О СПЕКТРЕ И S -МАТРИЦЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

П. Э. Мелик-Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 6, 1997

В настоящей работе мы доказываем, что точечные спектры возмущенного $(\mathcal{D}_k)$ и невозмущенного $(\mathcal{D}_k^0)$ операторов Дирака совпадают. Исследуются также свойства факторизации S -матрицы, записанной для пары $(\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^0)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе обобщаются исследования работ [1], [2], относящиеся к прямой задаче теории рассеяния. Для пояснения характера наших обобщений приведем необходимые обозначения и определения. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы операторы $\mathcal{J}$ и T такие, что

$$\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}, \quad \mathcal{J}^2 = -I, \quad T^* = T, \quad \mathcal{J}T = -T\mathcal{J}, \quad (0.1)$$

где I - единичный оператор в $\mathcal{H}$. Тогда операторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ являются ортогональными проекторами на собственные подпространства $\mathcal{H}_{\pm} = P_{\pm}\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{J}$, т.е. $P_{\pm}P_{\mp} = 0$, $P_{+} + P_{-} = I$, $iP_{+} - iP_{-} = \mathcal{J}$. Предполагается, что $\dim \mathcal{H}_{+} = \dim \mathcal{H}_{-}$. Обозначим через K произвольный оператор со свойствами $K^* = K$, $\mathcal{J}K = -K\mathcal{J}$. Тогда оператор $P_K = \frac{1}{2}(I + K)$ является ортогональным проектором, удовлетворяющим условию $P_K\mathcal{J} = \mathcal{J}P_K^{\perp}$ ($P_K\mathcal{J}P_K = 0$), следовательно, он является проектором на гипермаксимальное $(-i\mathcal{J})$ -нейтральное подпространство $\mathcal{H}_K = P_K\mathcal{H}$ оператора $\mathcal{J}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(R_+, \mathcal{H})$ (R_+ - неотрицательная полуось действительной оси) рассмотрим дифференциальное выражение

$$d[f] = \mathcal{J}f'(r) - V(r)f(r) - mTf(r), \quad m > 0, \quad r \in R_+, \quad (0.2)$$

где операторнозначная функция $V(\tau)$ суммируема и

$$V^*(\tau) = V(\tau), \quad \mathcal{J}V(\tau) = -V(\tau)\mathcal{J}. \quad (0.3)$$

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ минимальный симметрический оператор

$$\mathcal{D}_0 f = d[f], \quad \mathcal{D}_0 = D(\mathcal{D}_0) = \{f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \mid d[f] \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}), f(0) = 0\}.$$

Известно (см. [3]), что множество $\{\mathcal{D}_K\}$ всех самосопряженных расширений оператора $\mathcal{D}_0$ параметризуется множеством проекторов $\{P_K\}$ формулой

$$\mathcal{D}_K f = d[f], \quad \mathcal{D}_K = D(\mathcal{D}_K) = \{f \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \mid d[f] \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}), f(0) = P_K f(0)\}.$$

Операторы, порожденные формулой (0.2), называются операторами Дирака с массой m . Если $m = 0$, то такие операторы называются каноническими и обозначаются через $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_K$. Через $\mathcal{D}_K^0$ и $\mathcal{C}_K^0$ обозначим невозмущенные операторы (случай $V(\tau) = 0$).

В работе [1] исследован спектр и S -матрица оператора Дирака в случае, когда $\dim \mathcal{H}_{\pm} = n$, матрицы $\mathcal{J}$ и T вещественны и имеют специальную структуру, а элементы вещественной матрицы-функции $V(\tau)$ допускают определенную оценку сверху при $\tau \rightarrow \infty$.

В §1 настоящей работы показано, что в интервале $(-m, m)$ спектр оператора $\mathcal{D}_K$ совпадает со спектром оператора $\mathcal{D}_K^0$, исследованным в [4], следовательно, он обусловлен лишь свойствами граничного проектора P_K .

В §2 определяется S -матрица, отвечающая паре $(\mathcal{D}_K^0, \mathcal{D}_K)$ такая, что при $m = 0$ она совпадает с S -матрицей пары $(\mathcal{C}_K^0, \mathcal{C}_K)$, исследованной в [2]. В конечномерном случае наши рассуждения согласуются с работой [1].

Ниже мы будем пользоваться блочно-матричными представлениями операторов в разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, именно, вектору $h \in \mathcal{H}$ сопоставив столбец $\begin{bmatrix} h_+ \\ h_- \end{bmatrix}$, ($h_{\pm} = P_{\pm} h$). Из формул (0.1) имеем

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} iI_+ & 0 \\ 0 & -iI_- \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & T_+^* \\ T_+ & 0 \end{bmatrix}, \quad P_K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ & \mathcal{K}_+^* \\ \mathcal{K}_+ & I_- \end{bmatrix}, \quad T_+ = T|_{\mathcal{H}_+}, \quad \mathcal{K}_+ = \mathcal{K}|_{\mathcal{H}_+},$$

где $I_{\pm}$ - единичные операторы в $\mathcal{H}_{\pm}$, а $T_+^* T_+ = \mathcal{K}_+^* \mathcal{K}_+ = I_+$, $T_+ T_+^* = \mathcal{K}_+ \mathcal{K}_+^* = I_-$.

Обозначим через $\Lambda_{\pm}$ открытую верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ , соответственно, и на плоскости Λ с разрезом по отрезку $[-m, m]$ введем в рассмотрение регулярную ветвь аналитической функции $k = \sqrt{\lambda^2 - m^2}$, для которой на верхнем и нижнем берегах разреза, соответственно, имеем $k = \pm i\sqrt{m^2 - \mu^2}$, $\mu \in (-m, m)$, $\lambda = \mu + i\nu \in \Lambda$. Для этой ветви при $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, соответственно, имеем $k \in \Lambda_{\pm} \setminus [0, \pm im]$.

Для операторов B , действующих в $\mathcal{H}$, обозначим $B^r = -JB^*J$.

§1. СПЕКТР ОПЕРАТОРА ДИРАКА В ИНТЕРВАЛЕ $(-m, m)$

Рассмотрим уравнение $P_K f = \mu f$, т.е. задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{J}f'(\tau, \mu) - V(\tau)f(\tau, \mu) &= (mT + \mu I)f(\tau, \mu), \\ f(0, \mu) &= P_K f(0, \mu), \quad f(\tau, \mu) \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

при $\mu \in (-m, m)$. Поскольку $(\mu I - mT)(\mu I + mT) = k^2 I$, то верхнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{k}(\mu I - mT)\mathcal{J}f'(\tau, \mu) - \frac{1}{k}(\mu I - mT)V(\tau)f(\tau, \mu) = kf(\tau, \mu). \quad (1.2)$$

Обозначим $V_{\pm}(\tau) = \frac{1}{2}(V(\tau) \pm TV(\tau)T)$, так что $V(\tau) = V_+(\tau) + V_-(\tau)$, $TV_{\pm}(\tau) = \pm V_{\pm}(\tau)T$. Для оператора $U(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(I + \frac{\mu - k}{m}T\right)$ имеем $U^{-1}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu + k}{k} \times \left(I - \frac{\mu - k}{m}T\right)$ и непосредственно проверяется, что

$$U(\mu)\frac{1}{k}(\mu I - mT)\mathcal{J}U^{-1}(\mu) = \mathcal{J}, \quad U(\mu)\frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(\tau)U^{-1}(\mu) = \frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(\tau),$$

$$U(\mu)\frac{1}{k}(\mu I - mT)V_-(\tau)U^{-1}(\mu) = V_-(\tau).$$

Обозначая $g(\tau, \mu) = U(\mu)f(\tau, \mu) \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ и умножая уравнение (1.2) слева на $U(\mu)$, получим

$$\mathcal{J}g'(\tau, \mu) - V_-(\tau)g(\tau, \mu) - \frac{1}{k}(\mu I - mT)V_+(\tau)g(\tau, \mu) = kg(\tau, \mu),$$

$$g(0, \mu) = U(\mu)f(0, \mu) = U(\mu)P_K f(0, \mu).$$

Теперь заметим, что если $P_K T = T P_K$ (или, что то же $KT = TK$), то для каждого μ функция $g(\tau, \mu)$ удовлетворяет граничному условию

$$g(0, \mu) = U(\mu)P_K f(0, \mu) = P_K U(\mu)f(0, \mu) = P_K g(0, \mu).$$

Теорема 1.1. Если граничный проектор P_K таков, что $KT = TK$, то интервал $(-m, m)$ является резольвентным множеством оператора $\mathcal{D}_K$.

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in (-m, m)$. Тогда

$$\begin{aligned} & [(\mathcal{D}_K - \mu_0 I) f](\tau) = \\ & = U^{-1}(\mu_0) \left[\mathcal{J}g'(\tau) - V_-(\tau)g(\tau) - \frac{1}{k_0}(\mu_0 I - mT)V_+(\tau)g(\tau) - k_0g(\tau) \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $g(\tau) = U(\mu_0) f(\tau)$, $g(0) = P_K g(0)$. Рассмотрим операторную задачу Коши

$$\mathcal{J}Z'(\tau) = -\frac{m}{k_0}TV_+(\tau)Z(\tau) = \frac{m}{k_0}TV_+(\tau)\mathcal{J}Z(\tau), \quad Z(0) = I. \quad (1.4)$$

Пользуясь соотношениями (0.1) и (0.3), отсюда имеем

$$Z'(\tau)\mathcal{J} = \frac{m}{k_0}TV_+(\tau)\mathcal{J}Z(\tau)\mathcal{J},$$

следовательно, в силу единственности решения задачи Коши, получим $\mathcal{J}Z(\tau) = Z(\tau)\mathcal{J}$, поскольку $\mathcal{J}Z(0) = Z(0)\mathcal{J} = \mathcal{J}$. Из суммируемости функции $V_+(\tau)$ следует, что $Z^{\pm 1}(\tau)$ равномерно ограничены, следовательно, операторы $Z^{\pm 1}$, действующие по формуле $Z^{\pm 1}f = Z^{\pm 1}(\tau)f(\tau)$, ограничены в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$. Полагая $h(\tau) = Z^{-1}(\tau)g(\tau)$, пользуясь уравнением (1.4) и соотношением $Z^{-1}(\tau)\mathcal{J}Z(\tau) = \mathcal{J}$, выражение в квадратных скобках формулы (1.3) приведем к виду

$$Z[\mathcal{J}h'(\tau) - V_0(\tau)h(\tau) - k_0h(\tau)], \quad h(0) = g(0) = P_K h(0), \quad h(\tau) \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}), \quad (1.5)$$

где функция $V_0(\tau) = Z^{-1}(\tau) \left(V_-(\tau) - \frac{\mu_0}{k_0}V_+(\tau) \right) Z(\tau)$ суммируема и удовлетворяет условию $\mathcal{J}V_0(\tau) = -V_0(\tau)\mathcal{J}$. Такие условия (см. [5]) достаточны для существования операторнозначного ядра $N(\tau, t)$ ($0 \leq t \leq \tau < \infty$) такого, что действующий в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ оператор

$$[(I + N)f](\tau) = f(\tau) + \int_0^\tau N(\tau, t) f(t) dt$$

обладает свойством

$$(I + N)\mathcal{J} \frac{df}{d\tau} = \left(\mathcal{J} \frac{d}{d\tau} - V_0(\tau) \right) (I + N)f, \quad \mathcal{J} \frac{df}{d\tau} \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Оператор $I + N$ имеет обратный $I + M$ такого же вида. Полагая в формуле (1.5) $q(\tau) = [(I + M)h](\tau)$, получим

$$Z(I + N) \left[\mathcal{J} \frac{dq(\tau)}{d\tau} - k_0 q(\tau) \right], \quad q(0) = h(0) = P_K q(0).$$

Следовательно, формула (1.3) запишется в виде

$$(\mathcal{D}_K - \mu_0 I) f = W (C_K^0 - k_0 I) W^{-1} f, \quad (W^{-1} f)(0) = P_K (W^{-1} f)(0). \quad (1.6)$$

Здесь оператор $W = U^{-1}(\mu_0) Z(I + N)$ и обратный к нему ограничены.

Так как оператор C_K^0 самосопряжен, а параметр $k_0 = \pm i\sqrt{m^2 - \mu_0^2}$ — число мнимое, то формула (1.6) и доказывает теорему 1.1.

Замечание 1.1. В работе [1] для матричного оператора Дирака ($\dim \mathcal{H}_\pm = n$) подробно исследован оператор $\mathcal{D}_T$, отвечающий граничному проектору $P_T = \frac{1}{2}(I + T)$. Теорема 1.6.1 этой работы неточна, поскольку она утверждает, что в интервале $(-m, m)$ оператор $\mathcal{D}_T$ имеет конечное (не более чем n) число собственных значений. В конечномерном случае индексы дефекта оператора $\mathcal{D}_0$ равны n , и из теоремы 1.1 следует, что указанная теорема верна для оператора $\mathcal{D}_K$ такого, что $TK \neq KT$, а дополнение точечного спектра в $(-m, m)$ является резольвентным множеством.

При $TK = KT$ имеем равносильные соотношения $T_+^* K_+ = K_+^* T_+$, $T_+ K_+^* = K_+ T_+^*$. Рассмотрим случай, когда $TK \neq KT$, т.е. как $T_+^* K_+ \neq K_+^* T_+$, так и $T_+ K_+^* \neq K_+ T_+^*$, причем операторы каждой из этих пар являются унитарными, соответственно, в $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. Очевидно, что оператор $A_K^+ = \frac{1}{2}(T_+^* K_+ + K_+^* T_+)$ самосопряжен.

Теорема 1.2. Если $TK \neq KT$, то в интервале $(-m, m)$ точечный спектр $\sigma_p(\mathcal{D}_K)$ оператора $\mathcal{D}_K$ совпадает с множеством $\sigma_p(-mA_K^+) \cap (-m, m)$.

Доказательство. Если $TK \neq KT$, то формула (1.6) принимает вид

$$[(\mathcal{D}_K - \mu_0 I) f](\tau) = W (\mathcal{J} g'(\tau) - k_0 g(\tau)),$$

где функция $g(\tau) = (W^{-1} f)(\tau)$ такова, что $g(0) = (W^{-1} f)(0) = U(\mu_0) P_K f_0$, $f_0 = f(0) \in \mathcal{H}$.

Для операторной задачи Коши

$$\mathcal{J} \frac{d\mathcal{E}^0(\tau)}{d\tau} = k_0 \mathcal{E}^0(\tau), \quad \mathcal{E}^0(0) = I$$

имеем $\mathcal{E}^0(\tau) = e^{-ik_0\tau} P_+ + e^{ik_0\tau} P_-$, следовательно, для любого решения уравнения $\mathcal{J}g'(\tau) = k_0g(\tau)$ имеем $g(\tau) = (e^{-ik_0\tau} P_+ + e^{ik_0\tau} P_-)g(0)$. Таким образом, число μ_0 является собственным значением оператора $\mathcal{D}_K$ тогда и только тогда, когда найдется ненулевой вектор $f_0 \in \mathcal{H}$ такой, что

$$g(\tau) = (e^{-ik_0\tau} P_+ + e^{ik_0\tau} P_-) U(\mu_0) P_K f_0 \in L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}). \quad (1.7)$$

Для μ_0 из верхнего берега разреза имеем $k_0 = i\sqrt{m^2 - \mu_0^2}$, поэтому верхнее условие будет выполняться тогда и только тогда, когда $P_+ U(\mu_0) P_K f_0 = 0$, а для μ_0 из нижнего берега разреза - когда $P_- U(\mu_0) P_K f_0 = 0$.

Если $f_0 = \begin{bmatrix} f_0^+ \\ f_0^- \end{bmatrix}$, $f_0^\pm = P_\pm f_0$. то

$$\begin{aligned} U(\mu_0) P_K f_0 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_+ & \frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+^* \\ \frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+ & I_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ & K_+^* \\ K_+ & I_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^+ \\ f_0^- \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left(I_+ + \frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+^* K_+ \right) f_+ \\ \left(\frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+ + K_+ \right) f_+ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $f_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} (f_0^+ + K_+^* f_0^-) \in \mathcal{H}_+$. Поскольку $\frac{\mu_0 - k_0}{m} \cdot \frac{\mu_0 + k_0}{m} = 1$, то условие $P_+ U(\mu_0) P_K f_0 = 0$ примет вид

$$\left(I_+ + \frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+^* K_+ \right) f_+ = \frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+^* K_+ \left(I_+ + \frac{\mu_0 + k_0}{m} K_+^* T_+ \right) f_+ = 0.$$

Поскольку оператор $T_+^* K_+$ унитарен, то имеем

$$\left(\frac{\mu_0 + k_0}{m} I_+ + T_+^* K_+ \right) f_+ = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\mu_0 - k_0}{m} I_+ + K_+^* T_+ \right) f_+ = 0. \quad (1.9)$$

Складывая верхние соотношения, окончательно получим

$$(\mu_0 I_+ + m A_K^+) f_+ = 0. \quad (1.10)$$

Из формулы (1.8) для условия $P_- U(\mu_0) P_K f_0 = 0$ имеем

$$\left(\frac{\mu_0 - k_0}{m} T_+ + K_+ \right) f_+ = T_+ \left(\frac{\mu_0 - k_0}{m} I_+ + T_+^* K_+ \right) f_+ = 0,$$

откуда также следует формула (1.10). Из теоремы об отображении спектра следует, что соотношения (1.9), (1.10) равносильны, поскольку операторы A_K^+ , $T_+^* K_+$ и $K_+^* T_+$ являются функциями одного и того же переменного. Таким образом, условие (1.7) выполняется тогда и только тогда, когда μ_0 является собственным значением оператора $-mA_K^+$. Теорема 1.2 доказана.

Замечание 1.2. В случае $TK \neq KT$ и при условии $\dim \mathcal{H}_\pm = n$ самосопряженная матрица A_K^+ не является унитарной, следовательно множество $\sigma_p(-mA_K^+) \cap \mathbb{R} \cap (-m, m)$ не пусто и содержит не более чем n точек. В бесконечномерном случае при этом условии точечный спектр оператора $\mathcal{D}_K$ может и отсутствовать.

Замечание 1.3. Результаты этого параграфа идентичны результатам работы [5], где рассматривается невозмущенный оператор Дирака $\mathcal{D}_K^0$.

§2. S -МАТРИЦА ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Рассмотрим уравнение (1.1) при $\mu \in \mathbb{R} \setminus [-m, m]$. Здесь мы дополнительно будем предполагать, что перестановочная с оператором T часть $V_+(\tau)$ потенциала $V(\tau)$ такова, что

$$\int_0^\infty \tau \|V_+(\tau)\| d\tau < \infty.$$

В работе [6] доказано, что при таких условиях на потенциал для пары $(\mathcal{D}_0^{0*}, \mathcal{D}_0^*)$ существует операторнозначное ядро $N(\tau, t)$, $(0 \leq \tau \leq t < \infty)$ такое, что действующий в $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ интегральный оператор

$$[(I + N)f](\tau) = f(\tau) + \int_\tau^\infty N(\tau, t) f(t) dt$$

обладает свойством

$$(I + N)\mathcal{D}_0^{0*} f = \mathcal{D}_0^*(I + N)f, \quad f \in D(\mathcal{D}_0^{0*}). \quad (2.1)$$

Оператор $I + N$ имеет обратный $I + M$ такого же вида.

Пусть $\mathcal{E}^0(\tau, \mu)$ – оператор Коши невозмущенного уравнения

$$\mathcal{J} \frac{d\mathcal{E}^0(\tau, \mu)}{d\tau} = (\mu I + mT) \mathcal{E}^0(\tau, \mu), \quad \mathcal{E}^0(0, \mu) = I, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus [-m, m]$$

и $k = \sqrt{\mu^2 - m^2}$ – регулярная ветвь, для которой $\mu k > 0$. Вводя оператор $\mathcal{J}(\mu) = \frac{1}{k}(\mu I - mT)$, $\mathcal{J}^2(\mu) = -I$, верхнее уравнение можем представить в

виде

$$\mathcal{J}(\mu) \frac{d\mathcal{E}^0(\tau, \mu)}{d\tau} = k \mathcal{E}^0(\tau, \mu).$$

Полагая $P_{\pm}(\mu) = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J}(\mu))$, имеем $\mathcal{E}^0(\tau, \mu) = e^{-ik\tau} P_+(\mu) + e^{ik\tau} P_-(\mu)$. Обозначая

$$U^{\pm 1}(\mu) = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}} \left(I \pm \frac{\mu-k}{m} T \right),$$

имеем $U(\mu)\mathcal{J}(\mu)U^{-1}(\mu) = \mathcal{J}$, следовательно, $U(\mu)P_{\pm}(\mu)U^{-1}(\mu) = P_{\pm}$.

Рассмотрим операторную функцию

$$\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu) = (I + N)\mathcal{E}^0(\tau, \mu) = \mathcal{E}^0(\tau, \mu) + \int_{\tau}^{\infty} N(\tau, t)\mathcal{E}^0(t, \mu) dt. \quad (2.2)$$

Из формулы (2.1) следует, что $\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu)$ является решением уравнения

$$\mathcal{J}\mathcal{E}'_{\infty}(\tau, \mu) - V(\tau)\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu) = (\mu I + mT)\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu) \quad (2.3)$$

таким, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu) - \mathcal{E}^0(\tau, \mu)\| = 0. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.3) имеем $(\mathcal{E}_{\infty}^*(\tau, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu))' = 0$, значит, $\mathcal{E}_{\infty}^*(\tau, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu)$ — постоянный оператор. Очевидно, $\mathcal{E}^{0*}(\tau, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}^0(\tau, \mu) = \mathcal{J}$ и из формулы (2.4) следует, что $\mathcal{E}_{\infty}^*(\tau, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu) = \mathcal{J}$, т.е. функция $\mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu)$ является $\mathcal{J}$ -унитарной и, следовательно, она обратима и $\mathcal{E}_{\infty}^{-1}(\tau, \mu) = \mathcal{E}^{\tau}(\tau, \mu)$. Обозначив $\mathcal{A}_0(\mu) = \mathcal{E}_{\infty}^{-1}(\tau, \mu)$ и воспользовавшись формулами $\mathcal{J}^{\tau}(\mu) = -\mathcal{J}(\mu)$, $P_{\pm}^{\tau} = P_{\pm}(\mu)$, из (2.2) получим

$$\mathcal{A}_0(\mu) = \left[I + \int_0^{\infty} N(0, t)\mathcal{E}^0(t, \mu) dt \right]^{\tau} = I + \int_0^{\infty} (e^{ikt} P_+(\mu) + e^{-ikt} P_-(\mu)) N(t) dt,$$

где $N(t) = N^{\tau}(0, t)$. Операторная функция $\mathcal{A}_0(\mu)$, очевидно, $\mathcal{J}$ -унитарна.

Для операторной функции $\mathcal{E}(\tau, \mu) = \mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu)\mathcal{A}_0(\mu)$ имеем $\mathcal{E}(0, \mu) = I$. Следовательно, единственное решение задачи (1.1) при $\mu \in R \setminus [-m, m]$ запишется в виде

$$f(\tau, \mu) = \mathcal{E}(\tau, \mu)P_K f_0 = \mathcal{E}_{\infty}(\tau, \mu)\mathcal{A}_0(\mu)P_K f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}.$$

Из условия (2.4) получим асимптотическую формулу

$$f(\tau, \mu) \sim f_{\infty}(\tau, \mu)\mathcal{E}^0(\tau, \mu)\mathcal{A}_0(\mu)P_K f_0, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Функция $f_\infty(\tau, \mu)$, очевидно, является решением невозмущенного уравнения Дирака, удовлетворяющим граничному условию $f_\infty(0, \mu) = \mathcal{A}_0(\mu) P_K f_0$. Выясним характер такого условия. Функцию $f_\infty(\tau, \mu)$ представим в виде

$$f_\infty(\tau, \mu) = \mathcal{E}^0(\tau, \mu) U^{-1}(\mu) \mathcal{A}(\mu) P_K f_0,$$

где функция $\mathcal{A}(\mu) = U(\mu) \mathcal{A}_0(\mu)$ остается $\mathcal{J}$ -унитарной, поскольку для оператора $U(\mu) = U^*(\mu)$ имеем $U(\mu) \mathcal{J} U(\mu) = \mathcal{J}$. Из соотношений $U(\mu) P_\pm(\mu) = P_\pm U(\mu)$, $P_\pm(\mu) U^{-1}(\mu) = U^{-1}(\mu) P_\pm$ получим

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_0(\tau, \mu) U^{-1}(\mu) [e^{-ik\tau} P_+ + e^{ik\tau} P_-], \\ \mathcal{A}(\mu) &= U(\mu) + \int_0^\infty (e^{ikt} P_+ + e^{-ikt} P_-) U(\mu) N(t) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В представлении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ имеем

$$\mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}, \quad N(t) = \begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & N_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad P_K f_0 = \begin{bmatrix} f_+ \\ K_+ f_+ \end{bmatrix},$$

где $f_+ = P_+ f_0 + K_+^* P_- f_0$. Следовательно

$$f_\infty(\tau, \mu) = U^{-1}(\mu) \begin{bmatrix} e^{-ik\tau} [\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu) K_+] f_+ \\ e^{ik\tau} [\mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu) K_+] f_+ \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Из $\mathcal{J}$ -унитарности функции $\mathcal{A}(\mu)$ следует (см. [7]) обратимость оператора $\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu) K_+$. Из этого также следует то, что дробно-линейное преобразование $S_K(\mu) = [\mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu) K_+] [\mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu) K_+]^{-1}$ частично изометрического оператора K_+ является частично изометрическим оператором, т.е. $S_K^*(\mu) S_K(\mu) = I_+$, $S_K(\mu) S_K^*(\mu) = I_-$. Обозначим $S_{K+}(\mu) = \mathcal{A}_{11}(\mu) + \mathcal{A}_{12}(\mu) K_+$, $S_{K-}(\mu) = \mathcal{A}_{21}(\mu) + \mathcal{A}_{22}(\mu) K_+$. Если $f_+(\mu) = S_{K+}(\mu) f_+$, то формула (2.7) примет вид

$$f_\infty(\tau, \mu) = U^{-1}(\mu) \begin{bmatrix} e^{-ik\tau} f_+(\mu) \\ e^{ik\tau} S_{K-}(\mu) f_+(\mu) \end{bmatrix},$$

так что для каждого фиксированного $\mu \in \mathbb{R} \setminus [-m, m]$ функция $f_\infty(\tau, \mu)$ является решением невозмущенного уравнения, удовлетворяющим самосопряженному граничному условию в нуле, отвечающему ортогональному проектору

$$P_S(\mu) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_+ & S_{K-}^*(\mu) \\ S_{K-}(\mu) & I_- \end{bmatrix}.$$

Операторная функция $S_K(\mu)$ называется S -матрицей пары $(\mathcal{D}_K^0, \mathcal{D}_K)$.

Замечание 2.1. В случае $m = 0$ имеем $k = \mu$, $U(\mu) = I$, $\mathcal{J}(\mu) = \mathcal{J}$ и функция $S_K(\mu)$ обращается в S -матрицу пары (C_K^0, C_K) канонических операторов, исследованных в работе [2], где приведено обоснование определения S -матрицы с помощью асимптотической формулы (2.5).

Другие свойства S -матрицы обусловлены свойствами ее факторизующих множителей $S_{K\pm}(\mu)$. Обозначив $N_1(t) = N_{11}(t) + N_{12}(t)K_+$, $N_2(t) = N_{21}(t) + N_{22}(t)K_+$, из формулы (2.6) имеем

$$A(\mu) \begin{bmatrix} I_+ \\ K_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{K_+}(\mu) \\ S_{K_-}(\mu) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}} \left\{ \begin{bmatrix} I_+ & \frac{\mu-k}{m} T_+^* \\ \frac{\mu-k}{m} T_+ & I_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ \\ K_+ \end{bmatrix} + \int_0^\infty \begin{bmatrix} e^{ikt} I_+ & e^{ikt} \frac{\mu-k}{m} T_+^* \\ e^{-ikt} \frac{\mu-k}{m} T_+ & e^{-ikt} I_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix} dt \right\},$$

так что

$$S_{K_+}(\mu) = P_+ A(\mu) P_K P_+ = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}} \times \left[I_+ + \int_0^\infty e^{ikt} N_1(t) dt + \frac{\mu-k}{m} T_+^* K_+ \left(I_+ + \int_0^\infty e^{ikt} K_+^* N_2(t) dt \right) \right], \quad (2.8_+)$$

$$S_{K_-}(\mu) = P_- A(\mu) P_K P_+ = \sqrt{\frac{\mu+k}{2k}} K_+ \times \left[\frac{\mu-k}{m} K_+^* T_+ \left(I_+ + \int_0^\infty e^{-ikt} N_1(t) dt \right) + I_+ + \int_0^\infty e^{-ikt} K_+^* N_2(t) dt \right]. \quad (2.8_-)$$

При $\mu \rightarrow \infty$ имеем $S_{K_+}(\mu) \rightarrow I_+$ и $S_{K_-}(\mu) \rightarrow K_+$. Из формулы (2.1) следует, что функции $\mathcal{E}_\infty(\tau, \lambda) P_\pm(\lambda) = (I + N) (e^{\mp i k \tau} P_\pm(\lambda))$ являются решениями уравнения (2.3) при $\lambda \in \Lambda_\mp$. Поскольку для любого $\lambda \in \Lambda$ имеем $P_\pm^T(\bar{\lambda}) = P_\pm(\lambda)$, то справедлива формула

$$P_\pm(\lambda) \mathcal{E}_\infty^T(\tau, \bar{\lambda}) = e^{\pm i k \tau} P_\pm(\lambda) + \int_\tau^\infty e^{\pm i k t} P_\pm(\lambda) N^T(\tau, t) dt, \quad \lambda \in \Lambda_\pm. \quad (2.9)$$

Положим

$$P_\pm(\lambda) \mathcal{A}_0(\lambda) = P_\pm(\lambda) \mathcal{E}_\infty^T(0, \bar{\lambda}) = P_\pm(\lambda) + \int_0^\infty e^{\pm i k t} P_\pm(\lambda) N(t) dt, \quad \lambda \in \Lambda_\pm.$$

Операторные функции

$$U(\lambda) P_\pm(\lambda) \mathcal{A}_0(\lambda) = P_\pm \left(U(\lambda) + \int_0^\infty e^{\pm i k t} U(\lambda) N(t) dt \right) = P_\pm \mathcal{A}_\pm(\lambda)$$

аналитичны, соответственно, в $\Lambda_{\pm}$, и функции $S_{K\pm}(\lambda) = P_{\pm}A_{\pm}(\lambda)P_KP_{\pm}$ определяются формулами (2.8 $_{\pm}$) с заменой вещественного параметра μ на комплексный параметр $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, следовательно, функции $S_{K\pm}(\lambda)$ являются аналитическими продолжениями функций $S_{K\pm}(\mu)$.

Теорема 2.1. В случае $\dim \mathcal{H}_{\pm} = n$ матрицы-функции $S_{K\pm}(\lambda)$ обратимы, соответственно, в $\Lambda_{\pm}$.

Доказательство. Для произвольного $\lambda_0 \in \Lambda_{+}$ имеем

$$S_{K+}(\lambda_0) = U(\lambda_0) P_+(\lambda_0) A_0(\lambda_0) P_K P_+ = U(\lambda_0) P_+(\lambda_0) \mathcal{E}_{\infty}^r(0, \bar{\lambda}_0) P_K P_+.$$

Поскольку матрица $U(\lambda_0)$ обратима и $P_K z_+ \neq 0$ для любого $z_+ \in \mathcal{H}_+$, достаточно рассмотреть матрицу $P_+(\lambda_0) \mathcal{E}_{\infty}^r(0, \bar{\lambda}_0) P_K$, которая отображает $\mathcal{H}_K$ на n -мерное подпространство $P_+(\lambda_0) \mathcal{H} = \left\{ z_+ - \frac{\lambda_0 - k_0}{m} T_+ z_+ \mid z_+ \in \mathcal{H}_+ \right\}$. Сопряженной к ней будет матрица

$$\begin{aligned} P_K [P_+(\lambda_0) \mathcal{E}_{\infty}^r(0, \bar{\lambda}_0)]^* &= P_K \left[P_+^*(\lambda_0) + \int_0^{\infty} e^{-i\bar{k}_0 t} (-\mathcal{J}N(0, t) \mathcal{J}) P_+^*(\lambda_0) dt \right] = \\ &= P_K (-\mathcal{J}) \left[P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} + \int_0^{\infty} e^{-i\bar{k}_0 t} N(0, t) P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} dt \right] = \\ &= -\mathcal{J} P_K^{\perp} \left[P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} + \int_0^{\infty} e^{-i\bar{k}_0 t} N(0, t) P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} dt \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Переходя к сопряженным матрицам в формуле (2.9), получим

$$[P_+(\lambda_0) \mathcal{E}_{\infty}^r(0, \bar{\lambda}_0)]^* = -\mathcal{J} \left[e^{-i\bar{k}_0 t} P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} + \int_{\tau}^{\infty} N(\tau, t) e^{-i\bar{k}_0 t} P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} dt \right].$$

Если $P_K [P_+(\lambda_0) \mathcal{E}_{\infty}^r(0, \bar{\lambda}_0)]^* z_+ = 0$ для ненулевого вектора $z_+ \in P_+(\lambda_0) \mathcal{H}$, то матрица в квадратных скобках формулы (2.10) либо аннулирует вектор z_+ , либо переводит его в ненулевой вектор $y \in \mathcal{H}_K$, поскольку $P_K^{\perp} y = 0$. В первом случае ненулевая (в силу обратимости оператора $I + N$) векторная функция

$$f(\tau) = e^{-i\bar{k}_0 \tau} P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} z_+ + \int_{\tau}^{\infty} N(\tau, t) e^{-i\bar{k}_0 t} P_+(\bar{\lambda}_0) \mathcal{J} z_+ dt$$

является решением уравнения Дирака, удовлетворяющим граничному условию $f(0) = 0$, что противоречит единственности решения задачи Коши. Во втором случае функция $f(\tau)$ удовлетворяет самосопряженному граничному условию

$f(0) = P_K f(0)$, принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$, поскольку $\bar{k}_0 \in \Lambda_-$, и является решением уравнения Дирака с параметром $\bar{\lambda}_0 \in \Lambda_-$, что снова приводит к противоречию. Этим доказано, что матрица $S_{K+}^*(\lambda_0)$ обратима, следовательно, обратима и матрица $S_{K+}(\lambda_0)$. Для матрицы $S_{K-}(\lambda)$ доказательство аналогично приведенному, и теорема 2.1 доказана.

ABSTRACT. The main result of the paper is the proof that point spectra of perturbed ($\mathcal{D}_k$) and nonperturbed ($\mathcal{D}_k^0$) Dirac operators coincide. The properties of factorization of S -matrix written for the pair ($\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^0$) are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. Г. Гасымов, "Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ ", Труды ММО, т. 19, стр. 41 — 112, 1968.
2. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 11, № 4, стр. 291 — 313, 1976.
3. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, "О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами, и разложения по собственным функциям этого уравнения", ДАН СССР, т. 208, № 6, стр. 1268 — 1271, 1973.
4. П. Э. Мелик-Адамян, "Описание спектров операторов Дирака", Уч. записки ЕГУ, т. 164, № 1, стр. 18 — 26, 1987.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 12, № 1, стр. 10 — 31, 1977.
6. П. Э. Мелик-Адамян, "Об операторе преобразования для операторов Дирака", Уч. записки ЕГУ, т. 162, № 2, стр. 3 — 12, 1986.
7. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами", Матем. Исследования, т. 2, № 3, стр. 64 — 96, 1967.

25 февраля 1997

Ереванский государственный университет