О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАДИАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТЕПЕННОГО РЯДА

А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

В настоящей работе исследуется вопрос о наличии особенностей степенного ряда на границе круга сходимости или вне этого круга. Получены достаточные условия на коэффициенты степенного ряда, гарантирующие наличие радиальных особых точек ряда в заданной угловой области.

1°. В классической работе Фабри [1] исследован вопрос о наличии особых точек степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n, \qquad \limsup_{n\to\infty} |f_n|^{1/n} = 1 \tag{1}$$

на заданной замкнутой дуге единичной окружности. Общая теорема Фабри и ее частные случаи — теорема Фабри о лакунах и об отношении стали основой для большого цикла исследований в этом направлении (см. обзоры [2] и [3]). Ряд общих результатов, содержащих в себе классические теоремы в качестве частных случаев, были получены Н. У. Аракеляном и В. А. Мартиросяном (см. [4]). Предложенный ими подход основан на использовании хорошо известного метода "функции коэффициентов" и условий равновесия между ростом этой функции и количеством ее нулей.

В настоящей работе мы применяем этот подход для исследования вопроса о наличии радиальных особых точек в заданной открытой или замкнутой угловой области.

Определение 1. Для аналитического элемента

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n \tag{2}$$

с радиусом сходимости $R \in (0, +\infty)$ точку $z = re^{i\theta}$, $R \leq r < +\infty$ назовем радиальной особой точкой (особенностью) в направлении θ, если ряд (2) аналитически продолжается вдоль интервала $[0, z)$, не допуская при этом аналитического продолжения на отрезок $[0, z]$.

Радиальные особые точки аналитического элемента это фактически угловые точки его главной звезды (см. [2], стр. 35). Аналогично, точку ∞ естественно считать радиальной особенностью в направлении θ, если элемент (2) аналитически продолжается вдоль луча $\{re^{i\theta};\, r \in [0, +\infty)\}$, не допуская при этом аналитического продолжения в окрестность точки ∞. Следует отметить, что точка ∞ может быть радиальной особенностью по некоторым направлениям и не быть таковой по другим.

Далее через Δ будем обозначать произвольную угловую область с вершиной в точке 0, а через $\overline{\Delta}$ - замыкание Δ в $\mathbb{C}$.

Определение 2. Для элемента (2) скажем, что точка ∞ – радиальная особенность изнутри $\Delta(\overline{\Delta})$, если она является таковой по всем направлениям θ, для которых $e^{i\theta} \in \Delta(\overline{\Delta})$.

2°. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для $n \in \mathbb{N}$, $P \subset \mathbb{N}$ и $\mu > 1$ положим $P_{n,\mu} = P \cap [n, \mu n]$ и введем обозначение

$$S_P(n, \mu) :\, = \begin{cases} \sum\limits_{m \in P_{n,\mu}} \dfrac{1}{m}, & \text{если} \quad P_{n,\mu} \neq \emptyset \\ 0, & \text{если} \quad P_{n,\mu} = \emptyset. \end{cases}$$

Для элемента (1) и $\beta \in \mathbb{R}$ обозначим через Z_β множество мест перемен знака последовательности $\operatorname{Re}\left(f_n e^{i\beta}\right)$ (см. [5], стр. 48). Далее, для $\alpha \in (0, \pi]$ положим $\Delta_\alpha = \{\zeta \colon\, |\arg \zeta| < \alpha\}$, а для $\mu > 1$ положим

$$W(\mu) :\, = \liminf_{k\to\infty} S_{Z_{\beta_k}}(n_k, \mu).$$

Теорема 1. *Пусть для элемента (1) последовательности* $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \uparrow \infty$ *и* $\beta_k \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют условию*

$$\liminf_{k\to\infty} \left|Re\left(f_{n_k} e^{i\beta_k}\right)\right|^{1/n_k} = \rho > 0, \tag{3}$$

и пусть существует $\lambda \in (0, 1]$ *такое, что*

$$\limsup_{\mu\to\infty} [\lambda \log \mu - W(\mu)] > 1 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Тогда ряд (1) будет иметь конечную радиальную особую точку внутри угла $\Delta_{\pi\lambda}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n z^n$$

допускает однозначное аналитическое продолжение в угол $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta_\sigma}$, где $\sigma = \pi(1-\lambda)$, если $\lambda \neq 1$, или в $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$, если $\lambda = 1$. Согласно необходимой части теоремы 1.1 работы [6] будет существовать целая функция φ экспоненциального типа в правой полуплоскости и внутренне экспоненциального типа σ такая, что

$$(-1)^n\varphi(n) = f_n, \quad n \in \mathbb{N}\cap\{0\} \tag{5}$$

и

$$h_\varphi(\theta) \le \sigma|\sin\theta|, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2},$$

где $h_\varphi(\theta)$ – индикатрисса функции φ. Из свойств функции φ следует, что в произвольном угле Δ_α, $\alpha \in (0,\pi/2)$ имеет место оценка (см. [7], стр. 97)

$$\log|\varphi(\zeta)| \le \sigma|\mathrm{Im}\zeta| + \varepsilon_\alpha(|\zeta|)\,|\zeta| + C, \tag{6}$$

где $\varepsilon_\alpha(r)\downarrow 0$ при $r\uparrow\infty$, а $C \ge 0$ – некоторая константа.

Во всей правой полуплоскости $\mathrm{Re}\zeta \ge 0$ имеем

$$\log|\varphi(\zeta)| \le C\,(|\zeta|+1). \tag{7}$$

Для $\mu > 1$ обозначим через g_μ функцию Грина для круга

$$\mathcal{D}_\mu:\ = \{\zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta-\mu| < \mu\}$$

с фиксированным полюсом в точке 1. Легко проверить, что

$$g_\mu(\zeta) = \log\left|\frac{\mu+\mu\zeta-\zeta}{\mu(\zeta-1)}\right|. \tag{8}$$

Для $\beta \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$ определим целые по ζ функции

$$\Psi_k(\zeta,\beta) = \frac{1}{2}\left[\varphi(n_k\zeta)\,e^{i\beta} + \overline{\varphi(n_k\overline{\zeta})}\,e^{-i\beta}\right] \tag{9}$$

и применим к $\Psi_k(\zeta,\beta)$ и кругу $\mathcal{D}_\mu$ формулу Пуассона–Йенсена, записанную для точки $z=1$. Замечая, что $|\Psi_k(1,\beta)| = \left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k}\, e^{i\beta}\right)\right|$, получим

$$\log\left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k} e^{i\beta}\right)\right| + \sum_{\tau_\nu} g_\mu(\tau_\nu) \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{D}_\mu} \log|\Psi_k(\zeta,\beta)|\ \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\ |d\zeta|, \tag{10}$$

где сумма в левой чсти берется по всем нулям (с учетом их кратности) функции $\Psi_k(\zeta,\beta)$ в интервале $[1,2\mu]$, а l – внутренняя нормаль.

Оценим сначала сверху интеграл J в правой части (10). С этой целью представим J в виде суммы интегралов J_1 и J_2 по кривым $\gamma_1 = \partial\mathcal{D}_\mu \bigcap(\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha)$ и $\gamma_2 = \partial\mathcal{D}_\mu \bigcap \Delta_\alpha$, $\alpha\in(0,\pi/2)$. Учитывая, что $|\zeta|\le 2\mu\cos\alpha$ для $\zeta\in\gamma_1$, из оценки (7) получим

$$J_1 < C\ (2\,\mu\, n_k\ \cos\alpha + 1)\,. \tag{11}$$

Далее, с учетом (6) имеем

$$J_2 < \frac{1-\lambda}{2} n_k \int_{\gamma_1} |\mathrm{Im}\zeta|\ \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\ |d\zeta| + 2\,\mu\, n_k\, \varepsilon_\alpha\ (2\,\mu\, n_k\ \cos\alpha) + C. \tag{12}$$

Положим

$$J_0 :\ = \int_{\partial\mathcal{D}_\mu} |\mathrm{Im}\zeta|\ \frac{\partial g_\mu(\zeta)}{\partial l}\ |d\zeta|\,. \tag{13}$$

Учитывая лемму 2 из [4] и соотношение (8), будем иметь

$$J_0 = 2\int_0^{2\mu} g_\mu(t)\,dt = 2\,\frac{2\mu-1}{\mu-1}\,\log(2\mu-1). \tag{14}$$

Отсюда с учетом (11) и (12) получим

$$J < (1-\lambda)\, n_k\, \frac{2\mu-1}{\mu-1}\, \log(2\mu-1) + 2\,\mu\, n_k\, \varepsilon_\alpha\ (2\,\mu\, n_k\ \cos\alpha) + C\ (2\,\mu\, n_k\ \cos\alpha+2)\,. \tag{15}$$

Теперь преобразуем и оценим снизу сумму в левой части (10). Обозначим через $m(t)$ число нулей (с учетом их кратности) функции $\Psi_k(\zeta,\beta)$ на интервале $[1,t]$. Положим

$$\sum\nolimits_{k,\mu} :\ = \sum_{\tau_\nu} g_\mu(\tau_\nu) = \int_1^{2\mu} g_\mu(\tau)\,dm(\tau). \tag{16}$$

С учетом соотношения (8) легко проверить, что функция $g_\mu(\tau) - \dfrac{2}{\tau}$ убывает на промежутке $(1,2\,\mu]$, так что имеем $g_\mu(\tau) \ge \dfrac{2}{\tau} - \dfrac{1}{\mu}$ при $\tau\in(1,2\,\mu]$. Отсюда для $\sum_{k,\mu}$ получим

$$\sum\nolimits_{k,\mu} \ge 2\int_1^{2\mu} \frac{1}{\tau}\,dm(\tau) - \frac{1}{\mu}\,m(2\,\mu) = 2\int_1^{2\mu} \frac{m(\tau)}{\tau^2}\,d\tau. \tag{17}$$

Далее, пусть $W_k(\tau,\beta)$ – число перемен знака конечной последовательности $\mathrm{Re}\left(f_h\, e^{i\beta}\right)$, $n \in [n_k, \tau n_k]$. Согласно лемме 3 работы [4] имеем $m(\tau) \geq (\tau-$ $-1)\, n_k - W_k(\tau,\beta) - 2$. Отсюда и из (17) следует

$$\sum\nolimits_{k,\mu} \geq 2n_k \log 2\mu - 2\int_1^{2\mu} \frac{W_k(\tau,\beta)}{\tau^2}\, d\tau - 2\left(1-\frac{1}{2\,\mu}\right)(n_k+2). \tag{18}$$

Умножая (10) на $(2\,n_k)^{-1}$, из (15) и (18) получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\,n_k}\log\left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k} e^{i\beta}\right)\right| + \log 2\mu - \int_1^{2\mu}\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k\,\tau^2}\, d\tau \leq \\ \leq (1-\lambda)\,\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + 1 + C\,\mu\cos\alpha + \gamma(n_k),\end{gathered} \tag{19}$$

где $\gamma(n_k) \to 0$ при $n_k \to \infty$.

После интегрирования по частям имеем

$$\int_1^{2\mu}\frac{W_k(\tau,\beta)}{n_k\,\tau^2}\, d\tau \leq S_{z_\beta}(n_k, 2\mu).$$

Следовательно, полагая в (19) $\beta=\beta_k$ и перейдя к верхнему пределу при $k\to\infty$, с учетом (3) будем иметь

$$\log 2\mu - W(2\mu) \leq 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\,\log(2\mu-1) + C\,\mu\cos\alpha.$$

Отсюда при $\alpha\to\pi/2$ получим

$$\lambda\log 2\mu - W(2\mu) \leq 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \delta(\mu),$$

где $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to +\infty$. Переходя здесь к верхнему пределу, придем к противоречию с условием (4).

3°. Положим далее

$$P:=\{n\in\mathbb{N}:\ f_n\neq 0\}=\{m_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Пусть теперь $f_n = |f_n|\, e^{i\omega_n}$, где ω_n выбраны так, что $|\omega_{n+1}-\omega_n| \leq \pi$. Определим для $\mu>1$ и $n\in\mathbb{N}$

$$V^*(n,\mu):=\frac{1}{\pi}\sum_{k\in[n,\mu n]}\frac{|\omega_{k+1}-\omega_k|}{k},$$

и для бесконечного множества $Q\subset\mathbb{N}$ положим

$$V_Q^*(\mu):=\limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in Q}} V^*(n,\mu).$$

Теорема 2. *Пусть для бесконечной последовательности $Q \subset \mathbb{N}$ выполнено условие*

$$\liminf_{\substack{n\to\infty \\ n\in Q}} |f_n|^{1/n} = \rho > 0. \tag{20}$$

Если для некоторого числа $\lambda \in (0,1]$ имеем

$$\limsup_{\mu\to\infty} \left(\lambda \log\mu - V_Q^*(\mu)\right) > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}, \tag{21}$$

то ряд (1) будет иметь радиальную особенность в угле $\Delta_{\pi\lambda}$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Положим $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, будем исходить из неравенства (19). Разделив на π, проинтегрируем обе его части по β от нуля до π. Получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2n_k}\log\frac{1}{2}|f_{n_k}| + \log 2\mu - \frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{1}{n_k\tau^2}\int_0^{\pi} W_k(\tau,\beta)\,d\beta\,d\tau \le \\ \le (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\log(2\mu-1) + C\mu\cos\alpha + \gamma(n_k).\end{gathered} \tag{22}$$

Далее, согласно оценке работы [4] (стр. 17) имеем

$$\int_0^{\pi} W_k(\tau,\beta)\,d\beta \le V(\tau,k) := \sum_{n\in[n_k,\tau n_k]} |\omega_{n+1}-\omega_n|. \tag{23}$$

С учетом этого неравенства и соотношения (20), после перехода в (22) к верхнему пределу, получим

$$\frac{1}{2}\log\rho + \log 2\mu - \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{V(\tau,k)}{n_k\tau^2}\,d\tau \le 1 + C\mu\cos\alpha + (1-\lambda)\frac{2\mu-1}{2(\mu-1)}\log(2\mu-1). \tag{24}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_1^{2\mu}\frac{V(\tau,k)}{n_k\tau^2}\,d\tau \le V^*(n_k,2\mu). \tag{25}$$

При $\alpha \to \pi/2$ из (24) будем иметь

$$\lambda\log 2\mu - V_Q^*(\mu) \le 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \delta(\mu),$$

где $\delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Это противоречит условию (21).

Далее мы будем использовать следующие обозначения : обозначим через $|I|$ длину отрезка $I \subset \mathbb{R}$; для множества $Q \subset \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{N}_Q(I) = \mathcal{N}(I)$ число элементов множества $Q \bigcap I$. При $I = [0,t], t > 1$ положим $\mathcal{N}_Q(I) = \mathcal{N}_Q(t) = \mathcal{N}(t)$.

Следствие 1. Пусть для элемента (1) последовательность $\mathcal{Q} \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условию (20) и

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathcal{N}_{\mathcal{Q}}(t)}{t} = 1. \tag{26}$$

Если для некоторого $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ существует конечный предел

$$\lim_{\substack{m_k\to\infty \\ m_k\in\mathcal{Q}}} \frac{f_{m_k} e^{i\theta_0 m_k}}{f_{m_{k+1}} e^{i\theta_0 m_{k+1}}} > 0, \tag{27}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ ряд (1) будет иметь конечную радиальную особенность в некотором направлении θ, $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$.

Доказательство. Очевидно, что можно предположить $\theta_0 = 0$. Согласно теореме 2 достаточно доказать, что $V_{\mathcal{Q}}^*(\mu) = 0$ для любого $\mu > 1$. С этой целью покажем, что для любого $\mu > 1$ существует последовательность $n_k \in \mathcal{Q}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{N}(\tau n_k) - \mathcal{N}(n_k)}{(\tau - 1)n_k} = 1, \quad \text{при} \quad \tau \in (1, \mu]. \tag{28}$$

Пусть $I_k' \subset I_k$, $k \in \mathbb{N}$ и

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{|I_k'|}{|I_k|} > 0.$$

Тогда легко проверить, что если $\mathcal{N}(I_k)/|I_k| \to 1$ при $k \to \infty$, то $\mathcal{N}(I_k')/|I_k'| \to 1$. Пусть теперь $t_k \uparrow \infty$ – такая последовательность, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{N}(t_k)}{t_k} = 1. \tag{29}$$

Из вышесказанного следует, что для фиксированного $r_0 \in (0, \mu^{-1})$ и достаточно большого k существует число $n_k \in \mathcal{Q} \bigcap [r_0 t_k, \mu^{-1} t_k]$. Применяя то же замечание к интервалам $I_k = [0, t_k]$ и $I_k' = [n_k, \tau n_k]$, $\tau \in (1, \mu]$, с учетом (29) получим (28).

Далее, с учетом (27) легко проверить, что

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathcal{Q}_{n_k,\mu}} \frac{|\omega_{n+1} - \omega_n|}{n} = 0, \tag{30}$$

где $\mathcal{Q}_{n_k,\mu} = \mathcal{Q} \bigcap [n_k, \mu n_k]$.

Пусть теперь $\mathcal{Q}_{n_k,\mu}' = [n_k, \mu n_k] \setminus \mathcal{Q}$ и $\mathcal{N}_k'(\tau)$ – число элементов множества $\mathcal{Q}_{n_k,\mu}' \bigcap [n_k, \tau n_k]$. Имеем

$$V'(n_k, \mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathcal{Q}_{n_k,\mu}'} \frac{|\omega_{n+1} - \omega_n|}{n} \le \int_1^\mu \frac{1}{n_k \tau} d\mathcal{N}_k'(\tau) = -\frac{\mathcal{N}_k'(\tau)}{\mu n_k} + \int_1^\mu \frac{\mathcal{N}_k'(\tau)}{n_k \tau^2} d\tau. \tag{31}$$

Так как согласно (28) $\dfrac{\mathcal{N}_k'(\tau)}{n_k(\tau-1)} \to 0$ при $k \to \infty$ для всех $\tau \in (1,\mu]$, то из (31) получим, что $V'(n_k,\mu) \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и из (30) окончательно получим, что $V_Q^*(\mu) = 0$.

Далее, для бесконечного множества $Q \subset \mathbb{N}$ положим

$$S_{P,Q}(\mu) = \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in Q}} S_P(n,\mu), \qquad \lambda_{P,Q} = \liminf_{\mu\to\infty} \frac{S_{P,Q}(\mu)}{\log\mu}.$$

Следствие 2 (о лакунах). Пусть для элемента (1) последовательность $Q \subset P$ удовлетворяет условию (20) и существует число $\lambda \in (0,1]$ такое, что

$$\limsup_{\mu\to\infty} [\lambda \log\mu - S_{P,Q}(\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}. \tag{32}$$

Тогда ряд (1) имеет конечную радиальную особенность в любом открытом угле Δ раствора $2\pi\lambda$.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$V_Q^*(\mu) = \liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in Q}} \frac{1}{\pi} \sum_{k\in[n,\mu n]} \frac{|\omega_k - \omega_{k-1}|}{k} \le S_{P,Q}(\mu)$$

и применить теорему 2 к ряду $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{i\theta n} z^n$, где $\theta \in [0,2\pi)$.

Следствие 3. Если в условиях следствия 2 имеем, что $\lambda = \lambda_{P,Q} < 1$, то в произвольном угле Δ раствора больше $2\pi\lambda$ элемент (1) имеет конечную радиальную особенность.

4°. В п. 5 мы покажем, что теорема 2 теряет силу, если условие (20) заменить более слабым условием

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{\mu\ge t\\ n\in Q_t}} [\lambda \log\mu - V^*(n,\mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}, \tag{33}$$

где $Q_t = Q \bigcap [t,+\infty)$. Тем не менее, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть для элемента (1) последовательность* $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ *удовлстворяет условию (20) и для некоторого числа* $\lambda \in (0,1]$ *выполнено условие (33). Тогда либо ряд (1) имеет конечную радиальную особенность в* $\Delta_{\pi\lambda}$*, либо его аналитическое продолжение в* $\Delta_{\pi\lambda}$ *неограничено. Это означает, что в* $\overline{\Delta}_{\pi\lambda} \bigcup \{\infty\}$ *ряд (1) имеет радиальную особенность в некотором направлении* θ, $|\theta| < \pi\lambda$.

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 1. *Пусть элемент (1) допускает аналитическое продолжение f в открытый угол $\Delta'_\sigma = \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}_\sigma$, $\sigma \in (0, \pi)$, и для некоторых констант $\alpha > 0$ и $C > 0$ имеет место оценка*

$$|f(z)| \leq C\,\left(|z|^{-\alpha} + 1\right), \quad z \in \Delta'_\sigma. \tag{34}$$

Тогда существует голоморфная в правой полуплоскости функция φ, удовлетворяющая условию

$$\varphi(n) = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \tag{35}$$

и такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $C_\varepsilon > 0$ такая, что

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq C_\varepsilon\,\exp\left(\sigma\,|\eta| + \varepsilon\xi\right), \quad \xi \geq 0. \tag{36}$$

Доказательство. Для $r \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1 - \sigma)$ положим

$$\gamma'_{r,\delta} = \{z\colon\ |z| = r\} \bigcap \Delta_{\sigma+\delta}, \qquad \gamma''_{r,\delta} = \{z\colon\ \arg z = \sigma + \delta, |z| \geq r\},$$

и определим для $\xi \geq 0$ функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_{r,\delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma''_{r,\delta}} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz = I_1 + I_2,$$

где $z^\zeta = \exp\left(\zeta\,\log z\right)$, $\log z = \log|z| + i\arg z$, $|\arg z| < \pi$. Сходимость интеграла I_2 при $\xi \geq 0$ следует из условия (34). Далее, если положить $\gamma_R = \{z\colon\ |z| = R\} \bigcap \Delta'_\sigma$, то из (34) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{\zeta+1}}\,dz \to 0, \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Отсюда очевидным образом следуют равенства (35), а также независимость значений φ от выбора r и δ. С учетом (34) имеем

$$|I_1| \leq C_r\,\exp\left((\sigma + \delta)\,\eta - \xi\,\log r\right), \qquad |I_2| \leq C_1\,\exp\left((\sigma + \delta)\,\eta - \xi\,\log r\right),$$

где $C_r = \max_{|z|=r}|f(z)|$, а C_1 не зависит от r и δ.

Отсюда при $\delta \to 0$ будем иметь

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq (C_1 + C_r)\,\exp\left(\sigma\,|\eta| - \xi\,\log r\right).$$

Выбирая r достаточно близким к 1, придем к (36).

Доказательство теоремы 3. Предположим, что элемент (1) допускает ограниченное аналитическое продолжение f в угол $\Delta_{\pi\lambda}$. Тогда, применяя предложение 1 к ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n z^{n-1} = (f(-z) - f_0)/z,$$

определим функцию $\Psi_k(\zeta, \beta)$ по формуле (9). С учетом (36) оценим интеграл J в правой части (10). Имеем

$$J \le \frac{n_k}{2}(1-\lambda) J_0 + \varepsilon n_k + \log C_\varepsilon,$$

где J_0 определяется формулой (13). Отсюда с учетом (14), (16) и (18), после умножения (10) на $(2 n_k)^{-1}$ будем иметь

$$\frac{1}{2 n_k} \log\left|\mathrm{Re}\left(f_{n_k} e^{i\beta}\right)\right| + \log 2\mu - \int_1^{2\mu} \frac{W_k(\tau, \beta)}{n_k \tau^2}\, d\tau \le$$
$$\le (1-\lambda)\, \frac{2\mu - 1}{2(\mu - 1)} \log(2\mu - 1) + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k),$$

где $\gamma_0(n_k) \to 0$ при $n_k \to \infty$ и не зависит от μ. Интегрируя обе части полученного неравенства от нуля до π, с учетом (23) и (25) получим

$$\frac{1}{2 n_k} \log \frac{|f_{n_k}|}{2} + \log 2\mu - V^*(n_k, \mu) \le (1-\lambda)\, \frac{2\mu - 1}{2(\mu-1)} \log(2\mu - 1) + 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \gamma_0(n_k).$$

Отсюда с учетом (20) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{\mu \ge t \\ n_k \ge t}} [\lambda \log\mu - V^*(n_k, \mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя ε к нулю, придем к противоречию с условием (32).

Следствие 4 (о лакунах). Пусть для элемента (1) и последовательности $Q \subset P$ выполнено условие (20), и пусть существует число $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\substack{\mu \ge t \\ n \in Q_t}} [\lambda \log\mu - S_P(n, \mu)] > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\rho}. \tag{37}$$

Тогда, если ряд (1) не имеет конечной радиальной особенности в некотором угле Δ раствора $2\pi\lambda$, то его аналитическое продолжение в Δ неограниченно.

Для доказательства заметим, что

$$V^*(n, \mu) = \varepsilon(n, \mu) + \frac{1}{\pi} \sum_{k \in [n, \mu n]} \frac{|\omega_k - \omega_{k-1}|}{k} \le S_P(n, \mu) + \varepsilon(n, \mu),$$

где $\varepsilon(n, \mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$ и $n \to \infty$, и применим теорему 3 к ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n e^{i\theta n} z^n$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Следствие 5. Пусть для элемента (1) последовательность $Q = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (20) и существует последовательность $\mu_k \uparrow \infty$ такая, что

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{S_P(n_k, \mu_k)}{\log \mu_k} = \tau < 1, \tag{38}$$

Тогда ряд (1) в любом замкнутом угле $\overline{\Delta}$ раствора $2\pi\tau$ либо имеет конечную радиальную особенность, либо ∞ является для него радиальной особенностью изнутри $\overline{\Delta}$.

Доказательство. Предположим, что элемент (1) допускает аналитическое продолжение f в некоторый угол $\overline{\Delta}$ раствора $2\pi\tau$ и бесконечность не является для него радиальной особенностью в некотором направлении θ, $e^{i\theta} \in \overline{\Delta}$. Тогда, в частности, f допускает ограниченное аналитическое продолжение в некоторый угол $\Delta_1 \supset \overline{\Delta}$, что невозможно, так как при условии (38) к ряду (1) применимо следствие 4 для любого $\lambda > \tau$.

5°. В этом пункте мы приводим пример степенного ряда, допускающего аналитическое продолжение в область $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, номера ненулевых коэффициентов которого удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \sum_{m_k \le n} \frac{1}{m_k} = 0. \tag{39}$$

Так как из условия (39) следует, что ряд (1) удовлетворяет условию (37) для любого $\lambda \in (0, 1]$, то этот пример показывает, что условие (32) в следствии 2 нельзя заменить более слабым условием (37).

Для начала покажем, что для любых жордановых областей U и V, $0 \notin \overline{V} \subset U$ найдется многочлен P, $P(0) = 0$ такой, что некоторая компонента γ_0 лемнискаты $\{z\colon\ |P(z)| = 1\}$ лежит в области U и содержит внутри себя область $\overline{V}$, причем $P'(z) \ne 0$, $z \in \gamma_0$.

Пусть g, $g(0) = 0$ – конформное отображение области $\overline{U}$ на единичный круг. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\overline{V} \subset \{z\colon\ |g(z)| \le 1 - \varepsilon\} \tag{40}$$

и

$$|g(z)| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in U \setminus \overline{V}. \tag{41}$$

Выберем теперь многочлен Q, $Q(0) = 0$ так, чтобы

$$|Q(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad z \in \overline{U}. \tag{42}$$

Отсюда с учетом (40) имеем $|Q(z)| < 1-\varepsilon/2$, $z \in \overline{V}$. Следовательно, $\overline{V}$ содержится внутри некоторой компоненты γ_0 лемнискаты $\gamma = \{z\colon\ |Q(z)| = 1-\varepsilon/2\}$. С другой стороны, для $z \in \partial U$ имеем $|Q(z)| > |g(z)| - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon/2$. Отсюда следует, что $\gamma_0 \subset U$.

Далее, если бы $Q'(z_0) = 0$, где $z_0 \in \gamma_0$, то в U лежела бы еще одна компонента лемнискаты γ, внешняя по отношению к γ_0. И, следовательно, $Q(z) = 0$ для некоторой точки $z \in U \setminus \overline{V}$, что невозможно согласно (41) и (42). Остается положить $P = (1 - \varepsilon/2)^{-1} Q$.

Пусть теперь V_k – последовательность жордановых областей такая, что $0 \in \overline{V}_k \subset V_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = \mathbf{C} \setminus [1, +\infty)$. Для каждой пары V_k, V_{k+1} подберем многочлен P_k, удовлетворяющий вышеуказанным условиям, и обозначим через γ_k соответствующую компоненту лемнискаты $\{z\colon\ |P_k(z)| = 1\}$. Полагая

$$r_k = \min_{z \in \gamma_k} |z|, \qquad d_k = \deg P_k,$$

имеем, что $r_k \to 1$ при $k \to \infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем последовательность $\nu_p^{(k)} \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\nu_{p+1}^{(k)} > d_k\, \nu_p^{(k)}. \tag{43}$$

Так как последовательность ненулевых коэффициентов ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} w^{\nu_p^{(k)}} \tag{44}$$

будет иметь плотность 0, то согласно теореме Фабри о лакунах единичная окружность $\{w\colon\ |w| = 1\}$ будет для него естественной границей. Тогда γ_k будет естественной границей для суммы ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} [P_k(z)]^{\nu_p^{(k)}}. \tag{45}$$

Действительно, пусть ряд (45) допускает аналитическое продолжение F в окрестность некоторой точки $z_0 \in \gamma_k$. Тогда $F \circ P_k^{-1}$ будет продолжением ряда (44) в окрестности точки $w_0 = P_k(z_0)$, где P_k^{-1} - определенная в окрестности точки w_0 функция, обратная к P_k, $(P_k'(z_0) \neq 0)$.

Если обозначить через α_{kn} коэффициенты Тейлора в точке 0 ряда (45), то

$$\limsup_{n\to\infty} |\alpha_{kn}|^{1/n} = r_k^{-1}. \tag{46}$$

Заметим, что как следует из условия $P_k(0) = 0$ и из (43), частные суммы ряда (45) являются последовательностью частных сумм ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_{kn}\, z^n$, причем $\alpha_{kn} = 0$, $n \notin \bigcup_{p=1}^{\infty}[\nu_p^{(k)}, d_k\, \nu_p^{(k)}]$. Далее, выберем по индукции последовательность λ_k следующим образом. Фиксируем ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$, $\varepsilon_k > 0$ и положим $\lambda_1 = \nu_1^{(1)}$. Допуская, что λ_r выбрано при $r < k$, выберем λ_k. Пусть $A > 0$ такое, что при $m > A$

$$|P_k(z)|^m < \varepsilon_k, \qquad z \in \overline{V}_k \tag{47}$$

и

$$\frac{1}{\log(m\, d_k)} \sum_{n=d_{k-1}\lambda_{k-1}+1}^{m} \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon_k. \tag{48}$$

Теперь согласно (46) можем выбрать

$$\lambda_k = \nu_{pk}^{(k)} > A \tag{49}$$

так, чтобы для некоторого $n_k \in [\lambda_k, d_k\lambda_k]$

$$|\alpha_{kn_k}|^{n_k^{-1}} > r_k^{-1} - \varepsilon_k. \tag{50}$$

Рассмотрим далее ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} [P_k(z)]^{\lambda_k}. \tag{51}$$

Пусть α_n - коэффициенты при z^n после раскрытия скобок. Имеем

$$\alpha_n = \alpha_{kn} \quad \text{при} \quad n \in [\lambda_k, d_k\lambda_k] \quad \text{и} \quad \alpha_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} [\lambda_k, d_k\lambda_k]. \tag{52}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\, z^n \tag{53}$$

будет искомым. Действительно, согласно (47) и (49) ряд (51) сходится равномерно внутри области $\mathbf{C} \setminus [1, +\infty)$. Следовательно

$$\limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{1/n} \leq 1.$$

С другой стороны, так как $r_k \to 1$ при $k \to \infty$, то из (50) имеем

$$\lim_{n_k \to \infty} |\alpha_{n_k}|^{1/n_k} = 1.$$

Таким образом, радиус сходимости ряда (53) равен 1, а сумма ряда (51) является аналитическим продолжением в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. Соотношение же (39) легко проверяется с учетом (48), (49) и (52).

В заключение автор выражает свою признательность профессору Н. У. Аракеляну за постановку задачи и ценные обсуждения.

ABSTRACT. The paper considers singularities of power series on or beyond the boundary of the circle of convergence. Sufficient conditions are found that guarantee the presence of radial singular points of a series in a given angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fabry, "Sur les points singuliers d'une serie de Taylor" [in French], J. de Math. Pures et appl., (5) 4, pp. 317 — 358, 1898.
2. Л. Бибербах, Аналитическое продолжение, М., Наука, 1955.
3. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные ряды : аналитическое продолжение и локализация особенностей, Изд. Ереванского университета, 1991.
4. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 3 — 21, 1987.
5. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. II, М., ГИТТЛ, 1956.
6. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. Сборник, т. 5, стр. 24 — 44, 1984.
7. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.

5 июня 1996

Ереванский государственный университет