КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Н. Е. Товмасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

В работе рассматриваются краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений, возникающие при изучении полета крылатых летательных аппаратов по прямой, параллельной земной поверхности. Граничные данные задаются на границах интервала, левый конец которого фиксирован, а правый подлежит определению.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при достаточно общих предположениях задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений в малой окрестности начальной точки имеет единственное решение [1] – [4]. В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для систем нелинейных дифференциальных уравнений. Граничные данные задаются на границах области определения решения, причем левый конец области определения фиксирован, а правый подлежит определению.

В конце работы полученные результаты используются для исследования полета крылатых летательных аппаратов по прямой, параллельной земной поверхности, когда на летательный аппарат одновременно действуют сила тяжести, реактивная сила, сила сопротивления и подъемная сила крыльев. Вторым концом области определения решения полученной задачи является время полета летательного аппарата при заданном расходе топлива. Доказывается возможность полета крылатых аппаратов по указанной прямой и определяются основные параметры полета.

§1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В интервале $(0, t_0)$ рассмотрим следующую задачу :

$$m(t)\frac{dV}{dt} = k_1F(t) - f_1(V), \tag{1}$$

$$-k_2\frac{dm}{dt} = F(t), \tag{2}$$

$$f_2(V) + k_3F(t) = m(t)k_4, \tag{3}$$

$$m(0) = M_0, \quad V(0) = V_0, \tag{4}$$

$$m(t_0) = m_0, \tag{5}$$

где $f_1(V)$ и $f_2(V)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции при $V \geq 0$; k_1, k_2, k_3, k_4, m_0 и V_0 – заданные положительные постоянные, $t_0 > 0$ – искомая положительная постоянная, $m(t)$, $F(t)$ и $V(t)$ – искомые функции в интервале $(0, t_0)$, причем

$$0 < m_0 < M_0, \quad f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2(V_0) < k_4M_0, \tag{6}$$

$$f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0 \quad \text{при} \quad V > 0, \tag{7}$$

$$f_1(V) \to \infty, \quad f_2(V) \to \infty \quad \text{при} \quad V \to \infty.$$

В этом параграфе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача (1) – (5) имеет единственное решение.*

Теорема 2. *Решение задачи (1) – (5) удовлетворяст следующим неравенствам :*

$$V(t) > 0, \quad f_2(V) \leq k_4M_0, \quad 0 < F(t) \leq \frac{M_0k_4}{k_3}, \quad m_0 \leq M(t) \leq M_0, \tag{8}$$

$$0 < t_0 \leq \frac{2k_2k_3(l_0 - 1)}{k_4} + \frac{M_0}{f_1(c_0)}[V_0 + k_1k_2(\lambda_0 - 1)], \tag{9}$$

где

$$\lambda_0 = \frac{M_0}{m_0}, \quad c_0 > 0, f_2(c_0) = \frac{m_0k_4}{2}.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 установим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Если $F(t)$, $V(t)$ и $m(t)$ – решение задачи (1) – (4) в интервале $0 < t < t_0$ и $m(t)$ удовлетворяет условию*

$$m_0 \leq m(t) \leq M_0 \quad при \quad 0 \leq t \leq t_0, \tag{10}$$

то $F(t) > 0$, $V(t) > 0$ при $0 < t < t_0$ и t_0 удовлетворяет неравенству (9).

Доказательство. Пусть τ – наименьшее число, где $V(\tau) = 0$, $0 < \tau < t_0$. Так как $V(0) = V_0 > 0$, то $V(t) > 0$ при $0 < t < \tau$. Поэтому

$$V'(\tau) \leq 0. \tag{11}$$

Подставляя $t = \tau$ в (3) и имея в виду равенство $f_1(0) = 0$ и неравенство (10), получим

$$F(\tau) \geq \frac{m_0 k_4}{k_3}. \tag{12}$$

Подставляя $t = \tau$ в (1), получим

$$m(\tau)V'(\tau) = F(\tau)k_1. \tag{13}$$

Из (10), (12) и (13) получим $V'(\tau) > 0$. Это противоречит условию (11). Это означает, что $V(t) > 0$ при $0 < t < t_0$.

Теперь докажем, что $F(t) > 0$ при $0 < t < t_0$. Из условия $f_2(V_0) < M_0 k_4$ и равенства (3) при $t = 0$ следует, что $F(0) > 0$. Пусть $F(t) = 0$ в некоторой точке $t \in (0, t_0)$. Тогда, аналогично (11) покажем, что существует точка $\tau \in (0, t_0)$, где

$$F(\tau) = 0, \quad F'(\tau) \leq 0. \tag{14}$$

Подставляя в (2) $t = \tau$, получаем $m'(\tau) = 0$. Дифференцируя обе части (3) по t и подставляя $t = \tau$, получим

$$V'(\tau)f_2'(V(\tau)) + F'(\tau)k_3 = 0. \tag{15}$$

Так как $V(\tau) > 0$, то из условия (7) следует, что $f_2'(V(\tau)) > 0$. Поэтому, из (14) и (15) имеем

$$V'(\tau) \geq 0. \tag{16}$$

Подставляя $t = \tau$ в (1) и имея в виду условие $F(\tau) = 0$, получим

$$m(\tau)V'(\tau) = -f_1(V(\tau)). \tag{17}$$

Так как $f_1(0) = 0$ и $f'(V) > 0$ при $V > 0$, то $f_1(V) > 0$ при $V > 0$. Поэтому, из (17) следует, что $V'(\tau) < 0$, что противоречит условию (16). Это означаст, что $F(\tau)$ не обращается в нуль в интервале $(0, t_0)$. Но так как $F(0) > 0$, то $F(t) > 0$ при $0 \leq t < t_0$. Теперь докажем неравенство (9). Интегрируя (2) от 0 до $t \in (0, t_0)$, получим

$$k_2(M_0 - m(t)) = \int_0^t F(u)\,du.$$

Отсюда и из неравенства (10) имеем

$$\int_0^t F(u)\,du \leq k_2(M_0 - m_0), \quad t \in (0, t_0). \tag{18}$$

Так как $F(t) > 0$, то из неравенства (18) следует, что левая часть имеет предел при $t \to t_0$. Переходя к пределу при $t \to t_0$, получим

$$\int_0^{t_0} F(t)\,dt \leq k_2(M_0 - m_0). \tag{19}$$

Пусть ω и Ω – множества точек в интервале $(0, t_0)$, удовлетворяющие условиям

$$F(t) > \frac{m_0 k_4}{2k_3} \quad \text{при} \quad t \in \omega, \tag{20}$$

$$F(t) \leq \frac{m_0 k_4}{2k_3} \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{21}$$

Обозначим через ω_0 и Ω_0 лебегову меру множеств ω и Ω, соответственно, $0 \leq \omega_0 \leq t_0$, $\Omega_0 = t_0 - \omega_0$. Ясно, что

$$\int_0^{t_0} F(t)\,dt \geq \int_\omega F(t)\,dt \geq \omega_0 \frac{m_0 k_4}{2k_3}. \tag{22}$$

Из (19) и (22) получим неравенство

$$\omega_0 \leq \frac{2k_2 k_3 (M_0 - m_0)}{k_4 m_0}. \tag{23}$$

Из неравенств (10),(21) и равенства (3) имеем

$$f_2(V(t)) \geq \frac{m_0 k_4}{2} \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{24}$$

Разделив обе части (1) на $m(t)$, получим

$$\frac{f_1(V(\tau))}{m(t)} = \frac{k_1 F(t)}{m(t)} - V'(t).$$

Интегрируя обе части, получим

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau = k_1 \int_0^t \frac{F(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau - V(t) + V(0). \tag{25}$$

Так как $V(t) > 0$ и $F(t) > 0$ при $t \in (0, t_0)$, то из (10) и (25) имеем

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau \le \frac{k_1}{m_0} \int_0^{t_0} F(\tau)\,d\tau + V(0).$$

Отсюда и из (19) следует

$$\int_0^t \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau \le \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0) + V(0), \quad t \in (0, t_0). \tag{26}$$

Поскольку $V(\tau) > 0$, $f_1(V(\tau)) > 0$ и $m(\tau) > 0$, то из неравенства (26) следует, что левая часть имеет предел при $t \to t_0$, и этот предел удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{t_0} \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau \le V_0 + \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0). \tag{27}$$

Пусть c_0 – положительное решение уравнения

$$f_2(c_0) = \frac{m_0 k_4}{2}. \tag{28}$$

Так как $f_1(V)$ и $f_2(V)$ – возрастающие функции, то из (24) и (28) следует, что $V(t) \ge c_0$ при $t \in \Omega$,

$$f_1(V(t)) \ge f_1(c_0) \quad \text{при} \quad t \in \Omega. \tag{29}$$

Из (10) и (29) имеем

$$\int_0^{t_0} \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau \ge \int_\Omega \frac{f_1(V(\tau))}{m(\tau)}\,d\tau \ge \frac{f_1(c_0)}{M_0}\Omega_0. \tag{30}$$

Из неравенств (27) и (30) имеем

$$\Omega_0 \le \frac{M_0}{f_1(c_0)}\left[V_0 + \frac{k_1 k_2}{m_0}(M_0 - m_0)\right]. \tag{31}$$

Из (23) и (31) получим неравенство (9). Лемма 1 доказана.

Доказательства теорем 1 и 2. Уравнение (3) можно записать в виде

$$F(t)=\frac{m(t)k_4}{k_3}-\frac{1}{k_3}f_2(V). \tag{32}$$

Подставляя $F(t)$ из (32) в (1) и (2), получим

$$\frac{dV}{dt}=\frac{k_1k_4}{k_3}-\frac{k_1f_2(V)}{k_3m(t)}-\frac{f_1(V)}{m(t)}, \tag{33}$$

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{k_2k_3}[m(t)k_4-f_2(V)]. \tag{34}$$

Известно, что задача (33), (34), (4) имеет решение в некоторой достаточно малой окрестности $(0,\varepsilon)$, где функцию $F(t)$ можно найти из соотношения (32). Так как $F(t)>0$, то из (2) следует, что $m(t)$ – убывающая функция в этой окрестности и $m_0<m(t)<M_0$ при $t\in(0,\varepsilon)$. Пусть $(0,t_0)$ – максимальная окрестность, где существует решение задачи (1) – (4), удовлетворяющее неравенству

$$m_0<m(t)<M_0,\quad t\in(0,t_0). \tag{35}$$

Согласно лемме 1 интервал $(0,t_0)$ ограничен. Так как $m(t)$ – убывающая функция в $(0,t_0)$ и удовлетворяет неравенству (35), то существует предел $m(t)$ при $t\to t_0$. Этот предел обозначим через $m(t_0)$. Ясно, что $m_0\le m(t_0)<M_0$. Покажем, что $m(t_0)=m_0$.

Согласно лемме 1 $V(t)>0$ и $F(t)>0$ в $(0,t_0)$. Следовательно, $f_2(V)$ также положительна. Поэтому, из (3) и (35) имеем

$$f_2(V)\le M_0k_4,\quad k_3F(t)\le M_0k_4.$$

Следовательно

$$0\le V\le c_1,\quad F(t)\le\frac{M_0k_4}{k_3},\quad 0\le t<t_0, \tag{36}$$

где c_1 – положительное решение уравнения $f_2(c_1)=M_0k_4$, которое имеет решение в силу свойств (7). Из неравенств (35) и (36) следует, что левая часть (33) ограничена в интервале $(0,t_0)$. Это означает, что $V'(t)$ также ограничена в этом интервалеів. Поэтому существует предел $V(t)$ при $t\to t_0$, который обозначим через $V(t_0)$. Следовательно, из (32) - (34) вытекает, что $F(t)$, $m(t)$ и $V(t)$ –

непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0, t_0]$. Аналогично лемме 1 мы можем показать, что $V(t_0) > 0$ и $F(t_0) > 0$. Пусть $m(t_0) \neq m_0$. Тогда $m_0 < m(t) < M_0$. Обозначим $V(t_0) = V_1$, $m(t_0) = m_1$. В интервале $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (33), (34) с граничными условиями

$$V(t_0) = V_1, \quad m(t_0) = m_1. \tag{37}$$

Как известно при достаточно малом ε эта задача имеет решение. Так как $m_0 < m(t_0) < M_0$, то за счет малости ε можно обеспечить справедливость неравенства $m_0 < m(t) < M_0$ при $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Подставляя решение задачи (33), (34), (37) в (32), получим $F(t)$. Таким образом, в интервале $(0, t_0 + \varepsilon)$ существует решение задачи (1) – (4), удовлетворяющее неравенству (35). Но это невозможно, так как $(0, t_0)$ – максимальная окрестность, где существует такое решение. Это означает, что $m(t_0) = m_0$. Теорема 1 доказана.

Поскольку $F(t) > 0$ при $0 \leq t \leq t_0$, то из (2), (4) и (5) следует, что $m(t)$ – убывающая функция и справедливы неравенства (35). Поэтому из леммы 1 следует оценка (9). Оценки (8) совпадают с оценками (36). Теорема 2 доказана.

§2. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В этом параграфе мы сведем задачу (1) – (5) со свободной границей к задаче Коши для некоторого нелинейного дифференциального уравнения в интервале $(0, M_0 - m_0)$ и докажем существование и единственность решения этой задачи.

Пусть $V(t)$, $F(t)$, $m(t)$ и t_0 – решения задачи (1) – (5). Так как $m(t)$ – непрерывно дифференцируемая убывающая функция на отрезке $[0, t_0]$, то в задаче (1) – (5) в качестве независимого переменного можно брать m, а V, F и t считать функциями от m. Сделаем замену переменной

$$m = M_0 - x. \tag{38}$$

Тогда имеем

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\frac{dt}{dx}}, \tag{39}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dt}{dx}}. \tag{40}$$

Учитывая (38) – (40), задачу (1) – (5) запишем в виде

$$(M_0 - x)\frac{dV}{dx} = (k_1 F - f_1(V))\frac{dt}{dx}, \quad 0 < x < M_0, \tag{41}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{k_2}{F}, \quad 0 < x < M_0, \tag{42}$$

$$f_2(V) + k_3 F = (M_0 - x)k_4, \quad 0 < x < M_0, \tag{43}$$

$$t = 0, \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad V = V_0, \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{44}$$

$$t = t_0, \quad \text{при} \quad x = M_0 - m_0. \tag{45}$$

В задаче (41) – (45) искомыми являются зависящие от x функции V, F и t, а t_0 – значение t при $x = M_0 - m_0$. Из (43) имеем

$$F = \frac{1}{k_3}[(M_0 - x)k_4 - f_2(V)], \quad 0 < x < M_0 - m_0. \tag{46}$$

Подставляя F из (46) в (42), получим

$$\frac{dt}{dx} = \frac{k_2 k_3}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}, \quad 0 < x < M_0 - m_0. \tag{47}$$

Подставляя F и $\frac{dt}{dx}$ из (46) и (47) в (41), получим

$$\frac{dV}{dx} = \Phi(x, V), \quad 0 < x < M_0 - m_0, \tag{48}$$

где

$$\Phi(x, V) = \frac{1}{M_0 - x}\left[k_1 k_2 - \frac{k_2 k_3 f_1(V)}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}\right].$$

Граничное условие (44) можно записать в виде

$$V(0) = V_0. \tag{49}$$

Отметим, что V_0 – заданное положительное число, удовлетворяющее условию $f_2(V_0) < k_4 M_0$. Из (44) и (47) имеем

$$t = \Psi(x) = \int_0^x \frac{k_2 k_3\, dx}{(M_0 - x)k_4 - f_2(V)}, \quad 0 \leq x \leq M_0 - m_0, \tag{50}$$

где $V(x)$ – решение задачи Коши (48), (49). Подставляя в (50) $x = M_0 - m_0$, получим $t_0 = \Psi(M_0 - m_0)$. Таким образом, задачу (1) – (5) мы свели к задаче Коши (48), (49) в интервале $0 < x < M_0 - m_0$.

В §1 мы показали, что решение задачи (1) – (4) удовлетворяет условиям : $V > 0$ и $F > 0$, $m_0 \le m \le M_0$ при $0 \le t \le t_0$. Поэтому, из (46) и граничных условий (44) и (45) следует, что

$$V > 0, \quad (M_0 - x)k_4 - f_2'(V) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le M_0 - m_0. \tag{51}$$

Таким образом, из эквивалентности задачи (1) – (5) и (48), (49) и теоремы 1 следует, что задача Коши (48), (49) имеет единственное решение в интервале $0 < x < M_0 - m_0$, удовлетворяющее условиям (51).

§3. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$V'(t) = F(t, V), \quad t > 0, \tag{52}$$

$$V(0) = V_0, \tag{53}$$

где V_0 – заданная положительная постоянная, $F(t, V)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция по t при $t \ge 0$, $V \ge 0$, причем

$$F(t, 0) > 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \qquad F(t, V) \le g(t) \quad \text{при} \quad t \ge 0,\ V \ge 0, \tag{54}$$

где $g(t)$ – некоторая непрерывная функция.

Теорема 3. *Задача Коши (52), (53) имеет единственное решение на полуоси* $t > 0$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому некоторые детали мы опускаем. Единственность решения задачи (52), (53) доказана в книге [1]. Также доказано существование решения этой задачи в малой окрестности точки $t = 0$. Здесь мы докажем существование решения на полуоси $t > 0$.

Пусть $V(t)$ – решение задачи (52), (53) в интервале $(0, t_0)$. Тогда $V(t) > 0$ при $0 \leq t \leq t_0$. Действительно, в противном случае существует точка $\tau \in (0, t_0)$, где имеют место условия (см. условия (14))

$$V(\tau) = 0, \quad V'(\tau) \leq 0. \tag{55}$$

Подставляя в (52) $t = \tau$, получаем $V'(\tau) = F(\tau, 0) > 0$, что противоречит условию (55).

Пусть $(0, t_0)$ – максимальный интервал, где задача (52), (53) имеет решение. Докажем, что $t_0 = \infty$. Так как в окрестности точки 0 существует решение задачи (52), (53), то $t_0 > 0$. Как показано выше, $V(t) > 0$ при $0 \leq t < t_0$. Интегрируя обе части (52) по t, получим

$$V(t) = V_0 + \int_0^t F(\tau, V)\, d\tau, \quad t \in (0, t_0).$$

Отсюда и из неравенства (54) имеем

$$0 < V(t) \leq V_0 + \int_0^{t_0} g(\tau)\, d\tau, \quad t \in (0, t_0).$$

Последнее неравенство указывает на то, что левая часть (52) ограничена в интервале $(0, t_0)$. Далее доказательство существования решения совпадает с доказательством теоремы 1. Теорема 3 доказана.

§4. ДВИЖЕНИЕ КРЫЛАТЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим движение летательного аппарата параллельно земной поверхности. Мы будем предполагать, что движение летательного аппарата управляется при помощи реактивной силы. Мы также будем применять полученные результаты для определения реактивной силы, дальности полета, времени полета, скорости летательного аппарата и т.д. Исследование этих вопросов, как правило, приводит к обратным задачм динамики, одной из которых является задача Ньютона об определении силы, под действием которой планеты движутся вокруг Солнца [6]. Задача Ньютона вызвала в дальнейшем постановку задачи Бертрана об определении силы, под действием которой материальная точка движется по конечному сечению [7]. Следующими фундаментальными задачами в этом направлении являются задачи Суслова [8], Мещерского [9], Чаплыгина–Горячева [10], [11], Пуанкаре–Картана [12] и других.

Общие подходы к решению таких задач приведены в монографии [5]. Однако в любом конкретном случае необходимо провести дополнительные исследования для доказательства возможности движения летательного аппарата по заданной траектории и определения основных параметров полета. Здесь мы исследуем возможности полета крылатых летательных аппаратов по прямой, когда на них одновременно действуют сила тяжести $m(t)\bar{g}$, реактивная сила $\bar{F}_R$, сила сопротивления воздуха $\bar{F}_c$ и подъемная сила крыльев F_l, где $m(t)$ – масса аппарата в данный момент t, а $g = 9.8\dfrac{m}{\text{сек}^2}$ – ускорение силы тяжести.

Пусть XOY - плоскость, где положительное направление оси x совпадает с направлением движения летательного аппарата, а положительное направление оси y направлено вверх от земной поверхности. Летательный аппарат джижется от точки $x = 0$. Пусть направление силы сопротивления противоположно направлению движения летательного аппарата, подъемная сила сонаправлена с положительным направлением оси y, реактивная сила находится в плоскости XOY и составляет с положительным направлением оси x угол $\alpha \in (0, \pi/2)$, а вектор $\bar{g}$ направлен вертикально вниз к земной поверхности. Как известно, величина реактивной силы определяется формулой (см. [9])

$$F_R = -k\frac{dm(t)}{dt}, \tag{56}$$

где $\dfrac{dm}{dt}$ – скорость уменьшения массы летательного аппарата во времени из-за расхода топлива, k – скорость истечения продуктов горения топлива относитевльно аппарата. Сила сопротивления и подъемная сила – непрерывно дифференцирумеые возрастающие функции от скорости V

$$F_c = f_1(V), \quad F_l = f_2(V), \tag{57}$$

удовлетворяющие условиям

$$f_1(0) = f_2(0) = 0, \quad f_1'(V) > 0, \quad f_2'(V) > 0, \quad \text{при} \quad V > 0,$$

$$f_1(V) \to \infty, \quad f_2(V) \to \infty \quad \text{при} \quad V \to \infty.$$

Движение летательного аппарата с переменной массой описывается известным уравнением Мещерского ([9])

$$m(t)\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m(t)\vec{g} + \vec{F}_R + \vec{F}_c + \vec{F}_l, \tag{58}$$

где $\vec{r} = \vec{Ox}$ – радиус-вектор центра инерции аппарата. Так как летательный аппарат движется по оси x, то проекция силы $m(t)\vec{g} + \vec{F}_R + \vec{F}_c + \vec{F}_l$ на ось y равна нулю, т.е.

$$-m(t)g + F_R \sin\alpha + F_l = 0. \tag{59}$$

Учитывая (59), уравнение (58) запишем в виде

$$m(t)\frac{d^2x}{dt^2} = F_R\cos\alpha - F_l. \tag{60}$$

Известно, что $\dfrac{dx}{dt} = V$ – скорость аппарата. Учитывая формулу (57), уравнения (59) и (60) запишем в виде

$$F_R \sin\alpha + f_2(V) = m(t)g, \tag{61}$$

$$m(t)\frac{dV}{dt} = F_R\cos\alpha - F_1(V). \tag{62}$$

Пусть M_0 – начальная масса летательного аппарата (с топливом), m_0 – масса аппарата в конце пути, $M_0 - m_0$ – масса топлива, V_0 – начальная скорость аппарата. Мы будем считать, что $F_R > 0$, поэтому из (62) при $t = 0$ получим $f_2(V_0) < M_0 g$. Граничные условия движения летательного аппарата примут вид

$$x(0) = 0, \quad V(0) = V_0, \quad m(0) = M_0, \quad m(t_0) = m_0, \tag{63}$$

где t_0 – время полета аппарата при расходе топлива с массой $M_0 - m_0$. Величину t_0 также необходимо определить.

Таким образом, для определения m, F_R, V и t_0 мы получили задачу (56), (61) – (63). В §1 мы показали, что эта задача имеет единственное решение. В §§1, 2 мы указали приближенные методы решения этой задачи. Пусть $m(t)$, $F_R(t)$, $V(t)$ и t_0 – решение указанной задачи. Тогда из граничного условия $x(0) = 0$ имеем

$$x(t) = \int_0^t V(\tau)\,d\tau, \quad x_0 = \int_0^{t_0} V(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 – дальность пути летательного аппарата при расходе топлива с массой $M_0 - m_0$.

ABSTRACT. The paper considers boundary value problems for systems of non-linear differential equations, that arise in the study of the flight of winged aircraft along a line parallel to Earth's surface. The boundary conditions are imposed on the ends of an interval, whose left endpoint is fixed, while the right endpoint is subject to calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1970.
2. Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, М., ИЛ, 1962.
3. Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Мир, 1970.
4. В. И. Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.
5. А. С. Галиуллин, Методы решения обратных задач динамики, М., Наука, 1986.
6. I. Newton, Mathematical Principles of Natural Philosophy and System of World, Univ. California, 1946.
7. M. J. Bertrand, "Theoreme relatif au mouvement d'un point attire vers un centre fixe", Comptes Rendus, vol. 77, 1873.
8. Г. К. Суслов, О силовой функции, допускающей данные интегралы, Киев, Наука, 1980.
9. И. В. Мещерский, Работы по механике тел переменной массы, М., Гостехиздат., 1979.
10. С. А. Чаплыгин, Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке, Сб., соч., т. 1, М., Гостехиздат., 1948.
11. Д. Н. Горячев, Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела, Варшава, 1910.
12. Н. Картан, Интегральные инварианты, 1940.
13. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобелков, Численные методы, М., Наука 1987.

21 мая 1997

Армянский государственный инженерный университет