ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

А. М. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 6, 1997

В данной работе доказывается несколько теорем, которые в частных случаях подтверждают следующую гипотезу Ч. Ч. Янга : если для многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ выполняется условие $P(z)\,(P(z)-1)=0 \iff Q(z)\,(Q(z)-1)=0$, то $P(z)=Q(z)$ или $P(z)+Q(z)=1$. Результаты зависят от кратностей нулей, их количества, геометрического расположения, степеней многочленов и т.д.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В письме академику М. М. Джрбашяну американский математик Ч. Ч. Янг сформулировал следующую задачу : для многочлена P обозначим через $E_P=\{z\in\mathbf{C}\colon P(z)(P-1)(z)=0\}$. Что можно сказать о многочленах P и Q, если

$$E_P=E_Q\,? \tag{1}$$

Сам Янг высказал предположение, что всегда имеет место альтернатива : либо $P\equiv Q$, либо $P+Q=1$. Хотя решение сформулированной задачи в общей постановке пока не известно, некоторыми авторами были получены по ней частные результаты (см. [1] — [3]). В данной работе также приводятся результаты, подтверждающие гипотезу Янга в некоторых частных случаях нового типа. Основными результатами работы являются формулируемые ниже теоремы.

Теорема 1. *Если как многочлены P, Q, так и многочлены $P-1$, $Q-1$ имеют одинаковые нули, то $P\equiv Q$.*

Теорема 2. *Если многочлены P, Q удовлетворяют (1) и четности кратностей соответствующих нулей многочленов $P(P-1)$ и $Q(Q-1)$ совпадают, то $P\equiv Q$*

либо $P+Q=1$.

Теорема 3. *Пусть для многочленов* P, Q

$$P(P-1)(z)=A\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\alpha_j},\quad \sum_{j=1}^{t}\alpha_j=2p,\quad p=\deg P,$$

$$\text{и}\quad Q(Q-1)(z)=B\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\beta_j},\quad \sum_{j=1}^{t}\beta_j=2q,\quad q=\deg Q.$$

Тогда если $\sum\limits_{j=1}^{t}\min(\alpha_j,\beta_j)>p+t/2$, *то* $P\equiv Q$ *или* $P+Q=1$.

Доказательства теорем 1—3 приведены в §2. Во всех этих теоремах без ограничения общности можно считать, что $\deg P\geq \deg Q$. Случай, когда $\deg P=$ $=\deg Q$, отдельно изучается в §3. Здесь доказывается следующая

Теорема 4. *Пусть многочлены* P, Q *удовлетворяют (1) и* $\deg P=\deg Q$. *Если выполняется одно из следующих условий :*

1. $|E_P|=\deg P+1$;
2. $|E_P|=\deg P+2$;
3. $E_P\subset\mathbb{R}$ *и* $|E_P|=\deg P+1+r$, *где* $0\leq r<(\deg P-1)/5$,

то $P\equiv Q$ *или* $P+Q=1$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 — 3

Следующая лемма была доказана в [3]. Мы приведем ее новые доказательства, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1 ([3]).

$$|E_P|\geq 1+\deg P.$$

Доказательство. I вариант. Пусть $P(P-1)(z)=A\prod_{j=1}^{t}(z-a_j)^{\alpha_j}$, где $t=|E_P|$. Обозначим $I_0=\{i:P(a_i)=0\}$ и $I_1=\{i:P(a_i)=1\}$. Итак, $\sum\limits_{i\in I_0}\alpha_i=\sum\limits_{i\in I_1}\alpha_i=p$ и $|I_0|+|I_1|=|E_P|$. Обозначим $D(z)=\prod_{i\in I_0}(z-a_i)$, $G(z)=$ $=\prod_{i\in I_1}(z-a_i)$. Имеем $P=D\cdot P_0$ и $P-1=G\cdot P_1$, где P_0 и P_1 – многочлены. Ясно, что P' делится на P_0, а $(P-1)'=P'$ делится на P_1. Так как P_0 и P_1 не имеют общих нулей, то $\deg P'\geq\deg P_0+\deg P_1=(\deg P-\deg D)+(\deg P-\deg G)$, или $\deg P-1\geq\deg P-|I_0|+\deg P-|I_1|$. Отсюда $|E_P|\geq 1+\deg P$.

II вариант. Обозначим через Z_f множество нулей f, считая каждый нуль столько раз, какова его кратность. Тогда имеем

$$f_n(z) = \sum_{i\in I_n} \frac{\alpha_i}{z-a_i}, \quad A_n = \bigcup_{i\in I_n} \{\underbrace{a_i, \dots, a_i}_{\alpha_i - 1}\}, \quad B_n = Z_{f_n}, \qquad n = 0, 1.$$

Пользуясь введенными выше обозначениями, имеем $P' = P\cdot f_0$, $Z_{P'} = A_0 \bigcup B_0$. С другой стороны, $P' = (P-1)' = (P-1)\cdot f_1$ и $Z_{P'} = Z_{(P-1)'} = A_1 \bigcup B_1$. Ясно, что $A_0\bigcup B_0 = A_1 \bigcup B_1$, $A_0 \bigcap A_1 = \emptyset$, $A_0 \bigcap B_0 = \emptyset$, $A_1 \bigcap B_1 = \emptyset$. Значит, $A_0 = B_1 \setminus B_0$ и $A_1 = B_0 \setminus B_1$. Отсюда имеем $|A_0| \le |B_1|$, поэтому $\sum\limits_{i\in I_0}(\alpha_i - 1) \le |I_1| - 1$, и $\deg P + 1 \le |I_0| + |I_1| = |E_P|$.

Следствие 1. Если $j \in I_n$, $n = 0, 1$ и $\alpha_j \ge 2$, то

$$f_n(a_j) = 0, \quad n = 0, 1. \tag{2}$$

Доказательство следует из представлений $A_0 = B_1 \setminus B_0$ и $A_1 = B_0 \setminus B_1$.

Доказательство теоремы 1. По условию многочлен $P - Q$ имеет не менее $|E_P|$ корней. С другой стороны, по лемме 1 $\deg P < |E_P|$ и, значит, $\deg(P-Q) \le$ $\le \deg P < |E_P|$, т.е. $P \equiv Q$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $D = НОД(P(P-1))$ (НОД - наибольший общий делитель). Поскольку все 0 и 1 многочленов P и Q являются корнями D, то по лемме 1 $d = \deg D \ge \deg P + 1 = p + 1$. Условие теоремы означает, что $P(P-1) = D\cdot T_1^2$ и $Q(Q-1) = D\cdot T_2^2$, где T_1 и T_2 - многочлены. Пусть $\deg T_1 = t_1$, $\deg T_2 = t_2$ (т.к. $p \ge q$, то $t_1 \ge t_2$). Имеем, что $p+1 \le d = 2p - 2t_1 = 2q - 2t_2$, значит, $2t_1 \le p - 1$ и $p + t_2 = q + t_1$. С другой стороны, $T_1^2 Q(Q-1)(z) - T_2^2 P(P-1)(z) = 0$ или $T_1^2(Q-1/2)^2(z) - T_2^2(P-1/2)^2(z) = \frac{1}{4}(T_1^2 - T_2^2)(z)$. В случае

$$\deg\left(T_1^2(Q-1/2)^2 - T_2^2(P-1/2)^2\right) \ge \max\left(\deg\left(T_1(Q-1/2)\right), \deg\left(T_2(P-1/2)\right)\right) =$$

$$= \max(t_1 + q, t_2 + p) = t_2 + p$$

имеем

$$t_2 + p \le \deg\left(T_1^2(Q-1/2)^2 - T_2^2(P-1/2)^2(z)\right) = \deg\left(\frac{1}{4}(T_1^2 - T_2^2)\right) \le 2t_1 \le p - 1.$$

Отсюда имеем $t_2 \leq -1$. Это противоречие позволяет нам заключить, что $T_1^2(Q-1/2)^2(z) - T_2^2(P-1/2)^2(z) \equiv 0$. Следовательно, $T_1^2 \equiv T_2^2$ и $P(P-1)(z)-$ $-Q(Q-1)(z) \equiv 0$, т.е. $(P-Q)(P+Q-1)(z) \equiv 0$, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Замечание. Так как степени многочленов $P(P-1)(z)$ и $Q(Q-1)(z)$ – четные числа, теорему 2 можно сформулировать следующим образом :

Если для многочленов P и Q имеет место (1), то четности кратностей соответствующих нулей многочленов $P(P-1)(z)$ и $Q(Q-1)(z)$ либо совпадают, и тогда $P \equiv Q$ или $P+Q \equiv 1$, либо не совпадают лишь четное число раз.

Доказательство теоремы 3. Пару (λ, n), где $\lambda \in \mathbf{C}$ и $n \in \mathbb{N}_0$, будем называть "хорошей", если $P^{(n)}(\lambda) = Q^{(n)}(\lambda)$. Число "хороших" пар для P и Q обозначим через $L(P,Q)$. Ясно, что если $L(P,Q) \geq p+1$, то $P \equiv Q$, если же $L(1-P,Q) \geq p+1$, то $P+Q \equiv 1$. Поэтому будем считать, что $L(P,Q) \leq p$ и $L(1-P,Q) \leq p$. Оценим снизу сумму $L(P,Q) + L(1-P,Q)$. Для этого обозначим

$$I_{00} = \{i: \quad P(a_i)=0,\ Q(a_i)=0\}, \qquad I_{01} = \{i: \quad P(a_i)=0,\ Q(a_i)=1\},$$

$$I_{10} = \{i: \quad P(a_i)=1,\ Q(a_i)=0\}, \qquad I_{11} = \{i: \quad P(a_i)=1,\ Q(a_i)=1\}.$$

Для каждого $i \in I_{00}$ имеем $\min(\alpha_i, \beta_i)$ "хороших" пар. Действительно, если $i \in I_{00}$, то $P^{(k)}(a_i) = Q^{(k)}(a_i)$, где $k = 0, 1, ..., \min(\alpha_i, \beta_i) - 1$. То же самое можно сказать для каждого $i \in I_{11}$.

Для каждого же $i \in I_{01} \cup I_{10}$ имеем $\min(\alpha_i, \beta_i) - 1$ "хороших" пар. Действительно, если $i \in I_{01} \cup I_{10}$, то $P^{(k)}(a_i) = Q^{(k)}(a_i)$, где $k = 1, ..., \min(\alpha_i, \beta_i) - 1$. Следовательно

$$L(P,Q) \geq \sum_{i \in I_{00} \cup I_{11}} \min(\alpha_i, \beta_i) + \sum_{i \in I_{01} \cup I_{10}} [\min(\alpha_i, \beta_i) - 1] = \sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - |I_{01}| - |I_{10}|$$

и

$$L(1-P,Q) \geq \sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - |I_{11}| - |I_{00}|.$$

Отсюда $2p \geq L(P,Q) + L(1-P,Q) \geq 2\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - (|I_{01}| + |I_{10}| + |I_{00}| + |I_{11}|) =$ $= 2\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) - t$, или $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \leq p + \frac{1}{2}t$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 2. *Если $P \not\equiv Q$, то для $\beta \geq 0$*

$$\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1) = p - \beta.$$

Доказательство. Докажем, что $\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1) \leq p$. С этой целью обозначим

$$\frac{P}{НОД(P,Q)} = P_0, \quad \frac{Q}{НОД(P,Q)} = Q_0,$$

$$\frac{P-1}{НОД(P-1,Q-1)} = P_1, \quad \frac{Q-1}{НОД(P-1,Q-1)} = Q_1.$$

Ясно, что $Q[P_0Q_1 - P_1Q_0] = Q_0[Q_1 - P_1]$. Так как $P \not\equiv Q$, то $P_1 \not\equiv Q_1$. Значит

$$\deg Q \leq \deg Q_0 + \max(\deg Q_1, \deg P_1) =$$

$$= \deg Q_0 + \max(\deg Q, \deg P) - \deg НОД(P-1,Q-1),$$

или

$$(\deg Q - \deg Q_0) + \deg НОД(P-1,Q-1) \leq \max(\deg P, \deg Q),$$

т.е. $\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1) \leq p$. Доказательство завершено.

Лемма 3. *Если $P \not\equiv Q$, то $\deg(P_0Q_1 - P_1Q_0) \leq \beta$, т.е. $[P_0Q_1]^{(\beta+1)} \equiv [P_1Q_0]^{(\beta+1)}$.*

Доказательство. Следуя введенным выше обозначениям, имеем

$$\deg(P_0Q_1 - P_1Q_0) = \deg Q_0 - \deg Q + \deg(Q_1 - P_1) \leq -(\deg Q - \deg Q_0) +$$

$$+ \max(\deg Q_1, \deg P_1) = -\deg НОД(P,Q) + \max(\deg P, \deg Q) -$$

$$- \deg НОД(P-1,Q-1) = p - [\deg НОД(P,Q) + \deg НОД(P-1,Q-1)] = \beta.$$

Лемма 4. *Пусть $A(z) = A\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{\alpha_i}$, причем $\max\limits_{1\leq i\leq n} \alpha_i \leq \alpha$. Тогда $A^{(\alpha-1)}$ имеет только простые корни.*

Доказательство проводится с помощью индукции.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 4, отметим следующее. Считая здесь $p = q$, имеем

$$P(P-1)(z) = A\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\alpha_i}, \quad Q(Q-1)(z) = B\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\beta_i},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{t}\beta_i = 2p$; $\alpha_i, \beta_i \geq 1$. По лемме 1 $t \geq p+1$. Ясно, что $P'(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-$ $-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot R(z)$, где $\deg R = r = (p-1)-\sum\limits_{i=1}^{t}(\alpha_i-1) = (p-1)-\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i+t = t-(p+1)$. Аналогично, $Q'(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\beta_i-1}\cdot S(z)$, где $\deg S = s = t-(p+1)$. Обозначим $T(z) = \prod\limits_{i=1}^{t}(z-a_i)$. Имеем

$$[P(P-1)(z)]' = A\prod_{i=1}^{t}(z-a_i)^{\alpha_i-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right) = A\,\frac{P'(z)}{R(z)}\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right).$$

Значит

$$(2P-1)\cdot R(z) = A\left(\sum_{i=1}^{t}\frac{\alpha_i T(z)}{z-a_i}\right).$$

Подставляя сюда $z = a_j$ $(j = 1, 2, ..., t)$, получим $(2P(a_j)-1)\,R(a_j) = A\cdot\alpha_j\cdot T'(a_j)$. Таким же образом, $(2Q(a_j)-1)\,S(a_j) = B\cdot\beta_j\cdot T'(a_j)$. Обозначая $\delta_j = 2P(a_j)-1 =$ $=\pm1$ и $\varphi_j = 2Q(a_j)-1 = \pm1$, получим

$$\frac{\delta_j}{\varphi_j}\cdot\frac{R(a_j)}{S(a_j)} = \frac{A}{B}\cdot\frac{\alpha_j}{\beta_j}; \quad j = 1, 2, ..., t. \tag{3}$$

Доказательство пункта 1 теоремы 4. Из условий теоремы следует, что $\deg R = \deg S = 0$, т.е. $R(z) = R_0$, $S(z) = S_0$, где $R_0, S_0 \in \mathbf{C}$. Значит, в силу (3) будем иметь

$$\frac{\delta_j}{\varphi_j} = \frac{AS_0}{BR_0}\cdot\frac{\alpha_j}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, ..., p+1.$$

Ясно, что $\alpha_j/\beta_j > 0$ для всех j. Следовательно, из последнего неравенства имеем, что соотношение $\dfrac{\delta_j}{\varphi_j}$ не меняет знака, т.е. либо $\delta_j = \varphi_j$, либо $\delta_j = -\varphi_j$ $(j = 1, 2, ..., p+1)$. Первый случай представляет собой условия теоремы 1 для многочленов P, Q, а второй – для $1-P$, Q. В обоих случаях или $P \equiv Q$ или $P + Q \equiv 1$.

Доказательство пункта 2 теоремы 4. Так как $t = p+2$, то $\deg S = \deg R = 1$. Значит, $F(z) = \dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{R(z)}{S(z)}$ является дробно-линейной функцией, причем

$$F(a_j) = \frac{\alpha_j}{\beta_j}\cdot\frac{\varphi_j}{\alpha_j} \in \mathbb{R} \quad \text{при} \quad j = 1, 2, ..., p+2.$$

Обратное к дробно-линейной функции есть дробно-линейная функция и она переносит прямую $\mathbb{R}$ на некоторую окружность или прямую. Значит, точки a_j находятся либо на одной окружности, либо на одной прямой. Покажем, что первое из них невозможно. Пусть они находятся на окружности с центром τ. Ясно, что существует такое j, что $\alpha_j > 2$ (в противном случае $t = p+2 = 2p$, $p = 2$, что есть противоречие). Например, будем считать, что $\alpha_1 \geq 2$ и $P(a_1) = 0$, $P'(a_1) = 0$. В силу (1) $f_1(a_1) = 0$. Полагая $a_1 = 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$, нетрудно убедиться, что все точки $\dfrac{\alpha_i}{a_1 - a_i}$ находятся на одну сторону от мнимой оси OY (в общем случае точки $\dfrac{\alpha_i}{a_1 - a_i}$ будут находиться в полуплоскости $\{\mathrm{Re}(z\,\overline{(a_1-\tau)}) > 0\}$). Следовательно, их сумма не может равняться нулю. Итак, точки a_i находятся на одной прямой $z = \lambda + \mu x$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Значит, с помощью замены переменной задача сводится к случаю с действительными 0 и 1 многочленов P и Q. Поэтому ниже мы приводим доказательство пункта 3, завершающее доказательство пункта 2, кроме случаев $p = 3, 4, 5, 6$, которые будут получены в конце работы.

Доказательство пункта 3 теоремы 4. В силу указанной выше замены переменной можем написать

$$P(P-1)(x) = A\prod_{i=1}^{t}(x-a_i)^{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^{t}\alpha_i = 2p, \quad a_1, a_2, \dots, a_t \in \mathbb{R}.$$

Не нарушая общности можно считать, что

$$a_1 < a_2 < \dots < a_t, \tag{4}$$

$$P'(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-a_i)^{\alpha_i - 1}\cdot R(x) = A\prod_{i\in I_0}(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot f_0(x) = A\prod_{i\in I_1}(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot f_1(x).$$

В силу (2)

$$[f_0(a) = 0] \Longleftrightarrow [R(a) = 0 \quad \text{или} \quad a = a_i, \quad \text{где} \quad i \in I_1, \quad \alpha_i \geq 2], \tag{5}$$

$$[f_1(a) = 0] \Longleftrightarrow [R(a) = 0 \quad \text{или} \quad a = a_i, \quad \text{где} \quad i \in I_0, \quad \alpha_i \geq 2]. \tag{6}$$

Теперь, не нарушая общности, можем считать, что $P(a_1) = 0$. Докажем, что $\alpha_1 = 1$. Действительно, в противном случае ($\alpha_1 \geq 2$) в силу (5) $f_1(a_1) \geq 0$, но поскольку любая функция вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{x - c_j}, \quad \gamma_j > 0, \quad c_1 < c_2 < \dots < c_n$$

в интервалах (c_k, c_{k+1}), $k = 1, 2, ..., n-1$ имеет только простые корни в каждом по одному, то a_1 находится в некотором интервале (a_k, a_m), $k, m \in I_1$, что противоречит (4). Аналогичным образом $\alpha_t = 1$ (независимо от того $P(a_t) = 0$ или $P(a_t) = 1$). Этими рассуждениями можно доказать, что $R(x)$ не имеет корней в интервалах (a_1, a_2) и (a_{t-1}, a_t).

Покажем, что $P(a_2) = 1$. Действительно, если $P(a_2) = 0$, то $P(a_1) = P(a_2)$ и по теореме Ролля существует $c \in (a_1, a_2)$ такое, что $P'(c) = 0$, но тогда $R(c) = 0$, что противоречит вышесказанному. Аналогично можно доказать, что $P(a_{t-1}) = 1 - P(a_t)$.

Процесс получения информации о числах a_i и α_i разделим на три этапа :

1. В случае $r = 0$ функция $R(x)$ не имеет корней. Это означает во первых, что $P'(x)$ кроме точек a_i других корней не имеет. Из этого и из теоремы Ролля сразу следует, что $P(a_3) = 0$, $P(a_4) = 1$, $P(a_5) = 0$ и т.д., а во вторых, что корнями f_0 являются точки $\{a_i \colon i \in I_1$ и $\alpha_1 \geq 2\}$, корни же f_1 – $\{a_i \colon i \in I_0, \alpha_i \geq 2\}$. Очевидно, что f_0 и f_1 вместе имеют $|I_0| - 1 + |I_1| - 1 = t - 2$ корней. Так как $\alpha_1 = \alpha_t = 1$, то $\alpha_i \geq 2$, $i = 2, ..., t-1$. Имеем

$$2p = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{t-1} \alpha_i + \alpha_t \geq 1 + 2(t-2) + 1 = 2(t-1) = 2p$$

и, значит, $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_{t-1} = 2$. Итак, в этом случае 0 и 1 многочлена P (и, следовательно, Q) чередуют друг друга, причем кратности наименьшего и наибольшего из них равны 1, а остальных – 2.

2. В случае $r = 1$ функция $R(x)$ является линейным многочленом и имеет единственный корень $R(b) = 0$. Допустим, что $b \in (a_k, a_{k+1})$. Мы уже знаем, что $2 \leq k \leq t-2$. Что касается точек $a_1, ..., a_k$, то обстановка не меняется (снова по очереди следуют 0 и 1). То же самое можно сказать и о точках $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_t$. Докажем, что при переходе от a_k к a_{k+1} порядок нарушается : $P(a_k) = P(a_{k+1})$. Для простоты допустим, что $P(a_k) = 0$ и в противоположность нашему утверждению допустим, что $P(a_{k+1}) = 1$. Ясно, что $0 < P(x) < 1$ в (a_k, a_{k+1}) и $P'(b) = 0$, $P''(b) \neq 0$. Теперь если предположить, что $P'(x)$ в интервале (a_k, a_{k+1}) не имеет корней, отличных от b, то получаем, что $P'(x)$ в интервалах (a_k, b) и (b, a_{k+1}) возрастает. Так как b не является локальным экстремумом, то $P''(b) = 0$, что является противоречием. Значит, $P'(x)$ в интервале (a_k, a_{k+1}) имеет корень, отличный от b, что невозможно. Значит, $P(a_k) = P(a_{k+1})$. С другой стороны

$$2p = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{t-1} \alpha_i + \alpha_t \geq$$

$$\geq 1 + 2(k-2) + 1 + 1 + 2(t-k+2) + 1 = 2(t-2) = 2p.$$

Следовательно

$$\alpha_1 = \alpha_t = 1, \quad \alpha_k = \alpha_{k+1} = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_{t-1} = 2.$$

Очевидно, что все вышесказанное имеет место и для Q.

Чтобы применить теорему 3, мы должны оценить снизу $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i)$. В силу вышеполученного $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 6 + 2(t-6) = 2t - 6 = 2p - 2$. А так как по условию пункта 3 теоремы 4, $p > 5r + 1 = 6$, то

$$\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 2p - 2 > p + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(3p+2).$$

Применяя теорему 3, мы завершаем доказательство этого случая.

3. В случае $r < (p-1)/5$ функция $R(x)$ имеет $r = t - p - 1$ простых корней, которые находятся в интервалах (a_i, a_{i+1}), в каждом из них не больше одного. Если $R(x)$ имеет корень в (a_k, a_{k+1}), то точно так же, как и выше, докажем, что $P(a_k) = P(a_{k+1})$. Аналогично доказывается, что для остальных точек a_i сохраняется прежний порядок.

Теперь о числах α_i. Нетрудно проверить, что P имеет ровно $2 + 2r$ точек, для которых $\alpha_i = 1$, и ровно $t - (2 + 2r)$ точек, для которых $\alpha_i = 2$. Так как все это имеет место и для многочлена Q, то можем оценить величину $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i)$. Число тех i, для которых $\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) = 1$, не больше $2 + 4r$. Значит

$$\sum_{i=1}^{t} \min(\alpha_i, \beta_i) \geq 2 + 4r + 2(t - (2+4r)) = 2t - 2 - 4(t-p-1) = 4p - 2t + 2.$$

А неравенство $4p - 2t + 2 > p + t/2$ равносильно условию $t < (6p+4)/5$ пункта 3 теоремы 4, что, в свою очередь, равносильно $r < (p-1)/5$. Остается применить теорему 3. Пункт 3 теоремы 4 доказан.

Вернемся к пункту 2 теоремы 4, для завершения доказательства которого остается рассмотреть случаи $p = 3, 4, 5, 6$ (при $r = 1$ условия пункта 3 теоремы 4 равносильны неравенству $p > 6$).

a) $p = 3$. В силу вышесказанного мы можем предположить, что $P(a_1) = 0$, $Q(a_1) = 0$ и $R(b) = 0$, $b \in (a_2, a_3)$, $S(c) = 0$, $c \in (a_3, a_4)$. Тогда

$$P(x) = A\,(x - a_1)(x - a_4)^2, \qquad Q(x) = B\,(x - a_1)(x - a_3)(x - a_4),$$

$$P(x) - 1 = A\,(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5), \qquad Q(x) - 1 = B\,(x - a_2)^2(x - a_5).$$

Значит, $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 > p$, а это в силу леммы 2 означает, что $P \equiv Q$ (разумеется, что при предположении $P(a_1) = 0$, $Q(a_1) = 1$ получим $P + Q \equiv 1$).

b) $p = 4$. В этом случае имеем

$$P(x) = A\,(x - a_1)(x - a_4)^2(x - a_6), \qquad Q(x) = B\,(x - a_1)(x - a_3)^2(x - a_6),$$

$$P(x) - 1 = A\,(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5)^2, \quad Q(x) - 1 = B\,(x - a_2)^2(x - a_4)(x - a_5).$$

Значит, $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 = p$. Отсюда, в силу леммы 2 ясно, что $\beta = 0$ и

$$P_0(x) = A\,(x - a_4)^2, \quad Q_0(x) = B\,(x - a_3)^2,$$

$$P_1(x) = A\,(x - a_3)(x - a_5), \quad Q_1(x) = B\,(x - a_2)(x - a_4).$$

Применим лемму 3 : $[P_0Q_1]' \equiv [P_1Q_0]'$, т.е. $P \equiv Q$.

c) $p = 5$. В этом случае

$$P(x) = A\,(x - a_1)(x - a_4)^2(x - a_6)^2,$$

$$Q(x) = B\,(x - a_1)(x - a_3)^2(x - a_5)^2(x - a_6),$$

$$P(x) - 1 = A\,(x - a_2)(x - a_3)(x - a_5)^2(x - a_7),$$

$$Q(x) - 1 = B\,(x - a_2)^2(x - a_4)^2(x - a_7).$$

Отсюда $\deg НОД(P, Q) + \deg НОД(P - 1, Q - 1) = 4 = p - 1$, т.е. $\beta = 1$. С другой стороны

$$P_0(x) = A\,(x - a_4)^2(x - a_6), \; Q_0(x) = B\,(x - a_3)^2(x - a_5),$$

$$P_1(x) = A\,(x - a_3)(x - a_5)^2, \; Q_1(x) = B\,(x - a_2)(x - a_4)^2.$$

Применим лемму 3 : $[AB(x-a_2)(x-a_4)^2(x-a_6)]'' \equiv [AB(x-a_3)^2(x-a_5)^2]''$. В силу леммы 4 многочлен правой части имеет только простые корни, а для многочлена левой части a_4 является двукратным корнем. Полученное противоречие в силу леммы 3 даст $P \equiv Q$.

d) $p = 6$. Снова в силу рассуждений доказательства пункта 3. не нарушая общности можем написать

$$P(x) = A\,(x-a_1)(x-a_4)^2(x-a_6)^2(x-a_8),$$

$$Q(x) = B\,(x-a_1)(x-a_3)^2(x-a_5)^2(x-a_8),$$

$$P(x)-1 = A\,(x-a_2)(x-a_3)(x-a_5)^2(x-a_7)^2,$$

$$Q(x)-1 = B\,(x-a_2)^2(x-a_4)^2(x-a_6)(x-a_7).$$

В лемме 2 Q можно заменить на $1-Q$. Так как $НОД(P,1-Q) = (x-A_4)^2(x-a_6)$ и $НОД(P-1,Q) = (x-a_3)(x-a_5)^2$, то $\beta = 0$. С другой стороны

$$P_0(x) = A\,(x-a_1)(x-a_6)(x-a_8), \qquad Q_0(x) = B\,(x-a_2)^2(x-a_7),$$

$$P_1(x) = A\,(x-a_2)(x-a_7)^2, \qquad Q_1(x) = B\,(x-a_1)(x-a_3)(x-a_8).$$

Применяя лемму 3 для многочленов P и $1-Q$, получим $[AB(x-a_1)^2(x-a_3)(x-a_6)(x-a_8)^2]' \equiv [AB(x-a_2)^2(x-a_7)^3]'$. В силу леммы 4 многочлен правой части имеет только простые корни, а a_2 и a_7 – двукратные корни для многочлена левой части. Следовательно, по лемме 3 $P+Q \equiv 1$. Теорема 4 доказана.

Автор выражет глубокую благодарность Н. У. Аракеляну и В. А. Мартиросяну за ценные замечания и С. Г. Рафаеляну – за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

ABSTRACT. The results of this paper refer to the following conjecture by C. C. Yang : if the polynomials $P(z)$ and $Q(z)$ satisfy $P(z)\,(P(z)-1) = 0 \iff Q(z)\,(Q(z)-1) = 0$, then either $P(z) = Q(z)$ or $P(z) + Q(z) = 1$. The paper confirms this conjecture in a variety of special cases depending on the multiplicities of zeros and their quantity, their geometrical positions as well as the degrees of the polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Yang, "A problem on polynomials". In "Complex Analysis", Proc. of the SUNY Brackport Conf., 169, New-York – Basel, 1978.
2. W. Adams, E. Straus, "Non-Archimedian analytic functions taking the same values at the same points", Ill. J. Math., vol. 15, pp. 418 — 424, 1971.
3. М. А. Мкртчян, "Об одной задаче Янга", В кн. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, Красноярск, стр. 237 — 242, 1980.

20 октября 1997

Ереванский государственный университет