\overline{U}_i)$ причем $f_0(x) = 0$. Согласно лемме 2.3 работы [8] указанное множество замкнуто, следовательно, дифференцирование d_i непрерывно на подалгебре D_i. Более того, по лемме 3.1 d_i строго локально, так как $\rho_{ij}(g)$ не принадлежит $O_A(\overline{U}_j)$ при $j \geq i$.

Поскольку $\dim O^c_A(x)/O_A(x) = 1$, то всякая функция из $O^c_A(\overline{U}_i)$ принадлежит D_j при некотором $j \geq i$, т.е. $O^c_A(\overline{U}_i) = \bigcup\limits_{j\geq i} \rho_{ij}^{-1}(D_j)$. Но тогда по теореме Бэра о категориях найдется такой индекс $l \geq i$, что $\rho_{il}(O^c_A(\overline{U}_i)) = D_l$. В частности, композиция $d_l \circ \rho_{il} = d_0$ будет непрерывным строго локальным дифференцированием на $O^c_A(\overline{U}_i)$, отвечающим точке x.

В силу плотности $H^c_A(\overline{U}_i)$ в $O^c_A(\overline{U}_i)$ выберем функцию $h \in H^c_A(\overline{U}_i)$ так, чтобы $d_0(h) = d(\mathrm{h}) = 1$ и рассмотрим равномерную алгебру $B = [A_{\overline{U}_i}, h]$. Дифференцирование d_0 непрерывно и строго локально на B, а его ядро содержит $A_{\overline{U}_i}$. Отметим также, что по следствию 1.2 $S(B) = \overline{U}_i$. Так как $h \in H^c_A(\overline{U}_i)$, то $O^c_B(\overline{U}_j) = O^c_A(\overline{U}_j)$ и $O_B(\overline{U}_j^*) = O_A(\overline{U}_j^*)$ при $j \geq i$, т.е. $r_B(x) = r_A(x)$. Точно также $m_B(y) = m_A(y)$ и $r_B(y) = r_A(y)$ для любого $y \in U_i^*$. Покажем теперь, что $O_B(x) = O^c_A(x)$, откуда будет следовать равенство $m_B(x) = 0$. Если функция f B-голоморфна на $\overline{U}_j$, $j \geq i$, то, очевидно, $f \in H^c_A(\overline{U}_j)$. Обратно, если $\mathrm{f} \in O^c_A(x)$, то $\mathrm{f} = \mathrm{f}_0 + c\mathrm{h}$, где $\mathrm{f}_0 \in O_A(x)$. Следовательно, $\mathrm{f} \in O_B(x)$. Завершая доказательство, положим $B_0 = \{f \in C(S(A)) : f|\overline{U}_i \in B\}$.

§4. ПРИВОДИМЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Покажем сперва, что при отождествлении в точку конечного подмножества спектра возникает приводимая особая точка. На дефекте остальных точек спектра этот процесс отождествления не отражается.

Теорема 4.1. *Пусть B – равномерная алгебра, $\{y_0, z_0\} \subset S(B)$, $A = \{f \in B : f(y_0) = f(z_0)\}$, x – отождествленная точка $S(A)$. Тогда*

1) $\delta_A(y) = \delta_B(y)$ для всех $y \in S(A)$, $y \neq x$,

2) $m_A(x) = m_B(y_0) + m_B(z_0)$,

3) $r_A(x) = r_B(y_0) + r_B(z_0) + 1$.

Доказательство. Утверждение 1) сразу следует из леммы 3.1. Обращаясь к остальным утверждениям заметим, что достаточно малая окрестность $\overline{U}_i$ точки x будет представлять собой букет $\overline{V}_i \bigvee\limits_{y_0 \equiv z_0} \overline{W}_i$ непересекающихся окрестностей $\overline{V}_i$ точки y_0 и $\overline{W}_i$ точки z_0, а алгебра $A_{\overline{U}_i}$ есть подалгебра коразмерности 1 алгебры $B_{\overline{V}_i \bigcup \overline{W}_i}$. Следовательно, $H_A(\overline{U}_i)$ (соответственно, $H^c_A(\overline{U}_i)$) образует подалгебру коразмерности 1 в алгебре $H_B(\overline{V}_i \cup \overline{W}_i) = H_B(\overline{V}_i) \oplus H_B(\overline{W}_i)$ (соответственно, в $H^c_B(\overline{V}_i) \oplus H^c_B(\overline{W}_i)$). Далее, $\overline{U}_i^* = \overline{V}_i^* \bigcup \overline{W}_i^*$, откуда $H_A(\overline{U}_i^*) = H_B(\overline{V}_i^*) \oplus H_B(\overline{W}_i^*)$. Таким образом, мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
O_A(x) & \xrightarrow{m_A(x)} & O^c_A(x) & \xrightarrow{r_A(x)} & O^*_A(x) \\
1\downarrow & & 1\downarrow & & 0\downarrow \\
O_B(y_0) \oplus O_B(z_0) & \xrightarrow{m_B(y_0)+m_B(z_0)} & O^c_B(y_0) \oplus O^c_B(z_0) & \xrightarrow{r_B(y_0)+r_B(z_0)} & O^*_B(y_0) \oplus O^*_B(z_0)
\end{array}$$

где каждая стрелка есть вложение, а рядом со стрелкой указана коразмерность. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает возможность понижения порядка приводимости особой точки (ср. с теоремой 3.2).

Теорема 4.2. *Пусть A – равномерная алгебра, и x – приводимая особая точка $S(A)$ порядка 1. Тогда существуют такие открытая окрестность U точки x, равномерная алгебра B_0 и точки y_0, z_0 из $S(B_0)$, что*

1) $S(A)$ получается из $S(B_0)$ отождествлением точек y_0 и z_0 в точку x, и $A \subset \{f \in B_0 : f(y_0) = f(z_0)\}$,

2) $\delta_{B_0}(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$,

3) $r_{B_0}(y_0) = r_{B_0}(z_0) = 0$ и $m_{B_0}(y_0) + m_{B_0}(z_0) \leq m_A(x)$.

Доказательство. Если $r_A(x) = 1$, то компакт S^* состоит из двух комплексных гомоморфизмов φ_1, φ_2 и $O^c_A(x) = \ker\psi$, где $\psi = c(\varphi_1 - \varphi_2)$. Выберем окрестность $\overline{U}_i$ так, чтобы (непрерывный) функционал $\psi_i = \psi \circ \rho_i$ был нетривиален на $O_A(\overline{U}_i^*)$. Пусть точка $y_0 \in S(O_A(\overline{U}_i^*))$ соответствует гомоморфизму $\varphi_1 \circ \rho_i$, а z_0 – гомоморфизму $\varphi_2 \circ \rho_i$. По теореме 2.2 $O^c_A(\overline{U}_i) = \{f \in O_A(\overline{U}_i^*) : f(y_0) = f(z_0)\}$, и мы можем считать, что $\overline{U}_j = \overline{V}_j \bigvee_{y_0 \equiv z_0} \overline{W}_j$ для всех $j \geq i$, где $\overline{V}_j$, $\overline{W}_j$ – непересекающиеся окрестности точек y_0 и z_0. (Заметим, что ни одна из точек y_0 или z_0 не может быть изолированной. Действительно, если окрестность $\overline{V}_j$ или $\overline{W}_j$ одноточечна, то $\overline{U}_j \subset S(O_A(\overline{U}_j^*))$, откуда $O_A(\overline{U}_j^*) = O^c_A(\overline{U}_j)$, т.е. $r_A(x) = 0$.)

Обозначим через h ограниченную A-голоморфную на $\overline{U}_i^*$ функцию, равную 1 на $\overline{V}_i$ и 0 на $\overline{W}_i$, и рассмотрим равномерную алгебру $B = [A_{\overline{U}_i}, h]$. Согласно теореме 1.2 $S(B) = \overline{U}_i^* \bigcup \pi_h^{-1}(x)$, и так как каждый комплексный гомоморфизм на идемпотенте h может принимать значение 1 или 0, то $\pi_h^{-1}(x) = \{y_0, z_0\}$. Отсюда $S(B) = \overline{V}_i \bigcup \overline{W}_i$, и если $D = \ker \psi_i \cap B$, то $S(D) = \overline{U}_i$ и $A_{\overline{U}_i} \subset D$.

Любая точка $y \in U_i^*$ обладает такой окрестностью $\overline{V}$, что $\overline{V} \subset U_i^*$ и $A_{\overline{V}} = B_{\overline{V}}$, поэтому $m_A(y) = m_B(y)$ и $r_A(y) = r_B(y)$. Ясно также, что $O_D^c(\overline{U}_j) = O_A^c(\overline{U}_j)$ и $O_D(\overline{U}_j^*) = O_A(\overline{U}_j^*)$, а $O_A(\overline{U}_j) \subset O_D(\overline{U}_j)$ для всех $j \geq i$. Итак, $r_D(x) = r_A(x) = 1$, а по теореме 4.1 $r_B(y_0) = r_B(z_0) = 0$. Точно также $m_A(x) \geq m_D(x) = m_B(y_0) + m_B(z_0)$. Наконец, положим $X = (S(A) \backslash \overline{U}_i) \bigcup \overline{V}_i \bigcup \overline{W}_i$ и $B_0 = \{f \in C(X) : f | \overline{V}_i \bigcup \overline{W}_i \in B\}$. Теорема доказана.

Комбинация теорем 3.2 и 4.2 приводит к следующему результату о существовании расширения равномерной алгебры, которое осуществляет локальную нормализацию особой точки.

Следствие 4.1. *Пусть A – равномерная алгебра и x – особая точка $S(A)$. Тогда существуют такие открытая окрестность U точки x, равномерная алгебра B и регулярные точки $y_1, \ldots y_k$, $k \geq 1$, из $S(B)$, что*

1) *$S(A)$ получается из $S(B)$ отождествлением точек $y_1, \ldots y_k$ в точку x,*
2) *на алгебре B имеются такие строго локальные непрерывные дифференцирования d_n порядка $q_n \geq 0$ в точке y_n, $1 \leq n \leq k$, что*
   $A \subset \{f \in B : f(y_1) = \cdots = f(y_k), d_n(f) = 0, 1 \leq n \leq k\}$,
3) *$\delta_B(y) = \delta_A(y)$ для всех $y \in U^*$.*

Покажем теперь, что всякая неизолированная точка границы Шилова является существенно особой точкой.

Теорема 4.3. *Если x – неизолированная точка границы Шилова равномерной алгебры A, то $r_A(x) = \infty$.*

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$, $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ – фундаментальная последовательность открытых окрестностей точки x. Поскольку точки пика плотны в ∂A, мы можем выбрать в U_n точку пика x_n и ее открытую окрестность V_n так, чтобы $\overline{V}_n \subset U_n \backslash \overline{U}_{n+1}$. Для фиксированной константы c $(0 < c < 1/3)$ и точки x_n найдется такая функция $f_n \in A$, что $f_n(x_n) = 1$ и $|f_n(y)| \leq c^n$ для всех $y \in S(A) \backslash V_n$. Ясно, что функция $g = \sum\limits_1^\infty f_k$ принадлежит $H_A(S(A)^*)$. Если $y_n \in U_n \backslash \overline{V}_n$, то $y_n \to x$ и $|g(y_n)| \leq \frac{c}{1-c}$. Но и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, причем

$|g(x_n)| \geq \frac{1-2c}{1-c}$. Таким образом, $Cl(g, x)$ содержит более двух значений, а потому $r_A(x) \geq 1$. Предположим, что $r_A(x) < \infty$, и пусть $z_1, \dots z_k$ – те регулярные точки спектра алгебры B, которые согласно следствию 4.1 отождествляются в точку x. Поскольку $x \in \partial A$, то хотя бы одна из этих точек z_n должна принадлежать ∂B и по доказанному выше не может быть регулярной. Полученное противоречие завершает доказательство.

§5. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОМЕРНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА

Здесь мы покажем, что в случае одномерного аналитического множества и соответствующей алгебры голоморфных функций наше определение особой точки совпадает с обычным понятием особой точки аналитического множества.

Пусть X – одномерное неприводимое аналитическое подмножество гладкой ограниченной области в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что точка $x \in X$ называется регулярной точкой, если существует такая ее окрестность U в X, что U биголоморфно эквивалентна одномерному диску G. Всякая не регулярная точка называется особой точкой аналитического множества X. Множество всех регулярных точек открыто в X и связно, множество особых точек дискретно (подробнее см. [9]).

Обозначим через $H(\overline{X})$ совокупность всех тех функций, которые голоморфны в n-мерной окрестности компакта $\overline{X}$, а через $A = A(\overline{X})$ – замыкание $H(\overline{X})$ по sup-норме на $\overline{X}$. Известно, что спектр равномерной алгебры A совпадает с $\overline{X}$, а граница Шилова с $\overline{X} \backslash X$ (см. [10]).

Теорема 5.1. *Точка x является особой точкой аналитического множества X тогда и только тогда, когда $\delta_A(x) > 0$.*

Доказательство. Если x – регулярная точка, то найдется такая ее окрестность U ($\overline{U} \subset X$), которая биголоморфна единичному диску G комплексной плоскости. Следовательно, $A_{\overline{U}} = A(\overline{G})$ и $\delta_A(x) = \delta_{A_{\overline{U}}}(x) = 0$.

Пусть x – особая точка. Тогда x обладает окрестностью $\overline{U}$, которая не содержит других особых точек и представляет собой букет одномерных дисков $\overline{G}_1, \dots \overline{G}_r$ с отождествленными в точку x центрами $x_1 \dots x_r$, $r \geq 1$. Рассмотрим равномерную алгебру $B = A(\overline{G}_1) \oplus \dots \oplus A(\overline{G}_r)$. Согласно результатам работы

[10] существуют такие целые числа n_k, $1 \leq k \leq r$, что совокупность функций $f \in B$, для которых $f(x_1) = \cdots = f(x_r)$, а порядок нуля функции $f - f(x_k)$ не меньше n_k, содержится в $A_{\overline{U}}$. Это означает, что $A_{\overline{U}}$ есть подалгебра конечной коразмерности в B, причем все точечные дифференцирования (высших порядков) на B, в пересечении ядер которых содержится $A_{\overline{U}}$, отвечают точкам x_k и строго локальны. Но тогда согласно теоремам 3.1 и 4.1 $\delta_A(x) = \delta_{A_{\overline{U}}}(x) < \infty$.

Заметим, что в теореме 5.1 алгебра B, осуществляющая локальную нормализацию особой точки, является конечным расширением алгебры $A_{\overline{U}}$. Можно показать, что в общем случае (следствие 4.1) алгебра B является целым расширением $A_{\overline{U}}$.

ABSTRACT. The paper investigates singular points of the spectrum of a uniform algebra and proves a theorem about local normalization of singular points. It follows that the multiple singular points are generated by strictly local point derivations, while the reducible singular points are generated by mapping a finite subset of the spectrum of the initial algebra to a point.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гамелин, Равномерные алгебры, Мир, Москва, 1973.
2. C. E. Rickart, "The maximal ideal space of functions locally approximable in a function algebra", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 17, pp. 1320 – 1326, 1966.
3. J.-E. Bjork, "Extensions of the maximal ideal space of a function algebra", Pacif. J. Math., vol. 27, pp. 453 – 462, 1968.
4. Н. Стинрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, ГИФХМ, Москва, 1958.
5. H. L. Royden, "Function algebras", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, pp. 281 – 289, 1963.
6. Е. А. Горин, "Подалгебры конечной коразмерности", Мат. заметки, т. 6, стр. 321 – 328, 1969.
7. Б. Т. Батикян, "Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай)", Известия АН Армении, Математика, т. 12, № 6, стр. 341 – 344, 1977.
8. С. А. Григорян, "Полиномиальные расширения коммутативных банаховых алгебр", Известия АН Армении, Математика, т. 20, № 2, стр. 112 – 130, 1985.
9. Е. М. Чирка, Комплексные аналитические множества, Наука, Москва, 1985.
10. H. Rossi, "Algebras of holomorphic functions on one-dimensional varieties", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 100, pp. 439 – 458, 1961.

8 апреля 1997

Институт математики
НАН Армении