

ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ МАССИВОВ БОМЕР-ХОЛЛА И МАТРИЦ АДАМАРА

А. Г. Сарухян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 6, 1997

Вводится понятие дополнительных параметрических блочных последовательностей, которые являются естественным обобщением как обычных, так и блочных дополнительных последовательностей. Приведены конструкции различных классов четырех параметрических и обычных дополнительных блочных последовательностей, на основе которых построены массивы Бомер-Холла и матрицы Адамара новых порядков.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования матриц Адамара первоначально были связаны с вопросами линейной алгебры (задача построения максимальных детерминантов). Далее обнаружилось взаимосвязи матриц Адамара с различными комбинаторными конфигурациями такими, как блок-схемы, ортогональные конструкции, латинские квадраты, сильно регулярные графы, максимальные коды, достигающие границы Плоткина, дополнительные последовательности и т.д. Есть много примеров успешного применения матриц Адамара к задачам обработки информации [8].

Квадратная $(-1, +1)$ -матрица H_m порядка m , удовлетворяющая условию

$$H_m H_m^T = H_m^T H_m = m I_m, \quad (1.1)$$

где H_m^T - транспонированная матрица H_m , I_m - единичная матрица порядка m , называется *матрицей Адамара* или *Сильвестра* [1], [2].

В 1893 году Адамар [3] доказал, что если $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ - действительная матрица порядка m с элементами, удовлетворяющими условиям $-1 \leq a_{ij} \leq +1$, то имет место неравенство $\det A \leq \sqrt{m^m}$, а равенство имеет место тогда

и только тогда, когда $a_{ij} = \pm 1$. Такие матрицы называются "матрицами Адамара".

В 1933 году Пэли [4] доказал, что если H_m - матрица Адамара порядка m , $m > 2$, то $m \equiv 0 \pmod{4}$. Задача построения матриц Адамара любого порядка остается открытой.

В этой работе строятся матрицы Адамара новых порядков. Приведем некоторые определения.

Определение 1.1. (см. [5] - [7]) Множество квадратных матриц $\{A_1, \dots, A_k\}$ порядка m назовем *параметрическим семейством Вильямсона* и обозначим через $(k, m, B_m, n, \{s_i\})$, если выполняются следующие условия :

- а) элементы матриц A_i , $i = 1, \dots, k$ имеют вид x_r или $-x_r$, $r = 1, \dots, n$;
- б) существует $(0, -1, +1)$ -матрица B_m порядка m , в каждой строке (столбце) которой ненулевой элемент встречается один раз и

$$A_i B_m A_j^T = A_j B_m A_i^T, \quad i, j = 1, \dots, k;$$

с)

$$\sum_{i=1}^k A_i A_i^T = \sum_{i=1}^n s_i x_i^2 I_m, \quad (1.2)$$

где s_i показывает число вхождений параметров x_i или $-x_i$ в каждую строку (столбец) матрицы A_r , $r = 1, \dots, k$ и $s_1 + \dots + s_n = mk$.

При $s_i = s$, $i = 1, \dots, n$ параметрическое семейство Вильямсона обозначим через (k, m, B_m, n, s) , а если $x_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$, то множество матриц назовем *семейством Вильямсона* и обозначим через (k, m, B_m) .

Матрицы A_i , $i = 1, \dots, k$, образующие параметрическое семейство Вильямсона назовем

- (i) параметрическими матрицами Вильямсона, если $k = 4$, $B_m = I_m$;
- (ii) восемью параметрическими матрицами Вильямсона, если $k = 8$, $B_m = I_m$.

Матрицы A_i , $i = 1, \dots, k$, образующие семейство Вильямсона (k, m, B_m) , назовем

- (i) матрицами Вильямсона, если $k = 4$, $B_m = I_m$;
- (ii) восемью матрицами Вильямсона, если $k = 8$, $B_m = I_m$.

Определение 1.2. (см. [2], [6]) $(0, -1, +1)$ -матрицы $\{X_1, \dots, X_4\}$ порядка k называются *T-матрицами*, если выполняются условия :

- a) $X_i * X_j = 0$, $i \neq j$, где $*$ - произведение Адамара;
- b) $\sum_{i=1}^4 X_i$ - $(-1, +1)$ -матрица;
- c) $X_i X_j = X_j X_i$, $i, j = 1, \dots, 4$;
- d) $X_i B_k X_j^T = X_j B_k X_i^T$, $i, j = 1, \dots, 4$;
- e) $\sum_{i=1}^4 X_i X_i^T = k I_k$.

Определение 1.3. (см. [2]) Параметрическая матрица $H(A_1, \dots, A_4)$ порядка $4t$ называется *массивом Бомер-Холла* порядка $4t$, если выполняются следующие условия :

- a) элементы матрицы H имеют вид $\pm A_i$, $i = 1, \dots, 4$;
- b) строки (столбцы) матрицы H формально ортогональны;
- c) $HH^T = t \sum_{i=1}^4 A_i A_i^T \times I_{4t}$, где $\times$ - произведение Кронекера.

Ниже приведены некоторые известные классы порядков матриц типа Вильямсона и *T*-матриц :

a. Существуют циклические и симметрические матрицы типа Вильямсона порядка $n \in W$, $W = \{3, 5, 7, \dots, 31, 37, 43, (p+1)/2\}$, где $p \equiv 1 \pmod{4}$ - степень простого числа [2], [8].

b. Существуют матрицы типа Вильямсона порядка

- (i) $n < 100$, кроме $n = 35, 39, 47, 53, 67, 73, 89, 94$ [9];
- (ii) 3^a , где a - положительное целое число [9];
- (iii) $t(4t+3)$, $t(4t-1)$, где $t \in \{1, 3, 5, \dots, 23, 25\}$ [10].

Множество порядков приведенных в (i) - (iii) обозначим W_2 . Существуют

T-матрицы порядка t_1, t_2 и t_3 , где

$$t_1 \in L_1 = \{3, 5, \dots, 61, k+1\} [2];$$

$$t_2 \in L_2 = \{2 \cdot 11(2n-1), 2(2n-1)(2k+1)\} [11];$$

$$t_3 \in L_3 = \{3m, 7m, 13m\} [11], [12], m \in L_1 \cup L_2; n \in \{2, 3, 4, \dots, 8, 13, 15, 2^a 10^b 26^c +$$

$+1\}$, $k = 2^a 10^b 26^c$, a, b, c — неотрицательные числа. Наиболее полный список матриц типа Вильямсона и T -матриц приведен в [13].

§2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОЛЕЯ И

$\delta(t, n)$ -ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ — последовательность коммутативных переменных.

Определение 2.1. (см. [14], [15]) Периодической и непериодической автокорреляционной функцией последовательности A называются функции вида

$$P_A(j) = \sum_{i=1}^j a_i a_{n+i-j} + \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j}, \quad N_A(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i a_{i+j}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (2.1)$$

Отметим, что $P_A(j) = N_A(n-j) + N_A(j)$, и если $N_A(j) = 0$, то $P_A(j) = 0$ для $j = 1, \dots, n-1$.

Определение 2.2. Пусть $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ — последовательности коммутативных переменных. Непериодическая взаимно-корреляционная функция последовательностей A и B определяется формулой

$$N_{A,B}(j) = \sum_{i=1}^{n-j} a_i b_{i+j}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Определение 2.3. $(-1, +1)$ -последовательности $A_i = (a_{i,j})_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, n$ называются дополнительными последовательностями, если выполняются следующие условия :

$$\sum_{i=1}^m N_{A_i}(j) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

Две $(-1, +1)$ -последовательности $A = \{a_i\}_{i=1}^n$ и $B = \{b_i\}_{i=1}^n$ называются последовательностями Голея длины n , если $N_A(j) + N_B(j) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n-1$.

Последовательности Голея длины 2, 10 и 26 имеют вид

$$\begin{aligned} n=2 & \quad ++, \quad +-; \\ n=10 & \quad +---+ - +---+, \quad +-----+ +-; \\ n=26 & \quad +++--+++-+-----+--+-----, \\ & \quad ---++---+--+--+--+--+-----, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где знак $-$ означает -1 и $+$ означает $+1$.

В следующей лемме X^* означает последовательность с обратными расположениями элементов последовательности X .

Лемма 2.1. (см. [15]) Пусть A, B и C, D – последовательности Голея длины m и n , соответственно. Тогда

$$A \times \frac{(C+D)}{2} + B \times \frac{(C-D)}{2}, \quad A \times \frac{(C^* - D^*)}{2} - B \times \frac{(C^* + D^*)}{2}$$

также являются последовательностями Голея длины mn .

Из (2.4) и леммы 2.1 следует существование последовательности Голея длины $2^a 10^b 26^c$, где a, b, c – целые неотрицательные числа.

Пусть $V = \{v_i\}_{i=1}^m$ – последовательность взаимно ортогональных $(-1, +1)$ -векторов. Последовательность V называется n -символьным δ -кодом длины m и обозначается через $\delta(n, m)$, если максимальное число взаимно ортогональных векторов в последовательности V равно n и

$$\sum_{i=1}^{m-j} v_i v_{i+j} = 0, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Лемма 2.2. Если существуют последовательности Голея длины m , то существует $\delta(2, m)$ -последовательность.

Доказательство. Пусть $A = (a_i)_{i=1}^m$ и $B = (b_i)_{i=1}^m$ – последовательности Голея длины m . Легко показать, что $V = \{v_i = (a_i, b_i)\}_{i=1}^m$ – $\delta(2, m)$ -последовательность.

Отметим, что в [16] построены $\delta(3, 2^a 10^b 26^c + 1)$ -последовательности.

Теорема 2.1. (см. [14]) Для существования $\delta(t, n)$ -последовательности, $t \leq 4$, необходимо и достаточно существование $(0, -1, +1)$ -последовательностей X_1, X_2, X_3, X_4 длины n , удовлетворяющих условиям :

$$\begin{aligned} X_i * X_j &= 0, \quad i \neq j, \quad \sum_{i=1}^4 X_i \text{ — } (-1, +1)\text{-последовательность,} \\ \sum_{i=1}^4 N_{X_i}(j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Замечание. Существует $\delta(3, 2^a 10^b 26^c + 1)$ -последовательность, образованная тремя 4-мерными векторами, сумма двух первых и последних координат которых равны.

§3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ БЛОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A = \{A_i\}_{i=1}^n$ — последовательность $(-1, +1)$ -матриц порядка k . Периодической (P_A) и непериодической (N_A) автокорреляционной функцией блочной последовательности A является функция вида

$$P_A(j) = \sum_{i=1}^j A_i A_{n+i-j}^T + \sum_{i=1}^{n-j} A_i A_{i+j}^T, \quad N_A(j) = \sum_{i=1}^{n-j} A_i A_{i+j}^T, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (3.1)$$

Определение 3.1. [14], [15]. $A_i = \{A_{i,j}\}_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$, где $A_{i,j}$ — $(-1, +1)$ -матрицы порядка k , называются m дополнительными блочными последовательностями длины n с блочной размерностью k , если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} A_{i,j} A_{t,r}^T &= A_{t,r} A_{i,j}^T, \quad i \neq t; \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{i,j} A_{i,j}^T = mnkI_k; \\ \sum_{i=1}^m N_{A_i}(j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Замечание. При $m = 1$ вышеуказанная последовательность называется блочной последовательностью Баркера, а при $m = 2$ — последовательностью Голя [15]. Если существуют m дополнительные последовательности длины n и матрица Адамара порядка $4k$, то существуют m дополнительные блочные последовательности длины n с блочной размерностью $4k$.

Лемма 3.1. Если существует пара блочных последовательностей Голя длины m, n с блочной размерностью k , то существуют четыре дополнительные блочные последовательности Голя длины $m + n$ с блочной размерностью k .

Лемма 3.2. Если существуют матрицы Адамара порядка m и n , то существуют блочные последовательности Голя длины 3 с блочной размерностью $mn/2$.

Доказательство. Пусть H_m и H_n — матрицы Адамара порядка m и n , соответственно. В [8] показано, что существование матриц Адамара порядка m и n влечет существование $(-1, +1)$ -матриц X и Y порядка $mn/4$, удовлетворяющих условиям

$$XY^T = 0, \quad XX^T + YY^T = \frac{mn}{2} I_{mn/4}. \quad (3.3)$$

Теперь введем матрицы

$$C_1 = \begin{pmatrix} X & X \\ X & -X \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} Y & Y \\ Y & -Y \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Нетрудно показать, что H – матрица Адамара порядка $mn/2$, и последовательности (C_1, C_2, H) , $(C_1, C_2, -H)$ – блочные последовательности Голея длины 3 с блочной размерностью $mn/2$. Из лемм 2.1, 3.1, 3.2 и замечания имеем

Следствие 3.1. Если существуют матрицы Адамара порядка m и n , то существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2^a 10^b 26^c + 3$ с блочной размерностью $mn/2$, где a, b, c – целые неотрицательные числа.

Теорема 3.1. (А. Харагани [15]). Для любого положительного целого числа k существуют блочные последовательности Голея длины $2^{2k-1} + 1$ и $4^k + 1$ с блочной размерностью 4^k .

Теперь из леммы 3.1 и теоремы 3.1 имеем

Следствие 3.2. Для любого положительного целого числа k существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2(2^{2k-1} + 2^{k-2} + 1)$ с блочной размерностью 4^k . Для любого положительного целого числа k и для целых неотрицательных чисел a, b и c существуют четыре дополнительные блочные последовательности длины $2^a 10^b 26^c + 2^{2k-1} + 1$ и $2^a 10^b 26^c + 4^k + 1$ с блочной размерностью 4^k .

§4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БЛОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Пусть $A_i = \{A_{i,j}\}_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$ – последовательность параметрических матриц порядка k , т.е. $A_{i,j}$ – параметрические матрицы порядка k , зависящие от r параметров x_i , $i = 1, \dots, r$.

Определение 4.1. $\{A_1, \dots, A_m\}$ называются *дополнительными параметрическими блочными последовательностями* и обозначаются через $CPB(m, n, k, r)$, если

$$A_{i,j} A_{t,p}^T = A_{t,p} A_{i,j}^T, \quad i \neq t, \quad \sum_{i=1}^m N_{A_i}(j) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{i,j} A_{i,j}^T = \frac{mnk}{r} \sum_{i=1}^r x_i^2 I_k. \quad (4.1)$$

Замечание. Если $x_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$, то $CPB(m, n, k, r)$ -последовательности являются дополнительными блочными последовательностями и обозначаются через $CB(m, n, k)$. $CPB(2, n, k, r)$ -последовательности являются параметрическими блочными последовательностями Голея и обозначаются через $GPB(n, k, r)$. А при $x_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$ эти последовательности обозначим через $GB(n, k)$.

Теорема 4.1. Если существует $\delta(t, n)$ -последовательность ($t \leq 4$) и параметрическое семейство Вильямсона $(4, m, I_m, r, \{s_i\})$, то существуют $CPB(4, n, m, r)$ -последовательности.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 существуют $(0, -1, +1)$ -последовательности $X_1 = (a_i)_{i=1}^n$, $X_2 = (b_i)_{i=1}^n$, $X_3 = (c_i)_{i=1}^n$, $X_4 = (d_i)_{i=1}^n$, удовлетворяющие условиям (2.6). Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — параметрические матрицы Вильямсона порядка m , зависящие от r параметров. Рассмотрим следующие параметрические блочные последовательности :

$$\begin{aligned} X &= (a_i A_1 + b_i A_2 + c_i A_3 + d_i A_4)_{i=1}^n = (X_{1,i})_{i=1}^n, \\ Y &= (-a_i A_2 + b_i A_1 - c_i A_4 + d_i A_3)_{i=1}^n = (X_{2,i})_{i=1}^n, \\ Z &= (-a_i A_3 + b_i A_4 + c_i A_1 - d_i A_2)_{i=1}^n = (X_{3,i})_{i=1}^n, \\ W &= (-a_i A_4 - b_i A_3 + c_i A_2 + d_i A_1)_{i=1}^n = (X_{4,i})_{i=1}^n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Докажем, что эти последовательности являются $CPB(4, n, m, r)$ -последовательностями. Так как A_i , $i = 1, \dots, 4$ — параметрические матрицы Вильямсона, то первое условие (4.1) очевидно. Докажем второе условие (4.1). Имеем

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^n X_{i,j} X_{i,j}^T = \sum_{i=1}^4 (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2) \sum_{j=1}^4 A_i A_i^T.$$

Используя условия (2.6) и (1.2), получаем

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^n X_{i,j} X_{i,j}^T = n \sum_{i=1}^r s_i x_i^2 I_m.$$

Теперь вычислим

$$N_X(j) + N_Y(j) + N_Z(j) + N_W(j) = (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j} + c_i c_{i+j} + d_i d_{i+j}) \sum_{i=1}^4 A_i A_i^T.$$

Далее, согласно теореме 2.1 имеем

$$N_X(j) + N_Y(j) + N_Z(j) + N_W(j) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Следовательно, X, Y, Z, W образуют $CPB(4, n, m, r)$ -последовательность.

В [5], [6] доказано, что если существуют матрицы типа Вильямсона порядка m , то существуют также параметрические матрицы типа Вильямсона порядка $2m$, зависящие от четырех параметров. Теперь из теорем 2.1 и 4.1 получаем

Следствие 4.1. Существуют $CPB(4, n, 2m, 4)$ -последовательности, где $n \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$. В частности, $n = (2^a 10^b 26^c + 1)k$ и $m = (p+1)/2$, где $k = 1, 3, 7, 13$, $p \equiv 1 \pmod{4}$ — степень простого числа, a, b, c — целые неотрицательные числа.

Перейдем теперь к более детальному рассмотрению четырех дополнительных параметрических блочных последовательностей.

Теорема 4.2. Если существуют $CPB(4, n, k, 4)$ -последовательности и матрицы типа Вильямсона порядка m , то существуют $CB(4, n, mk)$ -последовательности.

Доказательство. Пусть $X_i(a, b, c, d)$, $i = 1, \dots, 4$ — $CPB(4, n, k, 4)$ -последовательности, а A, B, C, D — матрицы типа Вильямсона порядка m . Можно показать, что $X_i(A, B, C, D)$, $i = 1, \dots, 4$ являются $CB(4, n, mk)$ -последовательностями.

Из теоремы 4.2 и следствия 4.1 получаем

Следствие 4.2. Существуют $CB(4, n, 2mr)$ -последовательности, где $n \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $r, m \in W_1 \cup W_2$.

Пусть A_i , $i = 1, \dots, n$ — параметрические матрицы порядка k , удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^n A_i A_i^T = \frac{nk}{4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) I_k, \quad A_i A_j^T = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Теорема 4.3. Если существует массив Бомер-Холла H порядка m и параметрические матрицы A_i , $i = 1, \dots, n$ порядка m , удовлетворяющие условиям (4.3) и условиям $A_i H^T = H A_i^T$, $i = 1, \dots, n$, и существует $\delta(3, k)$ -последовательность, то существуют $CPB(4, n + k, m, 4)$ -последовательности.

Доказательство. Пусть существует $\delta(3, k)$ -последовательность. Нетрудно доказать, что существуют четыре дополнительные $(-1, +1)$ -последовательности $A = (a_i)_{i=1}^k$, $B = (b_i)_{i=1}^k$, $C = (c_i)_{i=1}^k$, $D = (d_i)_{i=1}^k$, и что согласно замечанию в §2

$$a_i + b_i - c_i - d_i = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4.4)$$

Теперь рассмотрим параметрические блочные последовательности длины $n + k$ с блочной размерностью порядка m

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left\{ (A_i)_{i=1}^n, (a_i H)_{i=1}^k \right\}, & Q_2 &= \left\{ (A_i)_{i=1}^n, (b_i H)_{i=1}^k \right\}, \\ Q_3 &= \left\{ (A_i)_{i=1}^n, (-c_i H)_{i=1}^k \right\}, & Q_4 &= \left\{ (A_i)_{i=1}^n, (-d_i H)_{i=1}^k \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где матрицы A_i , $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям (4.3) и $A_i H^T = H A_i^T$ для всех $i = 1, \dots, n$, а H — массив Бомер-Холла порядка m . Можно доказать, что $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in CPB(4, n + k, m, 4)$.

Лемма 4.1. Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер-Холла порядка n , то существует массив Бомер-Холла H порядка $mn/2$ и две параметрические матрицы C_1, C_2 порядка $mn/2$, удовлетворяющие следующим условиям :

$$C_1 C_1 + C_2 C_2 = \frac{mn}{4} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) I_{mn/2}, \quad C_1 C_2^T = 0, \quad C_i H^T = H C_i^T, \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2.

Из теорем 4.3 и леммы 4.1 получаем

Следствие 4.3. Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер-Холла порядка n , то существуют $CPB(4, 2^a 10^b 26^c + 3, mn/2, 4)$ -последовательности. В частности, существуют $CPB(4, 2^a 10^b 26^c + 3, 8mnk, 4)$ -последовательности, где $n, k \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$, a, b, c — целые неотрицательные числа.

Отметим, что параметрические матрицы $H \times H$, $C_1 \times C_1$, $C_1 \times C_2$, $C_2 \times C_1$ и $C_2 \times C_2$ порядка $(mn/2)^2$, где H и C_1, C_2 имеют вид (3.4) и удовлетворяют условиям (4.6). Следовательно, из теоремы 4.3 имеем

Следствие 4.4. Если существует матрица Адамара порядка m и массив Бомер-Холла порядка n , то существуют четыре дополнительные параметрические блочные последовательности длины $2^a 10^b 26^c + 1$ с блочной размерностью порядка $(mn/2)^d$. В частности, существуют четыре дополнительные параметрические блочные последовательности длины $2^a 10^b 26^c + 1$ с блочной размерностью порядка $(8mnt)^d$, где $n, t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$, a, b, c, d — целые неотрицательные числа.

§5. ПОСТРОЕНИЕ МАССИВОВ БОМЕР-ХОЛЛА

И МАТРИЦ АДАМАРА

Теорема 5.1. Если существуют $CPB(4, n, k, 4)$ -последовательности, то существует массив Бомер-Холла порядка $4nk$.

Доказательство. Пусть $A = (A_i)_{i=1}^n$, $B = (B_i)_{i=1}^n$, $C = (C_i)_{i=1}^n$ и $D = (D_i)_{i=1}^n$ — дополнительные параметрические блочные последовательности длины n с блочной размерностью порядка k . Введем следующие матрицы:

$$H_{1,1} = H_{2,2} = H_{3,3} = H_{4,4} = \sum_{i=1}^n A_i \times U^{i-1}, \quad H_{1,2} = -H_{2,1} = \sum_{i=1}^n B_i \times U^{i-1} R,$$

$$H_{1,3} = -H_{3,1} = \sum_{i=1}^n C_i \times U^{i-1} R, \quad H_{1,4} = -H_{4,1} = \sum_{i=1}^n D_i \times U^{i-1} R,$$

$$H_{3,2} = -H_{2,3} = \sum_{i=1}^n D_i \times U^{n-i+1} R, \quad H_{4,3} = -H_{3,4} = \sum_{i=1}^n B_i \times U^{n-i+1} R,$$

$$H_{2,4} = -H_{4,2} = \sum_{i=1}^n C_i \times U^{n-i+1} R,$$

где U — циклическая матрица порядка n с первой строкой $(0, 1, 0, \dots, 0)$, а R — зеркальное отображение тождественной матрицы. Матрица $(H_{i,j})_{i,j=1}^4$ является массивом Бомер-Холла порядка $4nk$.

Из теоремы 5.1 и следствия 4.4 получаем

Следствие 5.1. Существует массив Бомер-Холла порядка $2^{3d+2}(2^a 10^b 26^c + 2^d + 1)(mnt)^d$, где $n, t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m \in W_1 \cup W_2$, a, b, c, d — целые неотрицательные числа.

Теорема 5.2. Если существует массив Бомер-Холла порядка t и матрица Адамара порядка m , то существует массив Бомер-Холла порядка $\frac{2^k + 1}{2^{k-1}}(mt)^k$, $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Согласно лемме 4.1 существуют параметрические матрицы C_i , $i = 1, \dots, 2^k$ и массив Бомер-Холла H порядка $(mt/2)^k$, удовлетворяющие условиям (4.6). Можно показать, что последовательности $(H, C_1, \dots, C_{2^k})$ и $(-H, C_1, \dots, C_{2^k})$ образуют параметрические блочные последовательности Голея длины $2^k + 1$ с блочной размерностью порядка $(mt/2)^k$. Теперь нетрудно показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} X & YR \\ -YR & X \end{pmatrix}$$

является массивом Бомер-Холла порядка $\frac{2^k + 1}{2^{k-1}}(mt)^k$, где X и Y — блочно-циклические матрицы с первыми строками вида $H, C_1, \dots, C_{2^k}$ и $-H, C_1, \dots, C_{2^k}$, соответственно.

Из теоремы 5.2 и следствия 5.1 получаем

Следствие 5.2. Существует массив Бомер-Холла порядка

$$2^{3k(d+1)+1}(2^k + 1)(2^a 10^b 26^c + 1)^k(2^e 10^f 26^g + 2^h + 1)^k(rnt)^{kh} m^k,$$

где $n, t \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, $m, r \in W_1 \cup W_2$, а $a, b, \dots, g, h$ — целые неотрицательные числа, $k = 1, 2, \dots$.

Следствие 5.3. Для любых натуральных чисел n и k существует массив Бомер-Холла порядка

$$2^{3k(n+1)+1}(2^k + 1)(2^a 10^b 26^c + 1)^{k(n+1)}(2^d 10^e 26^f + 2^n + 1)^k r^{kn} m^k,$$

где $m, r \in W_1 \cup W_2$ и $a, b, \dots, e, f$ — целые неотрицательные числа.

Из следствия 5.3 следует существование массивов Бомер-Холла порядка

$$2^7 3 n_1^2 n_2^2 m_1 m_2, \quad 2^{10} 3 n_1^3 n_2 m_1 m_2, \quad 2^{13} 5 n_1^4 n_2^2 m_1^2 m_2^2, \quad 2^{13} 3 n_1^4 n_2 m_1 m_2^2,$$

$$2^{16}3n_1^5n_2m_1m_2^5, \quad 2^{19}5n_1^6n_2m_1^2m_2^4, \quad 2^{19}9n_1^6n_2^3m_1^3m_2^3,$$

где $m_1, m_2 \in W_1 \cup W_2$ и

$$n_1 \in L_4 = \{3, 5, 9, 17, 21, 27, 33, 41, 53, 81, 105\},$$

$$n_2 \in L_5 = \{5, 7, \dots, 13, 17, \dots, 37, 41, 43, 45, 49, 53, \dots$$

$$\dots, 61, 65, 67, 69, 73, 81, 83, 85, 89, 91, 97, 105, 107, 109, 113, 117, 121\}.$$

Из последнего следствия и теоремы Бомер-Холла [2] получаем

Следствие 5.4. Для любых натуральных чисел n и k и для всех целых неотрицательных чисел $a, b, \dots, e, f$ существует матрица Адамара порядка

$$2^{3k(n+1)+1}(2^k + 1)(2^a 10^b 26^c + 1)^{k(n+1)}(2^d 10^e 26^f + 2^n + 1)^k r^{kn} m^k t,$$

где m, r, t — порядки матриц типа Вильямсона.

ABSTRACT. Baumert-Hall arrays and Hadamard matrices of new orders are constructed basing on the concept of complementary parametric block sequence. The latter generalize both usual and block complementary sequences. Some classes of four parametric and usual complementary block sequences are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Sylvester, "Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign-successions and tessellated pavements in two or more colors with applications to Newton's rule, ornamental tile-work and the theory numbers", Phil. Mag., vol. 34, № 4, pp. 461 - 475, 1867.
2. W. D. Wallis, A. P. Street, J. S. Wallis, Combinatorics : Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices, Lecture Notes in Math., vol. 292, 1972.
3. J. Hadamard, "Resolution d'une question relative aux determinants", Bull. Scien. Math., ser. 2, № 17 (part 1), pp. 240 - 246, 1893.
4. R. E. A. Palay, "On orthogonal matrices", J. Math. and Phys., vol. 12, № 3, pp. 311 - 320, 1933.
5. S. S. Agaian, Hadamard Matrices and Their Applications, Lecture Notes in Math., vol. 168, 1985.
6. S. S. Agaian, H. G. Sarukhanyan, "Recurrence formulas for the construction of Williamson type matrices", Math. Notes, vol. 30, pp. 796 - 804, 1982.
7. А. Г. Саруханян, "О блоках типа Goethals-Seidel", Уч. Записки ЕГУ, № 1, стр. 12 - 19, 1979.
8. J. Seberry, M. Yamada, "Hadamard matrices, sequences and block designs", Surveys in Contemporary Design Theory (J. Dinitz, D. Stinsons eds.), Wiley-Interscience Series in Discrete Math., pp. 431 - 560, NY, 1992.

9. J. S. Wallis, "On Hadamard matrices", J. Comb. Theory ser. A, № 18, pp. 145 – 164, 1975.
10. J. S. Wallis, "Construction of Williamson type matrices", Linear and Multilinear Algebra, № 3, pp. 197 – 207, 1975.
11. А. Г. Саруханян, "О построении δ -кодов", Пробл. передачи информ., № 2, стр. 106 – 108, 1987.
12. C. M. Yang, "Lagrange identity for polynomials and δ -codes of lengths $7t$, $13t$ ", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 88, pp. 746 – 750, 1983.
13. B. Jenkins, Ch. Koukouvinos, J. Seberry, "Numerical results on T -sequences (odd and even), T -matrices, $OD(4t; t, t, t, t)$, Williamson matrices and Hadamard matrices constructed via $OD(4t; t, t, t, t)$ ", TR CS, vol. 88/26, January 25, 1989.
14. H. G. Sarukhanyan, "On the construction of generalized sequences with zero autocorrelation functions and Hadamard matrices", Proc. of Comp. Center of Armenian Academy of Sciences, vol. 12, pp. 105 – 129, 1984.
15. H. Kharaghani, "Block Golay sequences with applications", Austral J. of Combinatorics, № 6, pp. 293 – 303, 1992.
16. С. С. Агаян, А. Г. Саруханян, "Построение обобщенных δ -кодов и матриц Адамара", Пробл. передачи информ., т. 14, № 3, стр. 50 – 59, 1980.

18 апреля 1996

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН Армении
E-mail : hakop@ipia.sci.am