СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ H^p $(1 < p < \infty)$

М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, Na 5, 1997

Рассматривая неполную систему рациональных функций в пространстве H^2, Н. А. Геворкян и В. Х. Мусоян построили метод суммирования для биортогонального разложения, где существенно была использована гильбертова структура пространства H^2. В настоящей работе приведены взаимные связи между условиями единственности, замкнутости и полноты биортогональных систем в пространствах H^p, $(1 < p < \infty)$ и введено понятие порожденной биортогональной системы. Затем, используя одну теорему М. Рисса, удается суммировать биортогональное разложение во всех пространствах H^p $(1 < p < \infty)$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система рациональных функций $\{e_k\}_1^\infty$, которая неполна относительно любого из пространств Харди H^p $(1 < p < \infty)$ в единичном круге D. Пусть E_p – замыкание линейной оболочки системы $\{e_k\}_1^\infty$ по норме пространства H^p. Тогда E_p составляет класс функций, вообще говоря, шире класса функций, представимых рядами заданных рациональных функций. Каждой функции

$$f(z) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{p_n} a_k^{(n)} e_k(z) \in E_p,$$

где l.i.m. означает предел по норме пространства H^p, сопоставляется ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k\, e_k(z)$, где $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, и ставится задача суммирования этого ряда к функции $f(z)$. Она решается построением метода суммирования биортогонального разложения функции $f \in E_p$ по неполной системе $\{e_k\}_1^\infty$. В случае $p = 2$ эта задача решена в работе [1], где существенно использована гильбертова структура пространства H^2. Следует отметить, что аналогичные решения задачи суммирования биортогонального разложения предложены для неполной системы экспонент в пространстве $\mathbf{L}^2(0,+\infty)$ (см. [2], [3]) и для неполной системы рациональных функций в пространстве $\mathbf{L}^2(-\infty,+\infty)$ (см. [2]).

В настоящей работе удастся суммировать биортогональное разложение во всех пространствах $\mathbf{H}^p$, $(1 < p < \infty)$. В §1 приведены некоторые результаты общего характера. Это обеспечивает более свободное изложение метода суммирования биортогонального разложения, проведенное в §2.

§1. ПОРОЖДЕННЫЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть $\mathbb{R}$ - линейное нормированное пространство, а $\mathbb{R}^*$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов, определенных на $\mathbb{R}$. Линейно-независимую систему $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}$ и систему функционалов $\{u_k\}_1^\infty \subset \mathbb{R}^*$ называют *биортогональным*, если

$$u_k(e_m) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = m \\ 0, & \text{при} \quad k \neq m. \end{cases}$$

Известно, что для существования биортогональной системы $\{u_k\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}_1^\infty$ была минимальной, т.е. отбрасывание хотя бы одного элемента e_k вызывает уменьшение замкнутой линейной оболочки системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве $\mathbb{R}$.

Для $1 < p < \infty$ рассмотрим пространство $\mathbb{R} = \mathbf{H}^p$, т.е. пространство всех аналитических в единичном круге $\mathbf{D}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r\, e^{i\theta}|^p \, d\theta < \infty.$$

$\mathbf{H}^p$ – банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{H}^p} = \sup_{0<r<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(r\, e^{i\theta}|^p \, d\theta \right\}^{1/p}$$

Известно, что функции пространства $\mathbf{H}^p$ почти везде на единичной окружности имеют предел по некасательным направлениям. Класс предельных функций обозначается через $\mathcal{H}^p$. Оказывается, что (см. [4], стр. 92) $\mathcal{H}^p$ – подпространство пространства $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности и соответствие $f \mapsto \widetilde{f}$ является изометричным изоморфизмом между $\mathbf{H}^p$ и $\mathcal{H}^p$, где $\widetilde{f}$ – предел функции $f \in \mathbf{H}^p$. Поэтому впредь мы не будем различать пространства $\mathbf{H}^p$ и $\mathcal{H}^p$ и для обозначений норм этих пространств будем использовать единый символ $\|\cdot\|$.

Более того (см. [5], стр. 38 и [6], стр. 215), $\mathbf{H}^p$ – класс функций из $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными индексами равны нулю. Если $1 < p < \infty$ и f – функция из $\mathbf{L}^p$ на единичной окружности с рядом Фурье $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$, то ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ является рядом Фурье функции $g \in \mathbf{L}^p$ на единичной окружности, и существует постоянная A_p, зависящая только от p такая, что

$$\|g\|_p \leq A_p \, \|f\|_p.$$

Это утверждение принадлежит М. Риссу и впредь его мы будем использовать в следующей форме :

A. Пусть $f \in \mathbf{L}^p(T)$, $1 < p < \infty$, где T – единичная окружность. Тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

входит в класс $\mathbf{H}^p$ и существует постоянная A_p, зависящая только от p такая, что $\|g\|_p \leq A_p \, \|f\|_p$.

Также известно (см. [4], стр. 174 или [5], стр. 112), что при $1 < p < \infty$ каждый функционал $u \in \mathbf{H}^{p*}$ имеет вид

$$u(f) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}) \, g_\alpha(e^{i\theta}) \, d\theta,$$

где $f \in \mathbf{H}^p$ и семейство функций $\{g_\alpha\}$ составляет некоторый смежный класс в пространстве $\mathbf{L}^q/\mathbf{H}^q(0)$, $q = p/(p-1)$

$$\mathbf{H}^q(0) = \{f \in \mathbf{H}^q : f(0) = 0\}.$$

Отсюда легко выводится (см. [5], стр. 113) формула единственного представления функционала $u \in \mathbf{H}^{p*}$

$$u(f) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{i\theta}) \, \overline{\varphi(e^{i\theta})} \, d\theta, \quad \varphi \in \mathbf{H}^q.$$

Полученное представление назовём *каноническим* и, в основном, его будем применять в форме

$$u(f) = \int_{|t|=1} f(t) \, \overline{\varphi(t)} \, \frac{dt}{it}, \quad f \in \mathbf{H}^p, \quad \varphi \in \mathbf{H}^q, \quad q = p/(p-1). \tag{1}$$

Если $\{e_k\}_1^\infty$ – минимальная система функций из H^p, то для краткости биортогональными будем называть системы $\{e_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_k\}_1^\infty$, где функции $\{\varphi_k\}_1^\infty$ определяются из равенств

$$u_k(e_m) = \delta_{km}, \quad u_k(e) = \int_{|t|=1} e(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,\frac{dt}{it},$$

$$e \in \mathrm{H}^p, \quad \varphi_k \in \mathrm{H}^q, \quad q = p/(p-1), \quad k, m = 1, 2, \ldots$$

Перейдем к вопросу единственности биортогональной системы. Так как наша основная задача имеет аппроксимативный характер, то удобно этот вопрос связать с вопросом замкнутости данной системы относительно всего пространства. Мы будем пользоваться следующими определениями.

Определение 1. Система $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$ называется *замкнутой* относительно пространства H^p, если $E_p = \mathrm{H}^p$, где E_p – замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}_1^\infty$ в пространстве H^p

Определение 2. Система $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$, $1 < p < \infty$ называется *полной* относительно пространства H^q, $q = p/(p-1)$, если из условий

$$\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{e_k(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad f \in \mathrm{H}^q$$

вытекает, что $f \equiv 0$.

Пусть $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Предложение 1. *Для того, чтобы биортогональная системе $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$ система $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^q$ была единственной, необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_k\}_1^\infty$ была замкнутой относительно пространства H^p.*

Доказательство. Необходимость. Предположим противное : $\{\varphi_k\}_1^\infty$ единственна, но $E_p \neq \mathrm{H}^p$. Тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{H}^p \setminus E_p$ и функционал $u \in \mathrm{H}^{p*}$ такие, что $u(f_0) \neq 0$ и $u|_{E_p} = 0$. Пусть функционал u имеет вид

$$u(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\psi(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad f \in \mathrm{H}^p, \quad \psi \in \mathrm{H}^q.$$

Система $\{e_k\}_1^\infty$ неполна относительно пространства H^q, ибо в противном случае из $u|_{E_p} = 0$ вытекает, что $\psi \equiv 0$, откуда и $u(f_0) = 0$, что находится в противоречии с $u(f_0) \neq 0$. Следовательно, существует функция $h \not\equiv 0$ класса H^q такая, что

$$\int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{h(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

В результате, система $\{e_k\}_1^\infty$ будет иметь более одной биортогональной системы (например, $\{\varphi_k\}_1^\infty$ и $\{h+\varphi_k\}_1^\infty$).

Достаточность. Пусть $E_p = \mathrm{H}^p$. Тогда $\{e_k\}_1^\infty$ полна относительно H^q. Действительно, пусть $g \in \mathrm{H}^q$ и для всех $f \in E_p = \mathrm{H}^p$

$$\int_{|t|=1} f(t)\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{it} = 0.$$

Тогда

$$\int_{|t|=1} t^m\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{it} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}\,g\left(e^{i\theta}\right)\,d\theta = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $g \in \mathrm{H}^q$, то последние равенства имеют место и для отрицательных m, следовательно $g \equiv 0$. Полнота доказана.

Если теперь

$$\int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{\varphi_m(t)}\,\frac{dt}{it} = \int_{|t|=1} e_k(t)\,\overline{\psi_m(t)}\,\frac{dt}{it} = \delta_{km},$$

где $\{\varphi_m\}_1^\infty$, $\{\psi_m\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^q$, то $\varphi_m(t) = \psi_m(t)$ почти для всех t, $|t| = 1$, $m = 1, 2, \ldots$, т.е. биортогональная система единственна.

Замечание 1. В ходе доказательства предложения 1 было показано, что замкнутость системы относительно H^p эквивалентна ее полноте относительно H^q, где $1 < p < \infty$ и $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Пусть система $\{e_k\}_1^\infty$ минимальна во всех пространствах H^p $(1 < p < \infty)$ и $E_p \neq \mathrm{H}^p$ для всех $p \in (1, \infty)$. Рассмотрим дополнительное условие $\{\varphi_k\}_1^\infty \subset E_p$ для всех $p \in (1, \infty)$, где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ - система, биортогональная к $\{e_k\}_1^\infty$. В этом случае будем говорить, что $\{\varphi_k\}_1^\infty$ - *порожденная биортогональная система* системы $\{e_k\}_1^\infty$. Легко установить, что порожденная биортогональная система единственна. Пусть

$$u_k(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_k(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad f \in \mathrm{H}^p, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\varphi_k\}_1^\infty$ – порожденная биортогональная система системы $\{e_k\}_1^\infty \subset \mathrm{H}^p$. Каждой функции $f \in \mathrm{H}^p$ сопоставим следующий ряд :

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} u_k(f)\, e_k(z) \tag{2}$$

Ряд (2) называется *порожденным биортогональным разложением* функции $f \in \mathrm{H}^p$ по системе $\{e_k\}_1^\infty$. Ниже предлагается метод суммирования этого ряда в случае системы рациональных функций.

§2. НЕПОЛНАЯ СИСТЕМА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В единичном круге D рассмотрим систему рациональных функций

$$e_{ks}(z) = \frac{s!}{2\pi i} \cdot \frac{z^s}{(1-\overline{\lambda}_k z)^{s+1}}, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1, \tag{3}$$

где $|\lambda_k| < 1$, $k = 1, 2, ...$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Функции системы (3) входят в каждый класс H^p при $1 < p < \infty$.

Предложение 2. *Для неполноты системы (3) относительно любого из пространств* H^p $(1 < p < \infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m_k\,(1 - |\lambda_k|) < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (3) неполна относительно любого из пространств H^p $(1 < p < \infty)$. Тогда существует ненулевая функция $f \in \mathrm{H}^p$ такая, что

$$\int_{|t|=1} f(t)\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it}, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1.$$

Подставляя выражения (3) в эти равенства, получим

$$\frac{s!}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{(t-\lambda_k)^{s+1}}\, dt = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{5}$$

Так как для функций класса H^p имеет место формула Коши, то из (5) вытекает, что $f^{(s)}(\lambda_k) = 0$. Следовательно (см. [5], стр. 18) имеет место (4).

Достаточность. Из (4) следует, что в D (см. [5], стр. 19) существует произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_k - z}{1 - \overline{\lambda}_k z} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}.$$

Тогда

$$\int_{|t|=1} B(t)\,\overline{e_{ks}(t)}\,\frac{dt}{it} = iB^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \qquad (6)$$

Так как функция $B(z)$ входит во все классы H^p, то из (6) вытекает, что система (3) неполна относительно любого из пространств H^p. Предложение 2 доказано.

Рассмотрим систему функций

$$\varphi_{ks}(z) = \frac{B(z)}{s!\,2\pi}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B(x)\,(x-z)}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1, \qquad (7)$$

где $c_k \subset \mathrm{D}$ – окружность с центром в точке λ_k, не охватывающая точек λ_i, отличных от λ_k ; $z \notin c_k$, а $B(z)$ - произведение Бляшке.

Лемма 1. *Система (7) является порожденной биортогональной системой системы (3),* т.е.

$$\int_{|z|=1} e_{lq}(z)\,\overline{\varphi_{ks}(z)}\,\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ks}(z)\,\frac{dz}{iz} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad l = k, q = s, \\ 0, & \text{при} \quad l \neq k, \\ 0, & \text{при} \quad l = k, q \neq s, \end{cases}$$

и функции системы (7) принадлежат замкнутой линейной оболочке E_p системы (3) в пространстве H^p для любого $p \in (0, \infty)$.

Доказательство. Положим

$$\varphi_{ksn}(z) = \frac{B_n(z)}{s!\,2\pi}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B_n(x)\,(x-z)}\,dx,$$

где

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\lambda_k - z}{1-\overline{\lambda}_k z}\cdot\frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$\int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z)\,\frac{dz}{iz} = \frac{q!}{s!2\pi i}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{B_n(x)}\,dx\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{B_n(z)}{(z-\lambda_l)^{q+1}(z-x)}\,dz.$$

Так как при $n \geq l$ функция $B_n(z)(z-\lambda_l)^{-q-1}$ входит в класс H^p, то для нее справедлива формула Коши и, следовательно

$$\int_{|z|=1}\overline{e_{lq}(z)}\,\varphi_{ksn}(z)\,\frac{dz}{iz} = \frac{q!}{s!2\pi i}\int_{c_k}\frac{(x-\lambda_k)^s}{(x-\lambda_l)^{q+1}}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad l = k, q = s, \\ 0, & \text{при} \quad l \neq k, \\ 0, & \text{при} \quad l = k, q \neq s. \end{cases} \qquad (8)$$

Теперь докажем, что в (8) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что при фиксированных k и s последовательность $\varphi_{ksn}(z)$ сходится к $\varphi_{ks}(z)$ по норме пространства H^p. Действительно

$$\begin{aligned}|\varphi_{ksn}(z) - \varphi_{ks}(z)| \le |B_n(z)| \cdot \int_{c_k} \left|\frac{(x-\lambda_k)^s}{x-z}\right| \cdot \left|\frac{1}{B_n(x)} - \frac{1}{B(x)}\right| \cdot |dx| + \\ + |B_n(z) - B(z)| \int_{c_k} \left|\frac{(x-\lambda_k)^s}{B(x)\,(x-z)}\right| \cdot |dx|.\end{aligned} \tag{9}$$

Так как $|B(z)| = 1$ почти для всех z на единичной окружности и $B_n(x)$ равномерно стремится к $B(x)$ на c_k, то первое слагаемое в (9) стремится к нулю по норме H^p. Такое же поведение имеет и второе слагаемое в (9). Для этого достаточно показать, что B_n стремится к B по L^p-норме на единичной окружности, а это вытекает из соотношений (см. [6], стр. 97) $\|B_m - B_n\|_2 \to 0$ при $m, n \to \infty$ и

$$\begin{aligned}&\|B_m - B_n\|_p \le \|B_m - B_n\|_2 \quad \text{при} \quad 1 < p < 2,\\ &|B_m - B_n|^p \le 2^{p-2}\,|B_m - B_n|^2 \quad \text{при} \quad 2 < p < \infty.\end{aligned} \tag{10}$$

Остается доказать, что система (7) порождается системой (3). Допустим противное : существует некотороая функция φ_{lq} из системы (7), не принадлежащая E_p. Тогда существует функционал $\Phi \in \mathrm{H}^{p*}$

$$\Phi(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\psi(t)}\,\frac{dt}{it}, \qquad \psi \in \mathrm{H}^q, \qquad q = \frac{p}{p-1}$$

такой, что $\Phi(\varphi_{lq}) \ne 0$ и $\Phi|_{E_p} = 0$. Из условия $\Phi|_{E_p} = 0$ вытекает, что

$$\int_{|t|=1} \overline{e_{ks}(t)}\,\psi(t)\,\frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1,$$

что равносильно равенствам

$$\psi^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{11}$$

С другой стороны, применением теоремы Фубини получим

$$0 \ne \int_{|t|=1} \overline{\varphi_{lq}(t)}\,\psi(t)\,\frac{dt}{it} = \frac{1}{q!\,2\pi i} \overline{\int_{c_l} \frac{(x-\lambda_l)^q\,dx}{B(x)}} \int_{|t|=1} \frac{\psi(t)}{B(t)\,(t\overline{x}-1)}\,dt. \tag{12}$$

Положим

$$F(z) = \frac{\psi(z)}{B(z)\,(z\overline{x}-1)}.$$

Тогда функция $F(z)$, в силу (11), аналитична в $\mathbf{D}$. Более того, $F \in \mathrm{H}^q$, что приводит к равенству

$$\int_{|t|=1} \frac{\psi(t)}{B(t)\,(t\overline{z}-1)}\,dt = 0,$$

которое противоречит формуле (12). Лемма 1 доказана.

Следует отметить, что порожденная системой (3) биортогональная система была построена М. М. Джрбашяном [7] и использована в интерполяционных задачах [8]. Интегральное представление (7) получено В. Х. Мусояном [1]. Вопросы базисности системы (3) в подпространствах $E_p \subset \mathrm{H}^p$ $(1 < p < \infty)$ изучены в ряде работ Г. М. Айрапетяна (см. [9] — [11]).

Определение 3. Пусть $\{e_k\} \subset \mathrm{H}^p$ и E_p – замкнутая линейная оболочка системы $\{e_k\}$ в пространстве H^p. Будем говорить, что пространство H^p ортогонально проектируется на подпространство E_p, если для любой функции $f \in \mathrm{H}^p$ существует единственная функция $P_{E_p} f \in E_p$ такая, что интегралы

$$J_k = \int_{|t|=1} [f(t) - P_{E_p} f(t)]\,\overline{e_k(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

существуют и $J_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Функцию $P_{E_p} f(t)$ назовем ортогональной проекцией функции $f \in \mathrm{H}^p$ на подпространство E_p.

В силу предложения 2 при условии (4) система (3) неполна относительно любого из пространств H^p $(1 < p < \infty)$. Учитывая замечание 1, заключаем, что система (3) не замкнута относительно любого из пространств H^p, т.е. $E_p \neq \mathrm{H}^p$ при любом $p \in (1, \infty)$.

Введем обозначения

$$a_{ks}(f) = \int_{|t|=1} f(t)\,\overline{\varphi_{ks}(t)}\,\frac{dt}{it}, \quad r_n(\lambda) = \prod_{k=n+1}^{+\infty} \left[\frac{\lambda_k - \lambda}{1 - \overline{\lambda}_k \lambda} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\lambda_k}\right]^{m_k}.$$

Теорема 1. *Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда пространство H^p ортогонально проектируется на подпространство E_p и для любой функции $f \in \mathrm{H}^p$*

$$P_{E_p} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k - 1} a_{ks}(f) \left\{\overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{1 - \lambda \overline{z}}}\right\}_{\lambda = \lambda_k}, \tag{13}$$

где предел понимается в смысле нормы H^p.

Доказательство. Из (7) имеем

$$a_{ks}(f) = \int_{|t|=1} f(t) \overline{\left\{\frac{B(t)}{s!\,2\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{(x - \lambda_k)^s}{B(x)\,(x - t)}\,dx\right\}}\,\frac{dt}{it}. \tag{14}$$

При фиксированном $z \in \mathbb{D}$ рассмотрим функцию

$$\Psi(\lambda) = \frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}.$$

Она регулярна в $\mathbb{D}$, так как $\frac{1}{\overline{z}} \notin \mathbb{D}$. Учитывая (14), получим

$$\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}\right\}_{\lambda=\lambda_k} = \overline{}$$
$$= \int_{|t|=1} f(t)\left\{\frac{B(t)}{2\pi}\int_{c_k}\frac{1}{B(x)(x-t)}\sum_{s=0}^{m_k-1}\frac{\psi^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(x-\lambda_k)^s\,dx\right\}\frac{dt}{it}. \tag{15}$$

Так как функция

$$\frac{1}{B(x)(x-t)}\sum_{s=m_k}^{+\infty}\frac{\psi^{(s)}(\lambda_k)}{s!}(x-\lambda_k)^s$$

регулярна на $\overline{c_k}$, то заменив в (15) конечную сумму на бесконечную и учитывая, что

$$\frac{\psi(x)}{B(x)} = \frac{1}{B_n(x)(1-x\overline{z})},$$

получим

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)\left\{\frac{d^s}{d\lambda^s}\frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}\right\}_{\lambda=\lambda_k} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{|t|=1} f(t)\left\{\frac{B(t)}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{dx}{B_n(x)(1-x\overline{z})(t-x)}\right\}\frac{dt}{t} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)\,\overline{B(t)}}{tz}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k}\frac{dx}{B_n(x)(1/\overline{z}-x)(t-x)}\right\}dt = \tag{16}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)\,B_n(t)}{B(t)(t-z)}dt - \frac{B_n(z)}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{f(t)}{B(t)(t-z)}dt.$$

Докажем, что для произвольной функции $\Phi \in L^p$ на единичной окружности T

$$\|\Phi B_n - \Phi B\|_p \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Действительно

$$\int_{|t|=1}|\Phi(t)B_n(t) - \Phi(t)B(t)|^p\,dt \le \int_{E_k}|\Phi(t)|^p \cdot |B_n(t) - B(t)|^p dt +$$
$$+k\int_{|t|=1}|B_n(t) - B(t)|^p dt,$$

где $E_k = \{t \in T\colon \quad |\Phi(t)|^p > k\}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Остается заметить, что меры множеств E_k

$$\mu(E_k) = \int_{E_k} |dt| < \frac{1}{k} \int_{E_k} |\Phi(t)|^p \cdot |dt|$$

стремятся к нулю при $k \to \infty$ и воспользоваться соотношениями (10). Так как $\dfrac{f(t)}{B(t)} \in \mathrm{L}^p(T)$, то в силу (17) и утверждения (А) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \overline{\frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}} \right\}_{\lambda=\lambda_k} = f(z) - H(z), \tag{18}$$

где

$$H(z) = \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)} \in \mathrm{H}^p.$$

Заметим, что

$$\int_{|t|=1} H(t)\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = i H^{(s)}(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{19}$$

Пусть $H_1 \in E_p$ и

$$\int_{|t|=1} [f(t) - H_1(t)]\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots, m_k - 1. \tag{20}$$

Учитывая (19) и (20), для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$H_1(t) \equiv f(t) - H(t) \tag{21}$$

почти всюду на T. Для этого сначала допустим, что $f \in E_p$. Тогда $f(t) = \mathrm{l.i.m.} P_n(t)$, где

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} e_{ks}(t). \tag{22}$$

Получим, что при $|z| < 1$

$$\int_{|t|=1} \frac{P_n(t)\,dt}{B_n(t)(t-z)} = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}^{(n)} \frac{s!}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{t^s}{B_n(t)(1-\overline{\lambda}_k t)^{s+1}(t-z)}\, dt. \tag{23}$$

Заметим, что функция

$$F(\omega) = \frac{\omega^s}{B_n(\omega)(1-\overline{\lambda}_k\omega)^{s+1}(\omega - z)}$$

аналитична при $|\omega| > 1$ и $F(\omega) = O(\omega^{-2})$ при $|\omega| \to \infty$ и, следовательно, $\mathrm{Res}(F, \infty) = 0$. Поэтому, сумма (23) равна нулю. Еще раз учитывая (17) и применяя (A), получим, что при $f \in E_p$

$$\int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)} = 0,$$

т.е. учитывая (18)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f) \left\{ \frac{d^s}{d\lambda^s} \frac{r_n(\lambda)}{1-\lambda\bar{z}} \right\}_{\lambda=\lambda_k}, \quad \text{если } f \in E_p. \tag{24}$$

Далее, если $H_1 \in E_p$ и имеют место равенства (20), то

$$\int_{|t|=1} [f(t) - H(t) - H_1(t)]\, \overline{e_{ks}(t)}\, \frac{dt}{it} = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1.$$

Следовательно

$$a_{ks}(f - H - H_1) = 0, \quad k = 1, 2, ...; \quad s = 0, 1, ..., m_k - 1. \tag{25}$$

Но так как $f - H - H_1 \in E_p$, то в силу (24) и (25) получим (21). Теорема 1 доказана.

Замечание 2. В силу (18), (19) и (21)

$$P_{E_p} f(z) = f(z) - \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{f(t)\,dt}{B(t)(t-z)}.$$

В случае $p = 2$ это равенство представляет теорему Дж. Уолша (см. [2], стр. 365 или [1]).

Следствие. Пусть последовательность обобщенных полиномов (22) стремится к функции $f(z)$ по норме пространства H^p. Тогда имеет место (24), где $a_{ks} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{ks}^{(n)}$.

ABSTRACT. In their study of a non–complete system of rational functions in the Hardy space H^2, N. A. Gevorgian and V. Kh. Musoyan have costructed a summation method of biorthogonal decomposition where the Hilbert structure of H^2 has essentially been used. In the present paper relations between conditions of uniqueness, closedness and completeness of biorthogonal systems are presented in the spaces H^p, $(1 < p < \infty)$ and the concept of a generated biorthogonal system is introduced. Basing upon a

theorem of M. Riesz, a summation method in all H^p $(1 < p < \infty)$ spaces is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Геворгян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполной системе рациональных функций в круге", Ученые записки ЕГУ, Математика, № 2, 1990.
2. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогонального разложения по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 21, № 2, стр. 163 — 186, 1986.
3. А. Ф. Леонтьев, Последовательности полиномов из экспонент, М., Наука, 1980.
4. П. Кусис, Введение в теорию пространств H^p, М., Мир, 1984.
5. Peter L. Duren, Theory of H^p Spaces, New York, London, 1970.
6. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
7. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 5, стр. 384 — 409, 1973.
8. М. М. Джрбашян, "Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H^2", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 9, № 4, стр. 339 — 373, 1974.
9. Г. М. Айрапетян, "Кратная интерполяция и базисность некоторых систем рациональных функций в классах H^p Харди", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 12, № 3, стр. 262 — 277, 1977.
10. Г. М. Айрапетян, "О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H^p $(1 < p < \infty)$", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 8, № 6, стр. 429 — 450, 1973.
11. Г. М. Айрапетян, "О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 10, № 2, стр. 133 — 152, 1975.
12. Дж. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., Мир, 1961.

9 июля 1997 Ереванский государственный университет