О ВЕСОВЫХ ОЦЕНКАХ ФУНКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА–СЛОБОДЕЦКОГО

Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

Доказываются весовые оценки для производных дифференцируемых функций многих переменных в нормах анизотропных пространств Соболева–Слободецкого или Никольского–Бесова.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются весовые неравенства в анизотропных пространствах типа классических пространств Соболева–Слободецкого или Никольского–Бесова. Полученные неравенства для дифференцирусмых функций многих переменных с одной стороны обобщают известные неравенства в изотропных пространствах (см. [1] – [8]), а с другой стороны развивают их в различных направлениях.

Помимо самостоятельного интереса эти неравенства могут быть применены при доказательстве существенной самосопряженности гипоэллиптических операторов, при изучении вырождающихся гипоэллиптических уравнений. Например, в работах [7], [8] подобные неравенства, полученные в изотропных пространствах W_2^l Соболева, применены при доказательстве существенной самосопряженности эллиптических операторов, в работе [9] аналогичные неравенства, полученные в анизотропных пространствах $W_2^{l_1,\dots,l_n}$ Соболева–Слободецкого ($l_1,\dots,l_n$ – целые неотрицательные числа) применеы при доказательстве самосопряженности полуэллиптических операторов.

Доказанные в настоящей работе неравенства мы намерены применить при получении критериев самосопряженности для одного класса регулярных гипоэллиптических операторов.

Будем пользоваться стандартными обозначениями : $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство. $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{N}_0^n = \mathcal{N}_0 \times \cdots \times \mathcal{N}_0$ и

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \text{ при } \alpha \in \mathcal{N}_0^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, ..., n$ – обобщенные по Соболеву производные. Через $\{e^j\}_1^n$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Лемма 1.1. *Пусть $\chi > 0$, $2 \le m \in \mathcal{N}$, $a_j \ge 0$ $(j = 0, 1, ..., m)$. Тогда существуют числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства*

$$(1-\varepsilon)a_j \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{j+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{j-1} + \chi a_0 \tag{1.1}$$

влекут неравенства

$$a_j \le a_m + \chi' a_0, \quad j = 1, ..., m-1. \tag{1.2}$$

Доказательство. Докажем больше, а именно, существование чисел $\varepsilon \in (0,1)$, $\chi' > 0$ и функции $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ таких, что неравенства (1.1) влекут неравенства

$$a_j \le \left[\frac{j}{m} + \delta(\varepsilon)\right] a_m + \chi' a_0, \quad j = 1, ..., m-1. \tag{1.3}$$

Доказательство этих неравенств проведем по индукции по m. При $m = 2$ из (1.1) получаем

$$a_1 \le \left[\frac{1}{2} + \delta(\varepsilon)\right] a_2 + \chi' a_0, \tag{1.4}$$

где

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad \chi' = \frac{\chi}{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Чтобы при $m = 2$ из неравенств (1.4) получить неравенства (1.2), достаточно выбрать любое $\varepsilon \in (0, 1/3)$.

Пусть неравенства (1.3) доказаны при $m \le k$. Докажем их при $m = k+1$. Из (1.1) при $m = k+1$, $j = k$ и из (1.3) при $m = k$, $j = k-1$ имеем

$$(1-\varepsilon)a_k \le \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k-1} + \chi a_0 \le$$

$$\leq \frac{1}{2}(1+\varepsilon)a_{k+1} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\left[\frac{k-1}{k} + \delta(\varepsilon)\right] a_k + (\chi+\chi')a_0.$$

Пусть число $\varepsilon \in (0, 1/3)$ выбрано так, что

$$\Delta(\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\left[\frac{k-1}{k} + \delta(\varepsilon)\right] \geq \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$a_k \leq \left[\frac{k-1}{k} + \delta'(\varepsilon)\right] a_{k+1} + \chi'' a_0,$$

где

$$\chi'' = \frac{\chi+\chi'}{\Delta} \leq 4(\chi+\chi'), \quad \delta'(\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{1+\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)} - \frac{k}{k+1},$$

при этом, очевидно, $\delta'(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда и из (1.3) при $m = k$ получаем неравенства (1.3) при $m = k+1$. Лемма 1.1 доказана.

Замечание. Очевидно, если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ неравенства (1.1) влекут (1.2), то это же верно и для любого числа $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Поэтому доказанное предложение можно перефразировать так :

Лемма 1.2. *В условиях леммы 1.1 существуют $\tau \in (0,1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства (1.1) для некоторого $\varepsilon \in (0,\tau)$ влекут (1.2).*

Лемма 1.3. *Пусть $\chi > 0$, $2 \leq m \in \mathcal{N}$, $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$ $(j = 0, 1, ..., m)$, $a_0 = b_0$. Тогда существуют $\varepsilon \in (0,1)$ и $\chi' > 0$ такие, что неравенства*

$$a_k \leq \chi(a_m + a_0), \tag{1.5}$$

$$b_k \leq \chi\left(a_k + \varepsilon\sum_{j=0}^{k-1} a_j + a_0\right), \tag{1.6}$$

$$a_k \leq \chi\left(b_k + \varepsilon\sum_{j=0}^{k-1} a_j + a_0\right) \tag{1.7}$$

влекут неравенства

$$b_k \leq \chi'(b_m + b_0), \tag{1.8}$$

$$a_k \leq \chi'(b_m + b_0), \tag{1.9}$$

$$b_k \leq \chi'(a_m + a_0), \quad k = 1, ..., m. \tag{1.10}$$

Доказательство. Применяя последовательно неравенства (1.7) и (1.5), имеем с некоторой постоянной $c = c(\chi, m) \geq 1$

$$a_k \leq c(b_k + \varepsilon a_m + a_0), \quad k = 0, 1, ..., m.$$

Поэтому, при $k = m$ и $0 < \varepsilon < \tau < 1/(2c)$ получаем $a_m \leq 2c(b_m + a_0)$. Отсюда, из неравенств (1.5) и условия $a_0 = b_0$, приходим к неравенству (1.9).

Применяя неравенства (1.5) и (1.6), получаем с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$b_k \leq c_1 \left(a_m + \varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} b_j + a_0 \right), \quad k = 0, 1, ..., m.$$

Просуммировав эти неравенства по k, имеем с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq c_3 \left(a_m + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} b_k + a_0 \right).$$

Отсюда имеем при $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} c_2$

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \leq 2c_2(a_m + a_0),$$

т.е. неравенства (1.10). Из (1.9) и (1.10) следуют неравенства (1.8) при $\varepsilon \leq$ $\leq \min\{\frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}c_2\}$. Лемма 1.3 доказана.

Ниже будем считать, что числа $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ удовлетворяют условиям (1.2) и (1.8) – (1.10) для некоторого $\chi' > 0$.

§2. ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА–СЛОБОДЕЦКОГО–БЕСОВА

Пусть $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) \in (0, \infty)^n$, $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathcal{N}^n$, $m_i > \mu_i$, $i = 1, ..., n$. Обозначим через $B_2^\mu = B_{2,2}^\mu$ (см. [1], [2]) банахово пространство функций f, определенных на $\mathbb{R}^n$ с конечной нормой

$$\| f|B_2^\mu \| = \| f|b_2^\mu \| + \|f\|, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в L_2, а полунорма $\|\cdot|b_2^\mu\|$ определяется формулой

$$\|f|b_2^\mu\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \|\Delta_i^{m_i}(t) f\|^2 t^{-2\mu_i} \frac{dt}{t}, \tag{2.2}$$

$$\Delta_i(t)F(x) = F(x+te^i) - F(x), \quad \Delta_i^s(t)F = \Delta_i(t)\Delta_i^{s-1}(t)F, \quad s = 2,3,\ldots \quad \Delta_i^0 = 1.$$

В [2] и [3] доказано, что при различных m_i нормы (2.1) эквивалентны, поэтому далее будем предполагать, что

$$m_1 = \cdots = m_n = R > \max_{1\le j\le n}\{\mu_j\}. \tag{2.3}$$

Введем еще локальное пространство

$$B^{\mu}_{2,loc} = \{u : \ u\cdot\varphi \in B^{\mu}_2, \ \varphi \in C_0^{\infty}\} \supset B^{\mu}_2,$$

которое можно определить как множество функций $u \in B^{\mu}_2(G)$ для всякой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$. На протяжении всей работы будем считать постоянным вектор $l = (l_1, ..., l_n) \in \mathcal{N}^n$, $l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_n$. Пусть $a \in \mathcal{N}_0^n$. Положим

$$|a : l| = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{l_i}, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n), \quad \lambda_i = \frac{l_1}{l_i}, \quad i = 1, ..., n.$$

Построим последовательность чисел $d_0, d_1, ..., d_M$ и множеств $N_0, N_1, ..., N_M$ следующим образом :

$$d_0 = l_1, \quad N_0 = \{\beta \in (0,\infty)^n : \ (\lambda,\beta) \equiv \lambda_1\beta_1 + \cdots + \lambda_n\beta_n \le d_0\}.$$

Затем продолжим по индукции :

$$d_j = \max\{(\lambda,\beta) : \ \beta \in N_{j-1}\cap\mathcal{N}_0^n, \ (\lambda,\beta) < d_{j-1}\}, \ N_j = \{\beta \in (0,\infty)^n : \ (\lambda,\beta) \le d_j\}.$$

Очевидно, существует номер $M \ge 1$ такой, что $d_{M-1} > 0$ и $d_M = 0$. Если не все компоненты вектора l (или, что то же самое, вектора λ) равны между собой, то числа $d_1, ..., d_{M-1}$, вообще говоря, нецелые. Но так как эти числа, очевидно, рациональные, то для некоторого натурального числа r числа rd_j, $j = 0, 1, ..., M$ уже целые. Далее через r обозначим наименьшее натуральное число, для которого rd_j, $j = 0, 1, ..., M$ – целые. Очевидно, что $r = 1$ при $l_1 = \cdots = l_n$. В дальнейшем если r – число, а $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – вектор, то положим

$$r\lambda = (r\lambda_1, ..., r\lambda_n), \quad \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

Пример. Пусть $n = 2$ и $l = (8,6) \in \mathcal{N}^2$. Имеем

$$m = 21, \quad \lambda = \left(4, \frac{4}{3}\right), \quad d_0 = \frac{24}{3},\ d_1 = \frac{23}{3}, \ldots,\ d_{18} = \frac{6}{3},\ d_{19} = \frac{4}{3},\ d_{20} = \frac{3}{3},\ d_{21} = 0.$$

При этом $r = 3$ и число d_0 реализуется мультииндексами (8,0), (4,3), (0,6); d_1 – мультииндексами (5,2), (1,5); d_2 – мультииндексами (6,1), (2,4) и т.д.

Введем еще пространство $B_2^{s/(r\lambda)} \equiv B_2^{(sl)/(rl_1)}$, $s = 1, 2, \ldots$, как множество локально суммируемых функций с конечной нормой (2.1), (2.2). Так как

$$\max_{1 \le s \le l_1} \max_{1 \le j \le n} \left\{ \frac{s}{r\lambda_j} \right\} = \max_{1 \le s \le l_1} \left\{ \frac{s}{r} \right\} = \frac{l_1}{r},$$

то число $R = [l_1/r] + 1$ удовлетворяет условию (2.3) для всех $\frac{s}{r\lambda}$, $s = 1, \ldots, l_1$ и поэтому годится для всех пространств. $B_2^{(sl)/(rl_1)}$, $s = 1, \ldots, l_1$.

Введем также множество Φ "весовых" функций φ таких, что $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty$, $0 \le \varphi(x) \le 1$. Для таких функций введем следующие нормы :

$$\|\varphi|\mathbf{C}\| = \max_x |\varphi(x)|, \quad \left\|\varphi|\mathbf{C}^{(l)}\right\| = \max_{0 \le |\alpha:l| \le 1} \|D^\alpha \varphi|\mathbf{C}\| \equiv \max_{0 \le (\lambda,\alpha) \le l_1} \|D^\alpha \varphi|\mathbf{C}\|,$$

и полунорму

$$\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\| = \max_{0 < |\alpha:l| \le 1} \|D^\alpha \varphi|\mathbf{C}\|. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Существует постоянная $C = C(k)$ такая, что для любых $s = 1, \ldots, l_1$, $k \ge s$ $(k \in \mathcal{N})$ и для всех $\varphi \in \Phi$, $u \in B_{3.loc}^{s/(r\lambda)} \cap L_2$*

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le c \left\|\varphi^s u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 + \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|^2 \left[\left\|\varphi^s u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 + \|u\|^2\right], \tag{2.5}$$

где φ^m – m-ая степень функции $\varphi(x)$

Доказательство. При $k = s$ утверждение очевидно. Пусть $k > s$. Так как $|\varphi(x)| \le 1$, то применяя формулу конечых разностей, получим для всех $j =$ $= 1, \ldots, l_1$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in \mathbb{R}^1$

$$\left|\Delta_i^j(t)\varphi^{k-s}[x + (R-j)te^j]\right| \le t^j |D_i^j \varphi^{k-s}(\xi)| \le t^j \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|. \tag{2.6}$$

Так как $R = [l_1/r] + 1$ и $\lambda_j \ge 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $R > s/r$ и R удовлетворяет также условию (2.3) для всех $\frac{s}{r\lambda}$, $s = 1, \ldots, l_1$. Тогда в определении пространств $B_2^{s/(r\lambda)}$

можно брать $m_1 = \cdots = m_r = R$ (см. [2], определение 18.1). Отсюда и из (2.2) имеем

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left\|\Delta_i^R(t)\varphi^k u\right\|^2 t^{-2s/(r\lambda_i)}\,\frac{dt}{t} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} t^{-2s/(r\lambda_i)} \left|\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^s\cdot u)\Delta_i^j(t)\varphi^{k-s}[x+(R-j)te^j]\right|^2 dx\,\frac{dt}{t},$$

где C_R^j – биномиальные коэффициенты. Отсюда и из (2.6) имеем ($c = \max\limits_j\{C_R^j\}$)

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|^2 \sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^R \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2[s/(r\lambda_i)-j]}\left|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^s u)\right|^2 dx\,\frac{dt}{t}.$$

Отсюда и из теоремы 18.2 работы [2], имея в виду то, что r и R – натуральные числа, причем $R > s/r$, а значит

$$R-j-\left(\frac{s}{r\lambda_i}-j\right) = R-\frac{s}{r\lambda_i} > 0,\quad \lambda_i \ge 1,\quad i=1,\dots,n,\quad j=0,1,\dots,R,$$

получаем утверждение леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Существует число $c > 0$ такое, что для любого $k = 1,\dots,l_1-1$ и для всех $\varphi \in \Phi$, $u \in B_{2,loc}^{l_1/(r\lambda)} \cap L_2$*

$$\left[1-c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right]\cdot\left\|\varphi^k u|b_2^{s/(r\lambda)}\right\|^2 \le \frac{1}{2}\left[1+c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right]\cdot\left\|\varphi^{k+1}u|b_2^{(k+1)/(r\lambda)}\right\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[1+c\left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\|\right]\cdot\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2 + c||u||^2. \tag{2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\delta_i(t,x) = [\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)(x)]\left[\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^k u)(x)}\right] - [\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)(x)]\left[\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)(x)}\right],$$

где $i = 1,\dots,n$. Подставляя $\varphi^k u = \varphi(\varphi^{k-1}u)$ и $\varphi^{k+1}u = \varphi(\varphi^k u)$, а также учитывая то, что φ – вещественная функция, причем $|\varphi(x)| \le 1$, имеем при $i = 1,\dots,n$

$$\delta_i(t,x) = \Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\Delta_i^j(t)\varphi[x+(R-j)te^j] -$$

$$-\sum_{j=0}^R C_R^j \Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^j(t)\varphi[x+(R-j)te^j]\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)} = \sum_{j=0}^R C_R^j\Delta_i^j(t)\times$$

$$\times\varphi[x+(R-j)te^j]\left[\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}-\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right].$$

Используя теорему о конечных приращениях, отсюда имеем с некоторой постоянной $c_1>0$

$$|\delta_i(t,x)|\le c_1\sum_{j=1}^R t^j\left\|\varphi|\widetilde{\mathrm{C}^{(l)}}\right\|\cdot\times$$

$$\times\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}-\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|,\quad i=1,...,n.$$

Из определения полунормы в b_2^μ (см. (2.2)) имеем для любого $k=1,...,l_1-1$

$$\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)}\,[\delta_i(t,x)+$$

$$+\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\Big]\;dx\,\frac{dt}{t}\le A_0(k)+c_1\left\|\varphi|\widetilde{\mathrm{C}^{(l)}}\right\|\sum_{j=1}^R A_j(k),\qquad (2.8)$$

где

$$A_0(k)=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)}\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^{k+1}u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|\,dx\,\frac{dt}{t},$$

$$A_j(k)=\sum_{i=1}^n\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}t^{-2k/(r\lambda_i)+j}\left[\left|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)\Delta_i^{R-j}(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)\Delta_i^R(t)\overline{(\varphi^{k-1}u)}\right|\right]\,dx\,\frac{dt}{t}.$$

Оценим в отдельности члены правой части (2.8), различая случаи $k>1$ и $k=1$. В случае $k>1$ в силу неравенства Коши и неравенства $|ab|\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ имеем

$$A_0(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^{k+1}u|b_2^{(k+1)/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right],\qquad (2.9)$$

$$A_R(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u\right\|^2\sum_{i=1}^n\int_0^1 t^{-2k/(r\lambda_i)+2R-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi^k u\right\|^2\sum_{i=1}^n\int_0^1 t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2R-1}\,dt+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right].$$

Поскольку $k\le l_1-1$, то условие (2.4) обеспечивает сходимость в правой части, поэтому отсюда имеем с некоторой постоянной $c_2>0$ для всех $k=2,...,l_1-1$

$$A_R(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2+c_2\|u\|^2\right].\qquad (2.10)$$

Аналогично при $j=1,...,l_1-1$

$$A_j(k)\le\frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2+\left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2j}|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi^k u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\Bigg].$$

Отсюда и из теоремы вложения для пространств Бесова (см. [3] или [2], теорема 18.4), имеем с некоторой постоянной $c_3 > 0$ и для всех $j = 1, ..., l_1 - 1$

$$A_j(k) \le \frac{1}{2}\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2 + \left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2\right] + .$$

$$+\frac{c_3}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2k/(r\lambda_i)+2}|\Delta_i^R(t)(\varphi^{k-1}u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2(k+1)/(r\lambda_i)+2}|\Delta_i^R(t)(\varphi^k u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t} + ||u||^2\right] \le$$

$$\le \frac{1}{2}(1+c_3)\left[\left\|\varphi^k u|b_2^{k/(r\lambda)}\right\|^2 + \left\|\varphi^{k-1}u|b_2^{(k-1)/(r\lambda)}\right\|^2 + ||u||^2\right]. \tag{2.11}$$

Из неравенств (2.8) – (2.11) немедленно получаем неравенства (2.6) при $k > 1$ с подходящим выбором постоянной.

При $k = 1$, в силу неравенства Коши, имеем с некоторой постоянной $c_4 > 0$

$$A_0(1) \le \sum_{i=1}^{n} 2^R\left[\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2/(r\lambda_i)}|\Delta_i^R(t)(\varphi^2 u)|^2\,dx\,\frac{dt}{t}\right]\cdot||u|| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|\varphi^2 u|b_2^{2/(r\lambda)}\right\|^2 + c_4||u||^2. \tag{2.12}$$

Аналогично, с некоторыми постоянными $c_5, c_6 > 0$

$$A_R(1) \le \frac{1}{2}\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2 + ||u||^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{2(R-1)/(r\lambda_i)-1}\,dt\right] +$$

$$+c_5||u||^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{2(R-2)/(r\lambda_i)-1}\,dt \le \frac{1}{2}\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2 + c_6||u||^2. \tag{2.13}$$

При $j = 1, ..., R-1$, в силу выбора числа R и теоремы вложения для пространств Бесова, имеем с некоторой постоянной $c_7 > 0$

$$A_j(1) \le \frac{1}{2}\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{2(j-1)/(r\lambda_i)-2}|\Delta_i^R(t)u|^2 dx\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} t^{-2/(r\lambda_i)}|\Delta_i^{R-j}(t)(\varphi u)|^2 dx\,\frac{dt}{t}\right] \le c_7\left[\left\|\varphi u|b_2^{1/(r\lambda)}\right\|^2 + ||u||^2\right].$$

Отсюда и из неравенств (2.8), (2.12), (2.13) следует неравенство (2.7) при $k = 1$. Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через $\Phi(r)$ множество функций $\varphi \in \Phi$ таких, что $\varphi^{1/r} \in \Phi$. Очевидно, что $\Phi(r) = \Phi(1) = \Phi$ при $l_1 = \cdots = l_n$. Через W_2^l обозначим пространство Соболева–Слободецкого (см. [10]) с нормой

$$\|u|W_2^l\| = \sum_{|\alpha:l|\leq 1} \|D^\alpha u\| \equiv \sum_{(\lambda,\alpha)\leq d_0} \|D^\alpha u\|.$$

Известно (см. [2], §18.9), что

$$W^l_{2,loc} \cap L_2 = B^l_{2,loc} \cap L_2. \tag{2.14}$$

Пользуясь этим, лемму 2.2 можно перефразировать так :

Лемма 2.2'. *Существует $c > 0$ такое, что для всех $k = 1, ..., l_1 - 1$, $\varphi \in \Phi(r)$ и $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$ справедливы неравенства (2.7).*

Пусть X, Y – топологические пространства, ρ – полунорма в X

$$U(t) = \{x \in X :\ \rho(x) < t\}, \quad F \subset U(1), \quad F \cap U(t) \setminus Ker\, \rho \neq \emptyset,$$

и пусть $a_j(x, y)$ $(j = 0, 1, ..., m \geq 2)$ – неотрицательные функции, определенные на топологическом произведении $X \times Y$. Следующее предложение является непосредственным следствием леммы 1.1.

Лемма 2.3. *Пусть для некоторого $\chi > 0$ и любого $j = 1, ..., m-1$*

$$(1 - \rho(x))a_j(x, y) \leq \frac{1}{2}(1 + \rho(x))a_{j+1}(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{2}(1 + \rho(x))a_{j-1}(x, y) + \chi a_0(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y. \tag{2.15}$$

Тогда существуют $\tau \in (0, 1)$ и $\chi' > 0$ такие, что для всех $x \in F \cap U(\tau)$ и $y \in Y$

$$a_j(x, y) \leq a_m(x, y) + \chi' a_0(x, y), \quad j = 1, ..., m - 1. \tag{2.16}$$

Отсюда и из лемм 2.2', 2.3 легко получить следующее предложение.

Теорема 2.1. *Существуют $\tau \in (0, 1)$ и $\chi_1(\tau)$ такие, что для любого $j = 1, ..., l_1 - 1$ и для произвольной функции $\varphi \in \Phi(r)$, удовлетворяющей условию $\left\|\varphi|\widetilde{C^{(l)}}\right\| \leq \tau$, справедливо неравенство*

$$\left\|\varphi^{j/r} u | b_2^{j/(r\lambda)}\right\| \leq \chi_1 \left[\left\|\varphi^{l_1} u | b_2^{l_1/\lambda}\right\| + \|u\|\right], \quad u \in W^l_{2,loc} \cap L_2. \tag{2.17}$$

Доказательство. Положим

$$X = \mathbf{C}_0^\infty, \quad Y = W_{2,loc}^l \cap L_2, \quad \rho(\varphi) = c \left\| \varphi | \widetilde{\mathbf{C}^{(l)}} \right\|,$$

где c – постоянная из неравенства (2.7),

$$a_0(x,y) = ||y||, \quad a_j(x,y) = \left\| x^{j/r} y | b_2^{j/(r\lambda)} \right\|, \quad j = 1, ..., l_1.$$

В силу леммы 2.2' функции a_j связаны неравенствами (2.15) при $m = l_1$. Применяя лемму 2.3, мы получим, что для некоторого $\tau \in (0,1)$ и для всех $x \in \Phi(r)$, $\rho(x) \leq \tau$, $y \in Y$ функции a_j удовлетворяют неравенствам (2.16), т.е. в наших обозначениях (2.17). Теорема 2.1 доказана.

Пусть по данному вектору l числа $r, d_0, d_1, ..., d_M$ и множества $N_0, N_1, ..., N_M$ определены как и выше.

Теорема 2.2. *Пусть $\tau \in (0,1)$ и $\chi > 0$ выбраны так, что выполняются соотношения (2.17). Тогда существует число $\chi_1(\tau, \chi) > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in \Phi(r)$, $\left\| \varphi | \widetilde{\mathbf{C}^{(l)}} \right\| \leq \tau$ и для всех $u \in W_{2,loc}^l \cap L_2$*

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_j} u) \right\| \leq \chi_1 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_0} u) \right\| + ||u|| \right]. \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in \mathbf{C}_0^\infty$. Пользуясь преобразованием Фурье и равенством Парсеваля, имеем с некоторыми постоянными $c_i'' \geq c_i' > 0$

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_i} u) \right\| = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| F(\varphi^{d_i} u) \xi^\alpha \right\| \leq c_i' \left\| |\xi|\lambda|^{d_i} F(\varphi^{d_i} u) \right\| \leq c_i'' \left\| \varphi^{d_i} u | B_2^{d_i/\lambda} \right\|,$$

где $i = 1, ..., l_1 - 1$ и

$$|\xi|\lambda| = \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{2/\lambda_i} \right]^{1/2}.$$

Так как для каждого $i \in (1, l_1 - 1)$, очевидно, существует такой номер $j(i)$, что $d_i = j/r$, то применяя неравенства (2.17) для таких j, получим

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=d_i} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_i} u) \right\| \leq c_i'' \chi \left\| \varphi^{d_0} u | B_2^{d_0/\lambda} \right\|.$$

Но в силу (2.14) с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\left\| \varphi^{d_0} u | B_2^{d_0/\lambda} \right\| \leq c_1 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\| D^\alpha (\varphi^{d_0} u) \right\| + ||u|| \right].$$

Из последних двух соотношений немедленно следует (2.18) для функций $u \in \mathbf{C}_0^\infty$. Неравенство (2.18) для произвольных $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$ следует из уже доказанной части и из плотности бесконечно дифференцируемых финитных функций в $W^l_{2,loc} \cap L_2$ (см., например, [11]).

Теорема 2.3. *Пусть числа τ и χ выбраны так, что выполняется неравенство (2.17). Тогда существует постоянная $c(\tau,\chi) > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi(\tau)$, $\rho(\varphi) \equiv \left\|\varphi|\widetilde{\mathbf{C}^{(l)}}\right\| \le \tau$ и для всех $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$*

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|\varphi^{d_j} D^\alpha u\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|\varphi^{d_0} D^\alpha u\right\| + \|u\|\right], \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|D^\alpha(\varphi^{d_j} u)\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|\varphi^{d_0} D^\alpha u\right\| + \|u\|\right], \tag{2.20}$$

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \left\|\varphi^{d_j} D^\alpha u\right\| \le c \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|D^\alpha(\varphi^{d_0} u)\right\| + \|u\|\right]. \tag{2.21}$$

Доказательство. Положим

$$X = \mathbf{C}_0^\infty, \quad Y = W^l_{2,loc} \cap L_2, \quad F = \{\varphi \in \Phi(\tau) :\ \rho(\varphi) \le \tau\},$$

$$a_k(x,y) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\|D^\alpha(x^{d_{M-k}} y)\right\|, \quad b_k(x,y) = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\|x^{d_{M-k}} D^\alpha y\right\|.$$

Сначала покажем, что для каждой фиксированной пары (x,y), $x \in F \subset X$, $y \in Y$ числа $a_k(x,y)$, $b_k(x,y)$ $(k = 0,1,\ldots,M)$ удовлетворяют соотношениям (1.5) – (1.7) с одинаковыми параметрами τ и χ, причем число τ выбрано так, что удовлетворяются неравенства (2.17). Неравенства (1.5) для так определенных чисел a_k следуют из неравенства (2.18). Для доказательства неравенств (1.6) при $\varepsilon = \rho(x) \le \tau$ заметим, что

$$x^{d_{M-k}} D^\alpha y = D^\alpha(x^{d_{M-k}} y) - \sum_{\nu<\alpha} b_{\alpha,\nu} D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}}) D^\alpha y,$$

где $b_{\alpha,\nu}$ – числа, возникающие при применении формулы Лейбница. Так как $\rho(x) \le \tau < 1$, то простые выкладки показывают, что

$$\left|D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}})\right| \le C_1 \rho(x) \left|x^{d_{M-k}-|\alpha-\nu|}\right|$$

для некоторого $C_1 = C_1(\alpha, \nu, d_{M-k}) > 0$. Имея еще ввиду то, что $(\lambda, \alpha) = d_{M-k}$, $\nu < \alpha$ и $\lambda_i \geq 1$ $(i = 1, ..., n)$, получаем

$$d_{M-k} - |\alpha - \nu| > d_{M-k} - (\lambda, \alpha - \nu) \geq (\lambda, \nu).$$

Но при $\nu < \alpha$ для некоторого i, $1 \leq i \leq k-1$, $(\lambda, \nu) = d_{M-k+i}$ и, поэтому, с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\left|\sum_{\nu<\alpha} b_{\alpha,\nu} D^{\alpha-\nu}(x^{d_{M-k}}) D^\nu y\right| \leq C_2 \rho(x) \sum_{i=1}^{k} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k+i}} \left|x^{d_{M-k+i}} D^\alpha y\right|.$$

Тогда имеем с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$b_k(y,x) \leq C_3 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k}} \left\|D^\alpha(x^{d_{M-k}} y)\right\| + \rho(x) \sum_{i=1}^{k} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{M-k+i}} \left\|x^{d_{M-k+i}} D^\alpha y\right\| + \right.$$

$$\left. + \|y\| \right] = C_3 \left[a_k(x,y) + \varepsilon \sum_{i=1}^{k-1} b_{k-i}(x,y) + a_0(x,y)\right], \quad k = 0, 1, ..., M,$$

что доказывает неравенства (1.6). Неравенства (1.7) доказываются буквальным повторением приводимых рассуждений, потому мы их не будем приводить. Итак, неравенства (1.5) – (1.7) доказаны с не зависящими от (x, y) параметрами τ и $\chi = C_3$. Применив лемму 1.3, получим соотношения (1.8) – (1.10). Из неравенств (1.9) непосредственно следует неравенство (2.20), а из (1.10) – неравенство (2.21). Неравенство (2.19) получится, очевидно, применением неравенств (2.2) и (2.20). Теорема 2.3 доказана.

Замечание. Так как при замене $\varphi(x)$ на $\varphi_\varepsilon \equiv \varphi(\varepsilon^\lambda x)$ $(0 < \varepsilon < 1)$ имеем $\rho(\varphi_\varepsilon) \leq \rho(\varphi) \leq \tau$, то неравенства (2.17) – (2.21) остаются в силе с теми же постоянными при замене φ на φ_ε.

Это замечание позволяет получить ε-оценки для произвольных функций изучаемых классов.

Теорема 2.4. *Пусть*

$$\alpha, \nu \in \mathcal{N}_0^n, \quad (\lambda, \nu) \leq d_0, \quad \nu < \alpha, \quad \varphi \in \Phi(r), \quad \rho(\varphi) \leq \tau.$$

Тогда существует постоянная $c(\alpha, \nu, \lambda) > 0$ такая, что для всех $\varepsilon \in (0, 1)$ и $u \in W^l_{2,loc} \cap L_2$

$$\left\|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0}) D^\nu u\right\|^2 \leq c\varepsilon^2 \left[\sum_{(\lambda,\alpha)=d_0} \left\|\varphi_\varepsilon^{d_0} D^\alpha u\right\|^2 + \|u\|^2\right]. \tag{2.22}$$

Доказательство. Так как, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon(x))| \le c_1 \left\|\varphi|\overline{C^{(l)}}\right\| \varepsilon^{(\lambda,\alpha-\nu)} \left|\varphi_\varepsilon^{d_0-(\alpha-\nu)}(x)\right|,$$

то

$$\left\|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0})D^\alpha u\right\|^2 \le c_1^2\varepsilon^{2(\lambda,\alpha-\nu)} \left\|\varphi_\varepsilon^{d_0-|\alpha-\nu|}D^\nu u\right\|.$$

Но поскольку $(\lambda, \alpha) = d_0$, $\nu < \alpha$ и $\lambda_i \ge 1$ $(i = 1, ..., n)$, то

$$d_0 - |\alpha - \nu| \ge d_0 - (\lambda, \alpha - \nu) = [d_0 - (\lambda, \alpha)] + (\lambda, \alpha) \ge (\lambda, \nu).$$

Поэтому

$$\left\|D^{\alpha-\nu}(\varphi_\varepsilon^{d_0})D^\nu u\right\|^2 \le c_1^2\varepsilon^{2(\lambda,\alpha-\nu)} \left\|\varphi|\overline{C^{(l)}}\right\|^2 \left\|\varphi_\varepsilon^{(\lambda,\nu)}D^\nu u\right\|^2.$$

Применяя теперь неравенства (2.19) – (2.21) с заменой φ на φ_ε (см. замечание) с учетом того, что $(\lambda,\nu) < d_0$, $\varepsilon \in (0.1)$ и $(\lambda, \alpha - \nu) > |\alpha - \nu| \ge 1$, получим неравенство (2.21). Теорема 2.4 доказана.

ABSTRACT. The paper establishes some weighted bounds for derivatives of functions of many variables, for the norms of anisotropic spaces of Sobolev–Slobodetski or Nikolski–Besov type.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1977.
2. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, 1975.
3. О. В. Бесов, "Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения", Труды МИАН СССР, т. 60, стр. 42 — 81, 1961.
4. Х. Трибель, Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, М., Мир, 1983.
5. S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. Van Nostrand, NY, 1965.
6. F. Browder, "Functional analysis and partial differential equations II", Math. Ann., vol. 145, pp. 81 – 226, 1962.
7. Nguen Xuan Dung, "Essential self-adjointness and self-adjointness for generalized Schrödinger operators", Lect. Nat. Math., vol. 964, pp. 171 – 178, 1982.
8. Nguen Xuan Dung, "Essential self-adjointness and self-adjointness for even elliptic operators", Proc. Soc. Edinburgh, Sect. A, vol. 95, pp. 161 – 179, 1982.
9. H. G. Kazarian, V. N. Markarian, "Essential self-adjointness and self-adjointness for semi-elliptic operators", J. Integral Eq. Math. Phys., vol. 1, № 1, pp. 67 – 104, 1992.
10. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., Наука, 1988.
11. Г. Г. Казарян, "Оценки дифференциальных и гипоэллиптических операторов", Труды МИАН СССР, т. 140, стр. 130 - 161, 1976.

18 февраля 1996 Ереванский государственный университет