ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

М. А. Закарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

В статье установлены параметрические представления весовых классов $h^p(\omega)$ функций, гармонических в верхнем полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$. Найден общий вид линейных непрерывных функционалов на $h^p(\omega)$.

ВВЕДЕНИЕ

В 1945 году М. М. Джрбашян [1], [2] получил интегральные представления и теоремы единственности для классов $H^p(\alpha)$ аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left\{ \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p (1-r^2)^\alpha r \, dr \, d\theta \right\}^{1/p}.$$

(в дальнейшем эти классы обычно обозначались A^p_α). В частности, им было установлено, что любая функция $f \in H^p(\alpha)$ допускает представление

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-z\rho e^{-i\varphi})^{\alpha+2}} f(\rho e^{i\varphi}) \rho d\rho d\varphi. \qquad (1)$$

Пользуясь этим представлением и одной его модификацией, Ф. А. Шамоян [3] – [6] установил представления непрерывных линейных функционалов в различных весовых пространствах голоморфных функций многих переменных.

Подобное (1) представление для весовых пространств $h^p(\omega)$ *гармонических* в n–мерном шаре функций было найдено в работе [7]. Данная же статья посвящена исследованию весовых пространств функций, гармонических в *верхнем полупространстве* $\mathbb{R}_+^{n+1}$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$.

Первый параграф содержит необходимые для дальнейшего изложения определения и вспомогательные результаты, в основном относящиеся к некоторым интегральным операторам в весовых пространствах L^p в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Во втором параграфе установлены параметрические представления классов $h^p(\omega)$, а в третьем – найден общий вид непрерывного линейного функционала на $h^p(\omega)$.

Автор благодарен А. М. Джрбашяну за внимание к работе и поддержку.

§1. О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$

1.1. Всюду ниже будем считать, что

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x', x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \\ x_{n+1} > 0,\ x' = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Меру Лебега на $\mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать $dx = dx'dx_{n+1}$, где $dx' = dx_1 \cdots dx_n$. Далее, через $h(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ будем обозначать множество всех функций, гармонических в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, а через S – множество функций, *правильно меняющихся* на $(0, +\infty)$ (определение см. в [8], гл. I, §§1, 2). Как доказано в работе [8], любая функция $\omega(x_{n+1}) \in S$ допускает представление

$$\omega(x_{n+1}) = x^{\alpha}_{n+1} \exp\left\{\int_a^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t}\,dt\right\}, \tag{1.1}$$

где $\alpha \in (1, +\infty)$ и $a > 0$ – некоторые числа, а $\mathcal{E}(t)$ – положительная, непрерывная на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\mathcal{E}(t) = o(1)$ при $t \to +\infty$. Как нетрудно видеть, из этого представления следует существование постоянной B_ω такой, что

$$0 \le \mathcal{E}(t) \le B_\omega, \quad t \in [a, +\infty). \tag{1.2}$$

Всюду ниже мы будем полагать, что $\omega \in S$.

Через $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$, $0 < p < +\infty$ (или $L^p(\omega)$) будем обозначать класс измеримых в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функций f, для которых

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left\{\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} |f(x', x_{n+1})|^p \omega(x_{n+1}) dx' dx_{n+1}\right\}^{1/p} < +\infty.$$

При $p = +\infty$ будем полагать, что $L^\infty\left(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega\right)$ (или $L^\infty(\omega)$) – банахово пространство функций с конечной равномерной нормой

$$\|f\|_{L^\infty(\omega)} = \operatorname*{ess\ sup}_{x_{n+1} > 0} |f(x', x_{n+1})| \omega(x_{n+1}).$$

Через $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega)$, $0 < p \le +\infty$, (или $h^p(\omega)$) будем обозначать пространство всех гармонических функций из $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega)$. Как нетрудно убедиться, $h^p(\omega)$ при $1 \le p < +\infty$ является банаховым пространством с указанной нормой. Если же $0 < p < 1$, то формулой

$$d(u,v) = \|u-v\|^p_{h^p(\omega)}, \quad u,v \in h^p(\omega)$$

в $h^p(\omega)$ определяется метрика.

Как известно, ядром Пуассона в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ называется функция

$$P(x) = P(x', x_{n+1}) = C_n \frac{x_{n+1}}{\left(|x'|^2 + x^2_{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

где $C_n = \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. Введем в рассмотрение функцию двух переменных

$$P_m(x,y) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}_{n+1}} P(x'-y', x_{n+1}+y_{n+1}), \tag{1.3}$$

где $m \ge 0$ – целое число. При этом, для простоты будем полагать, что

$$P_0(x,y) \equiv P(x'-y', x_{n+1}+y_{n+1}) = C_n \frac{|x'-y'|^2 - (n+1)(x_{n+1}+y_{n+1})^2}{\left(|x'-y'|^2 + (x_{n+1}+y_{n+1})^2\right)^{\frac{n+3}{2}}}. \tag{1.3'}$$

1.2. Первая оценка нижеприводимой леммы установлена в работе [9], а вторая является ее простым следствием.

Лемма 1.1. *При любом целом $m \ge 0$*

$$|P_m(x,y)| \le C_{n,m}\left(|x'-y'|^2 + (x_{n+1}+y_{n+1})^2\right)^{-\frac{n+m+1}{2}},$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x,y)|dy' \le C(x_{n+1}+y_{n+1})^{-(m+1)}. \tag{1.4}$$

В дальнейшем нам понадобится вспомогательная функция

$$\mathcal{X}(x_{n+1}) = x^{-\gamma/pq}_{n+1}, \qquad 0 < \gamma < B_\omega, \quad q = \frac{p}{p-1}, \tag{1.5}$$

где $1 < p < +\infty$, а B_ω – постоянная, участвующая в оценке (1.2). В дальнейшем через C будем обозначать различные постоянные. Параметры, от которых они зависят, при необходимости будут отмечены в индексе.

Лемма 1.2. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция. Тогда при любых $p \in (1, +\infty)$, $q = p/(p-1)$, $0 < \gamma < 1$, $\alpha > \gamma/q - 1$ и любом неотрицательном целом $m > B_\omega - \gamma/q$ имеет место оценка*

$$\int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_{\alpha,m} \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p.$$

Доказательство. Ясно, что при $0 < x \le 1$

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le x^{-m-1} \int_0^x \frac{\omega(y)}{y^{\gamma/q}} dy. \tag{1.6}$$

Интегрированием по частям приходим к равенству

$$\int_0^x \frac{\omega(y)}{y^{\gamma/q}} \left(1 + \frac{\alpha + \mathcal{E}(y)}{1-\gamma/q}\right) dy = \frac{\omega(x) x^{1-\gamma/q}}{1-\gamma/q}.$$

С учетом (1.2) получим

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le \frac{\omega(x) x^{1-\gamma/q}}{\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\left(1+\frac{\alpha+B_\omega}{1-\gamma/q}\right)} = \frac{\omega(x)[\mathcal{X}(x)]^p x}{\left(1-\frac{\gamma}{q}\right)\left(1+\frac{\alpha+B_\omega}{1-\gamma/q}\right)}.$$

Тем самым, ввиду (1.6)

$$\int_0^x \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_\alpha \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p, \quad 0 < x \le 1. \tag{1.7}$$

Теперь заметим, что при $x \ge 1$ имеем

$$\int_x^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy = \int_x^{+\infty} \frac{\omega(y) dy}{y^{\gamma/q}(x+y)^{m+1}} \le \int_x^{+\infty} \frac{\omega(y) dy}{y^{m+1+\gamma/q}}. \tag{1.8}$$

Интегрированием по чатсям находим, что

$$\int_x^{+\infty} \frac{\omega(y)}{y^{m+1+\gamma/q}} \left(1 - \frac{\alpha + \mathcal{E}(y)}{m+\gamma/q}\right) dy = \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p.$$

Подставив последнее выражение в (1.8), получим

$$\int_x^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y)]^p \omega(y)}{(x+y)^{m+1}} dy \le C_{\alpha,m} \frac{\omega(x)}{x^m} [\mathcal{X}(x)]^p, \quad 1 \le x < +\infty.$$

Объединяя эту оценку с (1.7), приходим к утверждению леммы.

Нам понадобится также приведенное ниже обобщение известного результата Харди–Литтлвуда, установленное в работе [10].

Лемма 1.3. *Пусть функция u гармонична в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, и пусть $B \subset G$ – шар с центром в точке x и $|B|$ – его лебегова мера. Тогда при любом $p \in (0, +\infty)$ имеет место оценка*

$$|u(x)|^p \leq \frac{C_p}{|B|} \int_B |u(y)|^p dy. \tag{1.9}$$

Лемма 1.4. *Пусть $0 < p < +\infty$ – любое число, функция ω удовлетворяет всем условиям леммы 1.2, $u \in h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ и $0 < p < +\infty$. Тогда имеет место оценка*

$$|u(x)| \leq C_n \frac{\|u\|_{h^p(\omega)}}{[x^{n+1}_{n+1}\omega(x_{n+1})]^{1/p}}, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

Доказательство. Пусть в оценке (1.9) $B_r(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ – шар радиуса $r = x_{n+1}/2$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Заметим, что $|B_r(x)| = C_n x^{n+1}_{n+1}$ и при любом $y \in B_r(x)$ имеем $2y_{n+1}/3 \leq x_{n+1} \leq 2y_{n+1}$. Из (1.9) следует, что

$$|u(x)|^p \omega(x_{n+1}) \leq C_n\, x^{-n-1}_{n+1} \int_{B_r(\omega)} |u(y', y_{n+1})|^p \omega(x_{n+1}) dy' dy_{n+1}. \tag{1.10}$$

Теперь заметим, что если в представлении (1.1)

a) $\alpha \in (-1, 0)$, то

$$\omega(x_{n+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\, y_{n+1}\right)^\alpha \exp\left(\int_a^{2y_{n+1}/3} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \exp\left(\int_{2y_{n+1}/3}^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t}\, dt\right) \leq$$
$$\leq \omega\left(\frac{2}{3}\, y_{n+1}\right) \exp\left(\int_{x_{n+1}/3}^{x_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \leq C_n(\omega)\omega(y_{n+1}),$$

b) если же $\alpha \in [0, +\infty)$, то $x^\alpha_{n+1} \leq (2y_{n+1})^\alpha$ и

$$\omega(x_{n+1}) \leq (2y_{n+1})^\alpha \exp\left(\int_a^{2y_{n+1}} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt\right) \leq \omega(2y_{n+1}) \leq C_n(\omega)\omega(y_{n+1}).$$

Тем самым, из (1.10) следует, что $|u(x)|^p \omega(x_{n+1}) \leq C_n x^{-n-1}_{n+1} \|u\|^p_{h^p(\omega)}$ и лемма доказана.

1.3. Следующие теоремы необходимы для дальнейшего изложения, к тому же представляют самостоятельный интерес.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\omega \in S$ и число $\alpha > -1$ удовлетворяет условиям леммы 1.2, а $m > \alpha$ – целое число. Тогда оператор*

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^m_{n+1} P_m(x, y) f(y', y_{n+1}) dy \equiv u(x), \quad f \in L^1\left(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega\right) \tag{1.11}$$

является ограниченным проектором из $L^1\left(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega\right)$ *в* $h^1(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega)$. *При этом, существует постоянная* $C=C_{\alpha,n}$ *такая, что*

$$\|u\|_{h^1(\omega)}\le C\|f\|_{L^1(\omega)}. \tag{1.12}$$

Доказательство. Из (1.11) ясно, что функция $u(x)$ гармонична в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Тем самым, достаточно доказать лишь оценку (1.12). С этой целью заметим, что в силу (1.4)

$$\|u\|_{h^1(\omega)}=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x',x_{n+1})|\omega(x_{n+1})dx'dx_{n+1}\le$$
$$\le\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\omega(x_{n+1})dx'dx_{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y^m_{n+1}|P_m(x,y)||f(x',x_{n+1})|dy'dy_{n+1}=$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|y^m_{n+1}dy'dy_{n+1}\int_0^{+\infty}\omega(x_{n+1})dx_{n+1}\int_{\mathbb{R}^n}|P_m(x,y)|dy'\le$$
$$\le C_n\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|y^m_{n+1}dy'dy_{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\omega(x_{n+1})dx_{n+1}}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}}.$$

Отсюда, в силу леммы 1.2

$$\|u\|_{h^1(\omega)}\le C_{\alpha,n}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y',y_{n+1})|\omega(y_{n+1})dy'dy_{n+1}=C_{\alpha,n}\|f\|_{L^1(\omega)},$$

и теорема доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega\in S$, $\alpha>-1$, $p\in(1,+\infty)$, *а* $m\ge 0$ *– целое число такое, что* $m>(1+\alpha)/p-1$. *Тогда оператор* T_m, *определенный по формуле (1.11), является ограниченным проектором из* $L^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega)$ *в* $h^p(\mathbb{R}^{n+1},\omega)$. *При этом существует постоянная* $C=C_{p,\alpha}$ *такая, что*

$$\|u\|_{h^p(\omega)}\le C\|f\|_{L^p(\omega)}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Из (1.11) в силу неравенства Гёльдера имеем

$$|u(x)|\le\left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y^m_{n+1}|P_m(x,y)|[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q dy'dy_{n+1}\right\}^{1/q}\times$$
$$\times\left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y^m_{n+1}|P_m(x,y)|\frac{|f(y',y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p}dy'dy_{n+1}\right\}^{1/p}$$

В силу лемм 1.1 и 1.2

$$\left\{\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}y^m_{n+1}|P_m(x,y)|[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q dy'dy_{n+1}\right\}^{1/q}\le$$

$$\leq \left\{ C_n \int_0^{+\infty} \frac{y_{n+1}^m [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dy_{n+1} \right\}^{1/q} \leq C_{n,p}\mathcal{X}(x_{n+1}).$$

Тем самым

$$\|u\|^p_{h^p(\omega)} \leq C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_{n+1}^m |f(y', y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \int_0^{+\infty} \omega(x_{n+1})[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p dx_{n+1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x,y)| dx' \leq C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_{n+1}^m |f(y', y_{n+1})|^p}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p \omega(x_{n+1})}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dx_{n+1} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Отсюда следует неравенство (1.13), и теорема доказана.

Для формулировки следующей теоремы введем обозначение

$$\omega_m(x_{n+1}) = \omega\left(\frac{x_{n+1}^m}{\omega(x_{n+1})}\right)^p, \quad x_{n+1} > 0,\ p > 1. \tag{1.14}$$

Теорема 1.3. *Пусть $\omega \in S$ - любая функция. Тогда при любых $\alpha > -1$, $1 < p < +\infty$ и целом $m \geq 0$ оператор*

$$T_m f(x) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y', y_{n+1})\omega(y_{n+1}) P_m(x,y) dy' dy_{n+1} = u(x)$$

является ограниченным проектором из $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ в $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$. При этом существует постоянная $C = C_n$ такая, что

$$\|u\|_{h^p(\omega_m)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Доказательство. В силу неравенства Гёльдера

$$|u(x)|^p \leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y', y_{n+1})|^p \omega(y_{n+1})}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} |P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q |\omega(y_{n+1})| P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \right\}^{p/q}.$$

Используя лемму 1.2, находим, что

$$\left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{X}(y_{n+1})]^q |\omega(y_{n+1})| P_m(x,y)| dy' dy_{n+1} \right\}^{p/q} \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^q \omega(y_{n+1})}{(x_{n+1}+y_{n+1})^{m+1}} dy_{n+1} \right\}^{p/q} \leq C[\mathcal{X}(x_{n+1})]^p \left(\frac{\omega(x_{n+1})}{x_{n+1}^m}\right)^{p/q}.$$

Отсюда следует оценка

$$\|u\|_{h^p(\omega_m)} \leq C \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y', y_{n+1})|^p \omega(y_{n+1})}{[\mathcal{X}(y_{n+1})]^p} dy' dy_{n+1} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} [\mathcal{X}(x_{n+1})]^p x_{n+1}^m dx_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} |P_m(x,y)| dx \leq C\|f\|^p_{L^p(\omega)},$$

доказывающая нужное утверждение.

§ 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССОВ $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+;\omega)$

2.1. При $1 \le p < +\infty$ имеет место

Теорема 2.1. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция, и пусть $\alpha > -1$ и $p \in [1,+\infty)$ – любые числа, а $m > (\alpha+1)/p - 1$ – целое неотрицательное число. Тогда следующие утверждения равносильны :*

1) $u \in h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+,\omega)$;

2) $$u(x) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} y^m_{n+1} P_m(x,y) f(y',y_{n+1})dy'dy_{n+1}, \qquad (2.1)$$

где $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+\omega)$, при этом $||u||_{h^p(\omega)} \le C||f||_{L^p(\omega)}$ для некоторой постоянной $C_{p,\omega}$.

Доказательство. Согласно теоремам 1.1 – 1.3 из 2) следует 1). Докажем обратное утверждение. Из леммы 1.1 и того, что $\omega(x_{n+1})$ сверху и снизу оценивается степенями x_{n+1} (последнее вытекает из формул (1.1) и (1.2)) следует, что при выполнении 1) интеграл (2.1) сходится. Оставшуюся часть доказательства мы опускаем, ибо оно сводится к повторению части доказательства теоремы 1 работы [11].

2.2. В случае, когда $0 < p \le 1$ интеграл (1.11) может быть расходящимся. При $p = 1$ имеют место два представления, для установления которых нам понадобится следующая лемма из [12] (гл. 6, теорема 1).

Лемма 2.1. *В $\mathbb{R}^{n+1}_+$ существует набор $\{\Delta_k\}_0^\infty$ замкнутых кубов со сторонами, параллельными координатным осям,* такой, что

1) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \mathbb{R}^{n+1}_+$,

2) внутренности Δ_k попарно не пересекаются,

3) $diam\,\Delta_k = dist\left(\Delta_k C\mathbb{R}^{n+1}_+\right) \le 4 diam\,\Delta_k$.

Если Δ^*_k $(k \ge 1)$ – кубы с теми же центрами, что и Δ_k, но растянутые на 5/4, то из системы $\{\Delta^*_k\}_1^\infty$ можно выбрать конечное покрытие $\mathbb{R}^{n+1}_+$ (любой куб Δ^*_k $(k \ge 1)$ пересекается не более чем с 12^{n+1} кубами из $\{\Delta_k\}_1^\infty$).

Опираясь на эту лемму, повторением рассуждений из доказательства леммы 1.4 приходим к следующему результату.

Лемма 2.2. *Пусть Δ_k – какой-либо куб из набора $\{\Delta_k\}_1^\infty$ леммы 2.1, а $x^{(k)}$ – центр этого куба. Если функция u гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, то при любых $p \in (0, +\infty)$ и $\omega \in S$ имеет место оценка*

$$\max_{x\in\Delta_k} |u(x)|^p \omega\left(x_{n+1}^{(k)}\right) \leq \frac{C_\omega}{|\Delta_k^*|} \int_{\Delta_k^*} |u(y)|^p \omega(y_{n+1}) dy' dy_{n+1},$$

где $x_{n+1}^{(k)}$ – $(n+1)$-ая координата точки $x^{(k)}$.

Основным результатом статьи для случая $0 < p \leq 1$ является

Теорема 2.2. *Пусть $\omega \in S$ – любая функция, и пусть $\alpha > -1$, $0 < p \leq 1$ – любые числа, а m – натуральное число такое, что $m > (1+\alpha+n)/p - n - 1$. Тогда класс $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m P_m(x, y) d\mu(y), \tag{2.2}$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}_+^{n+1}$, подчиненная условию

$$\sum_{k=1}^\infty [\mu(\Delta_k)]^p \omega\left(|\Delta_k|^{\frac{1}{n+1}}\right) |\Delta_k|^{1-p} < +\infty,$$

где Δ_k – кубы из леммы 2.1.

Доказательство. Сначала докажем, что любая функция, допускающая представление (2.2), принадлежит $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$. Из (2.2) следует, что

$$\begin{aligned}\|u\|_{h^p(\omega)}^p &\leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \omega(x_{n+1}) \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m |P_m(x, y)| d\mu(y)\right)^p dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \omega(x_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^\infty \int_{\Delta_k} y_{n+1}^m |P_m(x, y)| \mu(y)\right)^p dx.\end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись равенством $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, $(a, b \geq 0,\ p \in (0, 1])$, получаем

$$\|u\|_{h^p(\omega)}^p \leq \sum_{k=1}^\infty |\mu(\Delta_k)|^p \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \max_{y\in\Delta_k} \left(y_{n+1}^m |P_m(x, y)|\right)^p \omega(x_{n+1}) dx. \tag{2.3}$$

Теперь нетрудно заметить, что

$$\max_{y\in\Delta_k} \left(y_{n+1}^m |P_m(x, y)|\right)^p \leq C \left(\left(y^{(k)}\right)_{n+1}^m \left|P_m\left(x, y^{(k)}\right)\right|\right)^p,$$

где $y^{(k)}$ – центр куба Δ_k. Тем самым, (2.3) можно записать в виде

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C\sum_{k=1}^{\infty}|\mu(\Delta_k)|^p\left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{mp}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\left|P_m\left(x,y^{(k)}\right)\right|^p\omega(x_{n+1})dx. \qquad (2.4)$$

Воспользовавшись свойствами функции P_m, леммой 1.1, а также условиями теоремы, нетрудно получить оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|P_m\left(x,y^{(k)}\right)\right|^p dx' \le C\left(x_{n+1}+\left(y^{(k)}\right)_{n+1}\right)^{-p(n+m+1)+n}$$

Подставив эту оценку в (2.4), получим

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C\sum_{k=1}^{\infty}|\mu(\Delta_k)|^p\left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{mp}\int_0^{+\infty}\frac{\omega(x_{n+1})dx_{n+1}}{\left(x_{n+1}+\left(y^{(k)}\right)_{n+1}\right)^{p(n+m+1)-n}},$$

и, поскольку $|\Delta_k| = \left(y^{(k)}\right)_{n+1}^{n+1}$, то в силу леммы 1.2

$$\|u\|_{h^p(\omega)} \le C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu(\Delta_k)|^p\left(y_{n+1}^{(k)}\right)^{mp}\omega\left(y_{n+1}^{(k)}\right)}{\left(y_{n+1}^{(k)}\right)^{p(n+1+m)-n-1}} =$$

$$= C_1\sum_{k=1}^{\infty}\mu(|\Delta_k|)\omega\left(|\Delta_k|^{\frac{1}{m+1}}\right)|\Delta_k|^{1-p} < +\infty.$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что в силу леммы 1.4

$$\max_{x\in\Delta_k}|u(x)|^p\omega(x_{n+1})|\Delta_k^*| \le C\int_{\Delta_k^*}|u(y)|^p\omega(y_{n+1})dy'dy_{n+1}.$$

Запишем эту оценку в виде

$$\max_{x\in\Delta_k}|u(x)|[\omega(x_{n+1})]^{1/p}|\Delta_k^*|^{1/p} \le C_1^{1/p}(B_k)^{1/p},$$

где

$$B_k = \int_{\Delta_k^*}|u(y)|^p\omega(y_{n+1})dy'dy_{n+1}.$$

Из принадлежности $u \in h^p(\mathbb{R}_+^{n+1},\omega)$ следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}B_k < +\infty$. Тем самым, $\sum_{k=1}^{\infty}(B_k)^{1/p} < +\infty$, поскольку $0 < p \le 1$. Поэтому, ввиду (2.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max_{x\in\Delta_k}|u(x)|[\omega(x_{n+1})]^{1/p}|\Delta_k^*|^{\frac{1-p}{p}}|\Delta_k^*| < +\infty.$$

Следовательно

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|u(x)|\omega_1(x_{n+1})dy'dy_{n+1} < +\infty, \quad \text{где} \quad \omega_1(x) = [\omega(x)]^{1/p}x_{n+1}^{\frac{1-p}{p(m+1)}} \in S$$

(последнее включение очевидно ввиду того, что $\omega \in S$). Таким образом, в данной ситуации применима теорема 2.1, в силу которой

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^m_{n+1} P_m(x,y) u(y) dy' dy_{n+1}.$$

Далее очевидно, что можно взять $d\mu(y) = u(y)dy'dy_{n+1} = u(y)dm_{n+1}(y)$, где $m_{n+1}(y)$ – $n+1$-мерная нормированная мера Лебега в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. При этом, в силу лемм 2.1 и 2.2, эта мера удовлетворяет всем необходимым условиям. Теорема доказана.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Нашей целью является доказательство нижеследующей теоремы, устанавливающей представления линейных функционалов, действующих в пространствах $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$, $1 < p < +\infty$.

Теорема 3.1. *Пусть Φ – непрерывный линейный функционал, действующий в пространстве $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ $(1 < p < +\infty)$, и пусть $v(x) = \Phi(P_m(x,y))$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Тогда*

1°. *$v(x) \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$ $(1/p + 1/q = 1)$, где ω_m – функция, определенная по формуле (1.14). При этом имеет место представление*

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} x^m_{n+1} u(x) v(x) dx, \tag{3.1}$$

и существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_2 \|v\|_{h^p(\omega_m)} \le \|\Phi\| \le C_1 \|v\|_{h^p(\omega_m)}. \tag{3.2}$$

2°. *Обратно, любая функция $v \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ по формуле (3.1) порождает непрерывный линейный функционал на пространстве $h^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ $(1 < p < +\infty)$ такой, что выполнены оценки (3.2).*

Доказательство. 1°. Согласно условию теоремы $P_m(x,y) \in h^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega_m)$ и $v(x) = \Phi(P_m(x,y))$. По теореме Хана-Банаха этот функционал можно продолжить до непрерывного линейного функционала, действующего на всем $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$. Далее, в силу теоремы Ф. Рисса существует функционал $\Psi \in L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \omega)$ такой, что

$$\|\Phi\|_{L^p(\omega)} = \|\Psi\|_{L^q(\omega)} \quad \text{и} \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(y)\Psi(y) dm_{n+1}(y).$$

Следовательно

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} P_m(x,y)\Psi(y)dm_{n+1}(y).$$

Из теоремы 2.1 получаем $v \in h^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega_m)$ и $\|v\|_{h^q(\omega_m)} \le C\|\Psi\|_{L^q(\omega)} = C\|\Phi\|$.

Теперь заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} x_{n+1}^m v(x)u(x)dm_{n+1}(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Psi(y)dm_{n+1}(y) \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} u(x)x_{n+1}^m P_m(x,y)dm_{n+1}(x).$$

В силу теоремы 2.1 о параметрическом представлении классов $h^p(\omega)$ последний интеграл совпадает с интегралом

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Psi(y)u(y)dm_{n+1}(x),$$

т.е. равен $\Phi(u)$. Таким образом, нами доказаны равенство (3.1), а также первая оценка в (3.2). Левая оценка в (3.2) будет доказана вместе с 2°.

2°. Пусть $v \in h^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$ – произвольная функция. С применением неравенства Гёльдера легко убедиться в том, что формулой

$$\Phi(u) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} v(x)u(x)x_{n+1}^m dm_{n+1}(x) \tag{3.3}$$

определяется непрерывный линейный функционал на пространстве $h^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, \omega)$, причем такой, что $\|\Phi\| \le C\|v\|_{h^q(\omega_m)}$. Теперь заметим, что подстановка в формуле (3.3) функции $P_m(x,y)$ вместо $u(x)$ дает

$$\Phi(P_m(x,y)) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} P_m(x,y)v(x)x_{n+1}^m dm_{n+1}(x).$$

Однако, в силу теоремы 2.1, последний интеграл совпадает с $v(y)$. Тем самым, $v(y) = \Psi(P_m(x,y))$. Ввиду 1° $\|v\|_{h^q(\omega_m)} \le C\|\Phi\|$, откуда следует левое неравенство (3.3). Теорема доказана.

ABSTRACT. The paper establishes descriptive representations of the weighted classes $h^p(\omega)$ of functions harmonic in the upper half-space $\mathbb{R}_+^{n+1}$ of $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \ge 1$). A representation of continuous linear functionals in $h^p(\omega)$ is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН АрмССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Матем. и Мех. АН АрмССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 13, № 5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
4. Ф. А. Шамоян, "Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$", Матем. Сборник, т. 107(149), стр. 446 – 462, 1978.
5. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, № 3, стр. 557 – 561, 1981.
6. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и некоторые вопросы представления в пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. матем. журнал, т. 31, № 2, стр. 197 — 215, 1990.
7. Ф. А. Шамоян, М. А. Закарян, "Некоторые вопросы представления в весовых пространствах гармонических в шаре функций", ДАН Армении, т. 94, № 4, стр. 210 – 216, 1993.
8. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции, М., Наука, 1985.
9. Ch. Fefferman, E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math. v. 129, pp. 137 — 193, 1972.
10. F. Ricci, M. Taibleson, "Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure", Ann. Seuds. Nor. Soperiore, Piza, Serie 6, vol. 10, № 1, pp. 1 – 54, 1983.
11. А. Э. Джрбашян, "Классы A_p^α гармонических функций в полупространствах и аналоги теоремы М. Рисса", Изв. АН Армении, Математика, т. 22, № 4, стр. 386 – 398, 1987.
12. Е. И. Стейн, Сигулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973.

20 марта 1997 Ереванский государственный университет