

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

М. С. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 6, 1997

Рассматривая неполную систему рациональных функций в пространстве H_+^2 в верхней полуплоскости, В. Х. Мусояном был предложен метод суммирования биортогонального разложения М. М. Джрбашяна. В настоящей работе этот результат устанавливается во всех пространствах H_+^p ($1 < p < \infty$).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(z)$ – предел последовательности $\sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e_k(z)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\{e_k\}_1^\infty$ – система рациональных функций, не полная относительно любого из пространств Харди H_+^p ($1 < p < \infty$) в верхней полуплоскости. Рассматривается ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k(z)$, где $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)}$, и ставится задача суммирования этого ряда к функции $f(z)$. Она сводится к построению метода суммирования биортогонального разложения функции $f(z)$ по неполной системе $\{e_k\}_1^\infty$, что и предлагается в настоящей работе. Следует отметить, что в случае $p = 2$ эта задача решена в работе [1], где существенно была использована гильбертова структура пространства H_+^2 . В случае $1 < p < \infty$ решение аналогичной задачи представлено в работе [2].

§1. ПОРОЖДЕННЫЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В ПРОСТРАНСТВАХ H_+^p ($1 < p < \infty$)

Пусть $\mathbb{R}^*$ – пространство, сопряженное к линейному нормированному пространству $\mathbb{R}$. Линейно-независимую $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ и систему функционалов $\{u_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}^*$ называют биортогональными, если

$$u_k(e_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases}$$

Известно, что для существования биортогональной системы $\{u_k\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}_1^\infty$ была минимальной, т.е. отбрасывание хотя бы одного элемента e_k вызывает уменьшение замкнутой линейной оболочки оставшейся системы в пространстве $\mathbb{R}$.

Пусть $1 < p < \infty$ и рассмотрим пространство $\mathbb{R} = H_+^p$, т.е. пространство всех функций $f(z)$, аналитических в верхней полуплоскости $G^{(+)} = \{z: \text{Im} z > 0\}$, для которых

$$\|f\|_{H_+^p} = \sup_{0 < y < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Известно (см., например, [5]), что функции пространства H_+^p почти везде на вещественной оси имеют угловые граничные значения, и класс граничных функций составляет подпространство в пространстве $L^p(-\infty, +\infty)$, причем это подпространство изоморфно и изометрично пространству H_+^p . Поэтому впредь мы не будем различать пространство предельных функций от самого пространства H_+^p и для обозначений норм функций из $L^p(-\infty, +\infty)$ и H_+^p будем использовать единый символ $\|\cdot\|_p$. Нам понадобится следующая (см. [3], стр. 157 — 160)

Теорема 1 (М. Рисс). Если $g(x) \in L^p(-\infty, +\infty)$, где $1 < p < \infty$, то функция

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x - z} dx$$

входит в класс H_+^p , и существует постоянная A_p , зависящая только от p такая, что $\|h\|_p \leq A_p \|g\|_p$.

Как известно (см. [3], стр. 177), при $1 < p < \infty$ сопряженным пространством пространства H_+^p является фактор-пространство L^q/H_+^q , т.е., каждый функционал $u \in H_+^p$ имеет следующее представление:

$$u(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_\alpha(x) dx,$$

где $\{g_\alpha\}$ — некоторый смежный класс в пространстве L^q/H_+^q , $q = p/(p-1)$.

Применением теоремы М. Рисса нетрудно убедиться, что функционал $u \in H_+^p$ можно представить в более удобной для нашей цели форме

$$u(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi(x)} dx, \quad (1)$$

где φ — единственная функция из H_+^q . Пусть $\{e_k\}_1^\infty$ — минимальная система функций из H_+^p ($1 < p < \infty$). Если для функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$ выполнены условия

$$u_k(e_m) = \delta_{km}, \quad u_k(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(x) \overline{\varphi_k(x)} dx, \quad e \in H_+^p, \quad \varphi_k \in H_+^q, \quad q = p/(p-1),$$

$k, m = 1, 2, \dots$, то $\{e_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_k\}_1^\infty$ будем называть биортогональными.

С помощью (1) нетрудно убедиться, что система, биортогональная системе $\{e_k\}_1^\infty$, единственна тогда и только тогда, когда $E_p = H_+^p$, где E_p — замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве H_+^p . Следует отметить, что условие $E_p = H_+^p$ эквивалентно условию полноты системы $\{e_k\}_1^\infty$ относительно пространства H_+^q ($q = p/(p-1)$). Поэтому

(А). если система $\{e_k\}_1^\infty$ полна относительно любого из пространств H_+^p , то $E_p \neq H_+^p$ для всех $p \in (1, \infty)$. Верно и обратное.

Пусть система $\{e_k\}_1^\infty$ минимальна во всех пространствах H_+^p , $1 < p < \infty$ и неполна относительно любого из них. Если добавок к этому $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset E_p$ для всех $p \in (1, \infty)$, где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — система, биортогональная к системе $\{e_k\}_1^\infty$, то назовем $\{\varphi_k\}_1^\infty$ биортогональной системой, порожденной системой $\{e_k\}_1^\infty$. Легко проверить, что порожденная биортогональная система единственна.

Если $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — биортогональная система, порожденная системой $\{e_k\}_1^\infty$, то порожденным биортогональным разложением функции $f \in H_+^p$ назовем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(f) c_k(z), \quad (2)$$

где

$$u_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx.$$

Определение. Будем говорить, что пространство H_+^p ортогонально проектируется на подпространство E_p , если для любой функции $f \in H_+^p$ существует единственная функция $P_{E_p} f \in E_p$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - P_{E_p} f(x)] \overline{e_k(x)} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функцию $P_{E_p} f$ назовем ортогональной проекцией функции $f \in H_+^p$ на подпространство E_p .

Ниже предлагается метод суммирования ряда (2) к $P_{E_p} f$.

§2. НЕПОЛНАЯ СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В полуплоскости $G^{(+)} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - \lambda_k)^{s+1}}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (3)$$

где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность различных комплексных чисел из $G^{(+)}$.

Функции системы (3) входят во все пространства H_+^p ($1 < p < \infty$). Известно (см. [4]), что для неполноты системы (3) относительно любого из пространств H_+^p ($1 < p < \infty$) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m_k \frac{\operatorname{Im} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty. \quad (4)$$

В $G^{(+)}$ рассмотрим систему функций

$$\varphi_{ks}(z) = \frac{B(z)}{s! 2\pi} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s}{B(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (5)$$

где $c_k \subset G^{(+)}$ — окружность с центром в точке λ_k и не охватывающая других точек λ_i , отличных от λ_k ; $B(z)$ — произведение Бляшке в $G^{(+)}$. Мы предполагаем, что $z \notin c_k$. Заметим, что условие (4) необходимо и достаточно для существования произведения Бляшке.

Лемма. Система (5) является биортогональной системой, порожденной системой (3), т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_{lq}(x) \overline{\varphi_{ks}(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e_{lq}(x)} \varphi_{ks}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } l = k, q = s, \\ 0 & \text{при } l \neq k, \\ 0 & \text{при } l = k, q \neq s. \end{cases} \quad (6)$$

Функции системы (5) принадлежат замкнутым линейным оболочкам E_p системы (3) в пространствах H_+^p , $p \in (1, \infty)$.

Доказательство. Введем обозначения

$$\varphi_{k,n}(z) = \frac{B_n(z)}{s! 2\pi} \int_{c_k} \frac{(\zeta - \lambda_k)^s}{B_n(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta, \quad n \geq l,$$

где

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \left[\frac{z - \lambda_j}{z - \bar{\lambda}_j} \cdot \nu_j \right]^{m_j},$$

$\nu_k = \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \lambda_k^2}$, и условимся считать, что $\nu_k = 1$ при $\lambda_k = i$. Тогда имеем (см. [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e_{lq}(x)} \varphi_{k,n}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } l = k, q = s, \\ 0 & \text{при } l \neq k, \\ 0 & \text{при } l = k, q \neq s. \end{cases} \quad (7)$$

Для установления (6) докажем, что в (7) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Для этого достаточно доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{k,n}(x)$ стремится к $\varphi_{k,s}(x)$ по нормам H_+^p . Действительно

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,n}(x) - \varphi_{k,s}(x)| &\leq |B_n(x)| \cdot \int_{c_k} \frac{|\zeta - \lambda_k|^s}{|\zeta - x|} \cdot \left| \frac{1}{B_n(\zeta)} - \frac{1}{B(\zeta)} \right| \cdot |d\zeta| + \\ &+ |B_n(x) - B(x)| \int_{c_k} \frac{|\zeta - \lambda_k|^s}{|\zeta - x|} \cdot \frac{|d\zeta|}{|B(\zeta)|}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $(1 + |x|)|\zeta - x|^{-1}$, как функция двух переменных $x \in (-\infty, +\infty)$ и $\zeta \in c_k$ непрерывно и равномерно относительно $\zeta \in c_k$ стремится к 1 при $|x| \rightarrow \infty$, то она ограничена и, следовательно, для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство

$$|\zeta - x|^{-1} \leq M(1 + |x|)^{-1}, \quad \zeta \in c_k, \quad -\infty < x < \infty, \quad (9)$$

Кроме того, функции $B_n(\zeta)$ равномерно стремятся к $B(\zeta)$ на c_k и $|B_n(x)| = 1$, $n = 1, 2, \dots$ почти для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому первый интеграл в (8) сходится к нулю по нормам H_+^p . Имеем (см. [3], стр. 147 и [5], стр. 187)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B_n(x) - B(x)|^p \frac{dx}{1 + x^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для всех $f \in L^1(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B_n(x) - B(x)|^p |f(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Теперь из (9) и (10) следует, что и второе слагаемое в (8) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ по нормам пространств H_+^p .

Остается доказать, что система (5) порождается системой (3). Допустим обратное: существует некоторая функция φ_{lq} системы (5), не принадлежащая

искоторому E_p ($1 < p < \infty$). Тогда существует функционал $\Phi \in H_+^{p'}$ такой, что $\Phi(\varphi_{lq}) \neq 0$ и $\Phi|_{E_p} = 0$. Пусть

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi(x)} dx, \quad \psi \in H_+^q, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Из условия $\Phi|_{E_p} = 0$ вытекает, что

$$\Phi(e_{ks}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1,$$

откуда и

$$\psi^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1. \quad (11)$$

Тогда функция

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{B(z)(z - \zeta)}, \quad \zeta \in c_l$$

входит в класс H_+^1 , поэтому (см. [3], стр. 151)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 0. \quad (12)$$

С другой стороны, применяя теорему Фубини, получим

$$0 \neq \overline{\Phi(\varphi_{lq})} = \frac{1}{q! 2\pi i} \int_{c_l} \frac{(\zeta - \lambda_l)^q}{B(\zeta)} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx,$$

что находится в противоречии с (12). Лемма доказана.

Отметим, что порожденная биортогональной системой (3) система была построена и систематически использована М. М. Джрбашяном (см. [6] — [8]), интегральное же представление (5) получено В. Х. Мусояном [1]. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. Пусть $1 < p < +\infty$ и $f \in E_p$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad (13)$$

где *l.i.m.* означает предел по норме пространства H_+^p , а

$$a_{ks}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi_{ks}(x)} dx, \quad r_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda - \bar{\lambda}_k} \right)^{m_k}.$$

Доказательство. В работе [1] установлено следующее равенство :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\bar{z} - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) B_n(x)}{B(x)} \frac{dx}{x-z} - \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{B(x)(x-z)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $f \in H_+^1$, $z \in G^{(+)}$. Оно верно и для любой функции $f \in H_+^p$ ($1 < p < \infty$) и, в частности, для $f \in E_p$.

Перейдем к пределу в (14) при $n \rightarrow \infty$. В силу теоремы М. Рисса и (10) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\bar{z} - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = f(z) - \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{B(x)(x-z)}. \quad (15)$$

Пусть

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x), \quad \text{где} \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(x).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x) dx}{B_n(x)(x-z)} = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} \frac{s!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{B_n(x)(x-\bar{\lambda}_k)^{s+1}(x-z)}. \quad (16)$$

Рациональные функции

$$F_{k,n}(\omega) = \frac{1}{B_n(\omega)(\omega - \bar{\lambda}_k)^{s+1}(\omega - z)}, \quad z \in G^{(+)}$$

не имеют полюсов на действительной оси, аналитичны в нижней полуплоскости $G^{(-)} = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$ и $F_{k,n}(\omega) = O(\omega^{-s-2})$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, \dots, m_k - 1$. Применяя теорему о вычетах, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{k,n}(\omega) dx = -2\pi i \operatorname{Res}(F_{k,n}, \infty) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Следовательно, сумма в (16) равна нулю. Еще раз учитывая (10) и применив теорему М. Рисса, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{B(x)(x-z)} = 0,$$

т.е. правая часть равенства (15) равна $f(z)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Если последовательность конечных линейных комбинаций функций из неполной системы (3)

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(z)$$

сходится к функции $f(z)$ по норме пространства H_+^p , $1 < p < \infty$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\bar{z} - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

где $a_{ks} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{ks}^{(n)}$.

Учитывая (A), ясно, что для произвольной функции $f \in H_+^p$ ($1 < p < \infty$) равенство (13), вообще говоря, не имеет места. Однако можно утверждать следующее.

Следствие 2. При $1 < p < \infty$ пространство H_+^p ортогонально проектируется на подпространство E_p , причем

$$P_{E_p} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{\bar{z} - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad f \in H_+^p. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $f \in H_+^p$. Так как функция

$$H(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) dx}{B(x)(x-z)}$$

входит в класс H_+^p , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \overline{e_{ks}(x)} dx = -H^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1. \quad (18)$$

Учитывая (15) и (18), для доказательства следствия 2 достаточно убедиться, что $H_1(z) = f(z) - H(z)$ — единственная функция из E_p , удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - H_1(x)] \overline{e_{ks}(x)} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1. \quad (18')$$

Действительно, пусть $H_2 \in E_p$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) - H_2(x)] \overline{e_{ks}(x)} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1. \quad (19)$$

Тогда из (18') и (19) следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [H_1(x) - H_2(x)] \overline{e_{ks}(x)} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Следовательно

$$a_{ks}(H_1 - H_2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1. \quad (20)$$

Но так как $H_1 - H_2 \in E_p$, то в силу доказанной теоремы 2

$$H_1(z) - H_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(H_1 - H_2) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{\tau_n(\lambda)}{\bar{z} - \lambda} \right\}_{\lambda=\lambda_k} \quad (21)$$

Теперь из (20) и (21) вытекает равенство $H_1(z) = H_2(z)$ при $z \in G^{(+)}$. Следствие 2 доказано.

ABSTRACT. For an incomplete system of rational functions in the space H_+^p over the upper half-plane, V. Kh. Musoyan has constructed a summation method for biorthogonal decomposition of M. M. Djrbashian. The present paper extends that result to all spaces H_+^p , ($1 < p < \infty$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 2, стр. 163 — 186, 1986.
2. М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполной системе рациональных функций в пространствах H^p ($1 < p < \infty$)", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 5, стр. 27 — 38, 1997.
3. П. Кусис, Введение в теорию пространств H^p , М., Мир, 1984.
4. В. М. Мартиросян, "Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем, и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 13, № 5 — 6, стр. 490 — 531, 1978.
5. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
6. М. М. Джрбашян, "Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций", Мат. Сборник, т. 114 (156), № 1, стр. 3 — 84, 1981.
7. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси", Мат. Сборник, т. 95 (137), стр. 418 — 444, 1974.
8. М. М. Джрбашян, "Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости", Изв. АН СССР, Математика, т. 42, стр. 1323 — 1384, 1978.