ЭЛЕМЕНТАРНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. Лух, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Пусть $\mathcal{O} \neq \emptyset$ – произвольное открытое множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, обозначим через $H(\mathcal{O})$ семейство всех голоморфных на $\mathcal{O}$ функций. Мы предполагаем, что $H(\mathcal{O})$ наделено компактно–открытой топологией; это позволяет считать $H(\mathcal{O})$ полным метрическим пространством. Функция $\phi \in H(\mathcal{O})$ называется T–универсальной на $\mathcal{O}$ ("универсальной относительно сдвигов"), если она удовлетворяет следующему условию : для всех компактных множеств $K \subset \mathbf{C}$ со связным дополнением, для всех функций f, которые непрерывны на K и голоморфны на его внутренности K°, и для всех $\zeta \in \partial\mathcal{O}$ существует последовательность $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathbf{C}^2$ такая, что

$$t_n(z) := a_n z + b_n \in \mathcal{O} \quad \text{для всех} \quad z \in K \quad \text{и всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\{t_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{сходится к} \quad \zeta \quad \text{для всех} \quad z \in K,$$

$$\{\phi \circ t_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{сходится к} \quad f(z) \quad \text{равномерно на} \quad K.$$

Множество всех функций, которые T–универсальны на $\mathcal{O}$, обозначим через $T(\mathcal{O})$.

Было доказано, что $T(\mathcal{O}) \neq \emptyset$; случай, когда $\mathcal{O}$ – односвязная область, смотрите работу Луха [4], а случай, когда $\mathcal{O}$ – открытое множество с односвязными

Исследовательская работа второго автора была поддержана Немецкой Академической Службой Обмена (DAAD) и Трирским университетом.

компонентами, смотрите работы Луха [5], [7] и Луха, Мартиросяна, Мюллера [9]. В последней статье доказано также, что T–универсальную на $\mathcal{O}$ функцию можно выбрать имеющей степенной ряд с определенными пропусками. Для ознакомления с краткой историей универсальных функций мы отсылаем к работам [5] и [7], где даны также дальнейшие библиографические ссылки.

Проблема существования T–универсальных функций на произвольных открытых множествах впервые была исследована Гроссе–Эрдманом [3]; при этом для доказательства его основного результата (теорема 3.3.11) были использованы нестандартные методы функционального анализа.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы дать элементарное и прямое доказательство (используя только стандартные методы комплексного анализа) следующего результата.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – произвольное непустое открытое множество. Тогда $T(\mathcal{O})$ есть плотное подмножество в $H(\mathcal{O})$.*

Доказательство. 1. Предположим сперва, что $\mathcal{O} = \Omega$ является произвольной областью и покажем, что $T(\Omega) \neq \emptyset$. Это очевидно, если $\Omega = \mathbb{C}$ (см., например, [8], где доказано даже намного большее); поэтому можем предположить, что $\Omega \neq \mathbb{C}$ и что $\mathbb{D}: = \{z\colon |z| < 1\} \subset \Omega$. Существует последовательность $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ компактных множеств со свойствами

i) $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

ii) Для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset K_{n_0}$.

iii) Каждая компонента K_n^c пересекается с некоторой компонентой для $\overline{\Omega^c}$

(краткое доказательство см., например, в [12]). Рассмотрим произвольную последовательность $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ точек $\zeta_k \in \partial\Omega$, которая плотна на $\partial\Omega$, и для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем последовательность $\{z_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $z_{n,k} \in \Omega \setminus K_n$ $(n = 1, 2, ...)$ и $z_{n,k} \to \zeta_k$ при $n \to \infty$.

а) Построим индукцией последовательность $\{n_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел. Пусть $n_1 = 1$ и предположим, что n_ν уже определено при $\nu \geq 1$. Тогда выберем

$n_{\nu+1} \in \mathbb{N}$ так, чтобы $n_{\nu+1} > n_\nu$ и

$$z_{n_\nu,1}, \quad z_{n_\nu,2}, \ldots, z_{n_\nu,n_\nu} \in K^\circ_{n_{\nu+1}} \setminus K_{n_\nu}.$$

Пусть $\{r_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ – последовательность вещественных чисел $r_\nu \in (0, 1/\nu)$, которые настолько малы, что замкнутые круги

$$D_{n_\nu,\mu} := \{z\colon |z - z_{n_\nu,\mu}| \le r_\nu\}, \qquad \mu = 1, \ldots, n_\nu$$

попарно не пересекаются (если центры $z_{n_\nu,\mu}$ различны) и выполняется включение $D_{n_\nu,\mu} \subset K^\circ_{n_{\nu+1}} \setminus K_{n_\nu}$.

b) Пусть $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – нумерация всех рациональных функций $R_n = P_n/Q_n$ с полюсами в Ω^c, причем полиномы P_n и Q_n имеют коэффициенты, вещественные и мнимые части которых рациональны. Построим индукцией последовательность $\{S_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ рациональных функций. Предположим, что $S_0 \equiv 0, \ldots, S_{\nu-1}$ уже определены. По теореме Рунге о рациональной аппроксимации существует рациональная функция S_ν со свойствами

$$\max_{K_{n_\nu}} |S_\nu(\omega) - S_{\nu-1}(\omega)| < \frac{1}{\nu^2}, \tag{1}$$

$$\max_{D_{n_\nu,\mu}} \left| S_\nu(\omega) - R_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu}\cdot(\omega - z_{n_\nu,\mu})\right)\right| < \frac{1}{\nu}, \qquad \mu = 1, \ldots, n_\nu. \tag{2}$$

Полюсы функций S_ν лежат вне $K_{n_\nu} \bigcup \bigcup_{\mu=1}^{n_\nu} D_{n_\nu,\mu}$ и согласно методу перемещения полюсов можем предположить, что полюсы S_ν лежат в Ω^c.

c) Пусть функция ϕ определена рядом

$$\phi(\omega) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \{S_{n_\nu}(\omega) - S_{n_\nu-1}(\omega)\}.$$

Тогда из (1) и свойств последовательности $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ вытекает, что ϕ голоморфна в Ω. Из (1) и (2) кратким подсчетом получаем

$$\max_{D_{n_\nu,\mu}} \left| \phi(\omega) - R_\nu\left(\frac{\nu}{(\nu+1)\,r_\nu}\cdot(\omega - z_{n_\nu,\mu})\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \max_{K_{n_\lambda}} |S_\nu(\omega) - S_{\nu-1}(\omega)| + \frac{1}{\nu} < \frac{2}{\nu}.$$

Отсюда следует, что при $\nu = 1, 2, \ldots$ и $\mu = 1, 2, \ldots, n_\nu$

$$\max_{|z| \le \nu/(\nu+1)} \left| \phi\left(\frac{\nu+1}{\nu} \cdot r_\nu \cdot z + z_{n_\nu,\mu}\right) - R_\nu(z) \right| < \frac{2}{\nu}. \tag{3}$$

d) Пусть даны произвольное компактное множество K со связным дополнением, функция f, которая непрерывна на K и голоморфна на K°, и граничная точка $\zeta \in \partial\Omega$. Выберем число $\rho \geq 1$ так, чтобы $K_\rho = \{z\colon \rho z \in K\} \subset \mathbf{D}$. По теореме Мергеляна [11] найдется подпоследовательность $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{N}$, для которой

$$\max_{K_\rho} |f(\rho z) - R_{\nu_k}(z)| < \frac{1}{k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Для всех достаточно больших k имеем $K_\rho \subset \left\{z\colon |z| \le \dfrac{\nu_k}{\nu_k+1}\right\}$, так что из (3) и (4) следует, что

$$\max_K \left| \phi\left(\frac{\nu_k+1}{\nu_k} \cdot r_{\nu_k} \cdot \frac{z}{\rho} + z_{n_{\nu_k},\mu}\right) - f(z) \right| < \frac{1}{k} + \frac{2}{\nu_k}. \tag{5}$$

Множество точек $z_{n_{\nu_k},\mu}$ ($k = 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, \ldots, n_{\nu_k}$) имеет ζ своей предельной точкой. Поэтому существуют последовательности $\{k_s\}$ и $\{\mu_s\}$ такие, что $1 \le \le \mu_s \le n_{\nu_{k_s}}$ и $z_{n_{\nu_{k_s}},\mu_s} \to \zeta$ при $s \to \infty$. Определяя теперь

$$a_s := \frac{\nu_{k_s}+1}{\nu_{k_s}} \cdot r_{\nu_{k_s}} \cdot \frac{1}{\rho}, \qquad b_s := z_{n_{\nu_{k_s}},\mu_s},$$

мы получим $a_s \to 0$ и $b_s \to \zeta$ при $s \to \infty$, а в силу (5) последовательность $\{\phi(a_s z + b_s)\}_{s\in\mathbb{N}}$ сходится к $f(z)$ равномерно на K. Следовательно, $\phi \in T(\Omega)$.

2. Пусть теперь $\mathcal{O} \subset \mathbf{C}$, $\mathcal{O} \neq \mathbf{C}$ является произвольным непустым открытым множеством. Тогда существуют конечное или счетное множество $I = \{1, 2, \ldots\}$ и попарно не пересекающиеся области Ω_i ($i \in I$) такие, что $\mathcal{O} = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Согласно шагу 1 для любого $i \in I$ существует функция ϕ_i, T–универсальная на Ω_i. Определим на $\mathcal{O}$ функцию ϕ следующим образом : $\phi(z) := \phi_i(z)$ при $z \in \Omega_i$.

Проверка T-универсальности на $\mathcal{O}$ функции ϕ есть простое упражнение (заметим, что граничная точка $\zeta \in \partial\Omega$ может быть $\zeta = \infty$ или $\zeta \notin \partial\Omega_i$ при всех $i \in I$).

3. Из теоремы Рунге о рациональной аппроксимации легко следует, что $T(\mathcal{O})$ является плотным подмножеством в $H(\mathcal{O})$. Для доказательства отсылаем к работе [5], гл. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Равномерные приближения на комплексной плоскости многочленами с пропусками", ДАН СССР, т. 235, стр. 249 — 252, 1977.
2. D. Gaier, Vorlesungen über Approximation in Komplexen, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1980.
3. K.–G. Große–Erdmann, Holomorphe Monster und universelle Funktionen, Mitt. Math. Sem. Giessen, vol. 176, 1987.
4. W. Luh, "Über cluster sets analytischer Funktionen", Acta Math. Acad. Sci. Hungar., vol. 33, № 1 – 2, pp. 137 — 142, 1979.
5. W. Luh, "Holomorphic monsters", Journ., Approx. Theory, vol. 53, pp. 128 — 144, 1988.
6. W. Luh. "Entire functions with various universal properties", Complex Variables, vol. 31, pp. 87 — 96, 1996.
7. W. Luh, "Multiply universal holomorphic functions", J. Approx. Theory, vol. 89, pp. 135 — 155, 1997.
8. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "Universal entire functions with gap power series", Indagationes Math., № 9, 1998, pp. 529 — 536.
9. W. Luh, V. A. Martirosian, J. Müller, "T- universal functions with lacunary power series", Acta Sci. Math. Szeged, vol. 64, pp. 67 — 79, 1998.
10. В. А. Мартиросян, "О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. Сборник, т. 120, стр. 451 — 472, 1983.
11. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", УМН, т. 7, стр. 31 — 122, 1952.
12. W. Rudin, Real and Complex Analysis (3rd ed.), Mc Graw–Hill, New York, 1987.

14 ноября 1997

Трирский университет (Германия),

Ереванский государственный университет