ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В СМЫСЛЕ L^1–СХОДИМОСТИ

Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

Мы исследуем граничную задачу Гилберта, имея целью найти аналитические в верхней и нижней полуплоскостях функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{y\to 0}||\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)||_1=0$, где $||\cdot||_1$ – норма пространства $L^1(-\infty,+\infty)$, а $a(x)$ кусочно-непрерывна в смысле Гёльдера. Мы решаем эту задачу в классе A_y, состоящем из тех аналитических функций $\Phi(z)$, которые удовлетворяют условию $|\Phi(z)|\le C|z|^m$ в каждой области $|\operatorname{Im} z|\ge y>0$, где C и m зависят только от y.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G^+ – верхняя, а G^- – нижняя полуплоскости комплексной плоскости z. Через A_y обозначим класс аналитических вне действительной оси функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих условию

$$|\Phi(z)|\le C|z|^m \quad \text{в каждой области } |\operatorname{Im} z|\ge y>0, \tag{1}$$

где C и m зависят только от y. Под граничной задачей Гильберта в полуплоскости G^+ в смысле L^1-сходимости будем понимать следующую задачу : найти функцию $\Phi(z)\in A_y$, которая удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{y\to+0}||\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)||_1=0, \quad f(x)\in L^1(-\infty,+\infty), \tag{2}$$

где $\Phi^\pm(z)$ – сужения функции $\Phi(z)$ на G^+ и G^-, соответственно, $||\cdot||_1$ – норма пространства $L^1(-\infty,+\infty)$, $a(x)\not\equiv 0$ – кусочно-непрерывная в смысле Гёльдера функция, имеющая правосторонний и левосторонний пределы в бесконечно удаленной точке и удовлетворяет условию

$$|a(x)-a(-\infty)|<\frac{A}{|x+i|^\mu}, \quad |a(x)-a(+\infty)|<\frac{A}{|x+i|^\mu}, \quad A,\mu>0.$$

Граничная задача Гильберта в ограниченных и неограниченных областях. в классах Гёльдера и L^p, $p > 1$ в классической постановке (т.е. когда предполагается принадлежность $\Phi^+(z)$ определенному классу аналитических функций) исследована многими авторами. Отметим монографии Н. И. Мусхелишвили [1], Ф. Д. Гахова [2] и обзорную статью Б. В. Хведелидзе [3]. Основным аппаратом исследования этой задачи является интеграл типа Коши, который является ограниченным оператором в классах Гёльдера и L^p, $p > 1$.

Исследование задачи Гильберта в L^1 в классической постановке сталкивается с определенными трудностями. Это обусловлено тем, что интеграл типа Коши не является ограниченным оператором в L^1. Учитывая это обстоятельство, мы меняем классическую постановку задачи Гильберта на постановку (2). Отметим, что при исследовании задачи (2) взамен интеграла типа Коши порождаются интегральные операторы, которые ограничены в L^1. Постановка (2) для конечных областей впервые приводилась в работах [4], [5].

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ И ОЦЕНКИ

2.1. Пусть $x_1, ..., x_n$ – конечные точки разрывов функции $a(x)$. Выберем непрерывные ветви функции $\ln a(x)$ так, чтобы в точке $z = \infty$

$$0 \leq \alpha_0 = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i}[\ln a(+\infty) - \ln a(-\infty)] < 1.$$

В каждой точке x_k обозначим

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}[\ln a(x_k - 0) - \ln a(x_k + 0)].$$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – целые числа такие, что $-1 < \lambda_k + \alpha_k \leq 0$, $k = 1, ..., n$. Положим

$$S(z) = (z+i)^N \prod_{k=1}^{n} (z - x_k)^{\lambda_k} \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z+i}{t+i} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-z}\right], \tag{3}$$

где $z \in G^+ \cup G^-$, $N = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

В дальнейшем, если функция $\Phi(z)$ определена на $G^+ \cup G^-$, под $\Phi^\pm(z)$ будем понимать сужения $\Phi(z)$ на G^+ и G^-, соответственно, и обратно, если $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – заданные функции на G^+ и G^-, соответственно, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z) & \text{при} \quad z \in G^+, \\ \Phi^-(z) & \text{при} \quad z \in G^-. \end{cases}$$

Из определения функции $S(z)$ и формул Сохоцкого-Племеля непосредственно следует

Лемма 1. *Функция $S(z)$, определенная по формуле (3), удовлетворяет следующим условиям :*

а) $S^+(x) = a(x)S^-(x)$ для всех $x \neq x_k$, $k = 1, ..., n$;

б) в достаточно малых окрестностях V_k точек x_k, $k = 1, ..., n$, функция $S(z)$ представляется в виде

$$S(z) = \frac{\Omega_k(z)}{(z - x_k)^{\delta_k - i\beta_k}}, \quad \delta_k = -(\alpha_k + \lambda_k), \quad z \in G^\pm \cap V_k,$$

где $\Omega_k(z)$ – голоморфная в $G^\pm \cap V_k$ функция, стремящаяся к определенным отличным от нуля пределам при $z \to x_k$, $z \in G^\pm$;

в) в окрестности $V_0 = \{z : |z| > R\}$ точки $z = \infty$, т.е. для достаточно больших R, имеет место

$$S(z) = (z + i)^{\alpha_0 + i\beta_0}\Omega_0(z), \quad \beta_0 = Im\, \frac{1}{2\pi i}[\ln a(+\infty) - \ln a(-\infty)],$$

где $\Omega_0(z)$ – голоморфная в $G^\pm \cap V_0$ функция, стремящаяся к определенным пределам при $z \to \infty$, $z \in G^\pm$;

г) $[S^\pm(x)]^{-1} \in L^\infty(-\infty, +\infty)$.

2.2. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$ положим

$$I_1(f; x, y) = \frac{S^+(x + iy)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)} \, \frac{y\, dt}{(t - x)^2 + y^2}.$$

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$. Тогда*

$$||I_1(f; x, y)||_1 \leq C\, ||f||_1, \tag{4}$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y.

Доказательство. Из определения $I_1(f; x, y)$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_1(f; x, y)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(t)}{S(t)}\right| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y|S^+(x + iy)|\, dx}{(t - x)^2 + y^2}\right] dt.$$

Докажем, что

$$\left|\frac{y}{S^+(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right| \leq \text{ const} .$$

Выбирая число $A>0$ так, чтобы $x_k\in(-A,A)$, $k=1,...,n$, где x_k – точки разрыва функции $a(x)$, будем иметь

$$\frac{y}{S^+(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}=\frac{y}{S^+(t)}\int_{-A}^{A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}+\frac{y}{S^+(t)}\int_{|x|>A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}.$$

Равномерная ограниченность первого интеграла правой части доказана в работе [4]. Нам следует доказать равномерную ограниченность второго интеграла. Из свойств функции $S^+(z)$ следует, что

$$S^+(z)=S_1(z)(z+i)^{\alpha_0},\qquad \operatorname{Im} z\geq 0,\quad \alpha_0>0,$$

где $S_1(z)$ – ограниченная сверху и снизу функция при $|z|>A$. Поэтому

$$\left|\frac{y}{S^+(t)}\int_{|x|>A}\frac{S^+(x+iy)\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right|\leq\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x+iy+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^2+y^2}=$$

$$=\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|x+iy+i|^{\alpha_0}-|t+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^3+y^2}+\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|t+i|^{\alpha_0}dx}{(t-x)^2+y^2}\leq$$

$$\leq\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(t-x)^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}}+1.$$

Учитывая, что

$$\frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{[(t-x)^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}}\leq$$

$$\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,du}{[u^2+y^2]^{1-\alpha_0/2}}\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{[\tau^2+1]^{1-\alpha_0/2}}<\infty,$$

завершаем доказательство леммы 2.

2.3. Лемма 3. *Для достаточно больших R при $|x|>R$ имеет место оценка*

$$C_1|S^+(x+iy)|\frac{y}{|x+i|}\leq|S^+(x+iy)-a(x)S^-(x-iy)|\leq C_2|S^+(x+iy)|\frac{y}{|x+i|},\quad y>0, \tag{5}$$

где $C_2 > C_1 > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие с г у.

Доказательство. Положим

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\ln a(t)\,dt}{t-z}.$$

Тогда

$$|\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy)| =$$

$$= \left|\frac{x+iy+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln a(t)\,dt}{(t+i)(t-x-iy)} - \frac{x-iy+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln a(t)\,dt}{(t+i)(t-x+iy)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to\infty}\left(\int_{-A}^{A}\frac{x+iy+i}{t+i}\,\frac{\ln a(t)\,dt}{t-x-iy} - \int_{-A}^{A}\frac{x-iy+i}{t+i}\,\frac{\ln a(t)\,dt}{t-x+iy}\right)\right| =$$

$$= \left|\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}\frac{y\ln a(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y\ln a(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\right|.$$

Поэтому

$$|\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy)| < \max|\ln a(t)|. \tag{6}$$

Далее, имеем

$$S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy) = S^+(x+iy)\left[1 - a(x)\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k}\right)^{\lambda_k}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^{N}\right]\exp[\gamma^-(x-iy)-\gamma^+(x+iy)] = S^+(x+iy)\left[1-\left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^{N}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k}\right)^{\lambda_k}\right]\exp[\gamma^-(x-iy)-\gamma^+(x+iy)+\ln a(x)] = S^+(x+iy)\times$$

$$\times\left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^{N}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k}\right)^{\lambda_k}[\exp[\gamma^-(x-iy)-\gamma^+(x+iy)+\ln a(x)]] +$$

$$+S^+(x+iy)\left[1-\left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^{N}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k}\right)^{\lambda_k}\right]. \tag{7}$$

Так как $N = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$, то для некоторых постоянных $k_2 > k_1 > 0$ справедлива оценка

$$k_1\frac{y}{|x+i|^2} \le \left|1-\left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^{N}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x-iy-x_k}{x+iy-x_k}\right)^{\lambda_k}\right| \le k_2\frac{y}{|x+i|^2}. \tag{8}$$

Используя оценки (6) и (8), из (7) будем иметь

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq$$
$$\leq \text{ const } |S^+(x+iy)| \left(\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right| + \frac{y}{|x+i|^2} \right). \tag{9}$$

В окрестности $x = \infty$ функцию $\ln a(t)$ можно представить в виде

$$\ln a(t) = c\chi(t) + \varphi(t), \quad c = \alpha_0 + i\beta_0, \tag{10}$$

где $\chi(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\chi(t) = 0$ при $t < 0$, а $\varphi(t)$ – функция из класса Гёльдера на действительной оси, включая точку $x = \infty$, в окрестности которой удовлетворяет условию

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < A \left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right|^{\mu}, \quad A > 0, \quad \mu > \frac{1}{2}.$$

Учитывая (10), получаем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right| \leq$$

$$\leq C \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right| + C \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} - \varphi(x) \right|.$$

Так как при $x \to \infty$

$$\arctan x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & x \geq 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{x} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & x \leq 1 \end{cases}$$

то

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, dt}{(t-x)^2+y^2} - 1 \right| = \left| \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t-x}{y} \Big|_0^{\infty} - 1 \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right] - 1 \right| = \left| -\frac{1}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right|$$

при $x \geq 1$ и

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\, dt}{(t-x)^2+y^2} \right| = \left| \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t-x}{y} \Big|_0^{\infty} \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right] \right| = \left| \frac{1}{\pi} \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) \right|$$

при $x \leq -1$. Следовательно, для $|x| \geq 1$

$$l_1 \frac{y}{|x+i|^2} \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right| \leq l_2 \frac{y}{|x+i|^2}, \tag{11}$$

где $l_2 > l_1 > 0$ – постоянные, не зависящие от y. Далее, имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\varphi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \varphi(x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x-iy} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-x+iy} - \varphi(x) \right| =$$

$$= |\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x) - \Psi^-(x-iy) + \Psi^-(x)| \leq |\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| +$$

$$+ |\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| \leq \text{ const} \left| \frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x} \right|^\mu + \text{const} \left| \frac{1}{x-iy} - \frac{1}{x} \right|^\mu \leq \text{ const} \frac{y}{|x+i|},$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad z \in G^+ \cup G^-.$$

Окончательно, из (9) получим

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq c_2 |S^+(x+iy)| \frac{y}{|x+i|}.$$

Для доказательства левого неравенства в (5) заметим, что для достаточно малых $y > 0$ имеет место оценка

$$c_3 \frac{y}{|x+i|} \leq \left| \text{ Im } \left[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x)\right] \right| \leq c_4 \frac{y}{|x+i|}.$$

Действительно, вновь используя представление (10), получим

$$\left|\text{Im}[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x)]\right| = \left| \text{Im} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \ln a(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \ln a(x) \right) \right| =$$

$$= \left| \text{Im} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y[c\chi(t) + \varphi(t)]\,dt}{(t-x)^2+y^2} - c\chi(x) - \varphi(x) \right) \right| = \left| \frac{\beta_0}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\chi(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} - \chi(x) \right) \right|.$$

Используя теперь оценку (11), будем иметь

$$\left|\exp\left[-(\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x))\right]\right| >$$

$$> C \left| \text{ Im } \left[\gamma^+(x+iy) - \gamma^-(x-iy) - \ln a(x)\right] \right| > \text{ const } \frac{y}{|x+i|}.$$

Отсюда получим

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \geq C_1 |S^+(x+iy)| \frac{y}{|x+i|},$$

что завершает доказательство леммы 3.

2.4. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty,+\infty)$ положим

$$I_2(f;x,y) = \frac{S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{t-x-iy}.$$

Лемма 4. *Пусть $f(x) \in L^1(-\infty,+\infty)$. Тогда*

$$||I_2(f;x,y)||_1 \leq C\, ||f||_1, \tag{12}$$

где C – постоянная, не зависящая от f и y.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |I_2(f;x,y)|\, dx \leq C \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(t)}{S^+(t)}\right| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y|S^+(x+iy)|\, dx}{|x+i|\, |t-x-iy|}\right] dt.$$

Докажем, что

$$\frac{y}{|S^+(t)|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|S^+(x+iy)|}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq \text{const} .$$

Имеем

$$\frac{y}{|S^+(t)|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|S^+(x+iy)|}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|x+iy|^{\alpha_0}}{|x+i|\, |t-x-iy|}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{y}{|t+i|^{\alpha_0}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x+i|\, |t-x-iy|^{1-\alpha_0}} + y \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x+i|\, |t-x-iy|}.$$

Равномерная ограниченность последних двух интегралов устанавливается так, как это делалось при доказательстве леммы 2 и, тем самым, получаем доказательство леммы.

2.5. Для произвольной функции $f(x) \in L^1(-\infty,+\infty)$ положим

$$I_3(f;z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x-z)}, \quad z \in G^+ \cup G^-.$$

Из лемм 2 и 4 следует оценка

$$||I_3(f;x+iy) - a(x)I_3(f;x-iy)||_1 \leq C||f||_1. \tag{13}$$

Из леммы 3

$$\left\|\frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x)\frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k}\right\|_1 \leq \text{const}\, y, \quad k \geq 1. \tag{14}$$

Наконец, если $a(x)$ имеет разрыв в точке $x=\infty$, то имеет место оценка снизу

$$\left|S^+(x+iy)(x+iy)^k - a(x)S^-(x-iy)(x-iy)^k\right| > \text{const}\, y|S^+(x+iy)|\, |x+i|^{k-1} \tag{15}$$

при $k \geq 0$.

§3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ

3.1. Для исследования задачи (2) мы отдельно будем рассматривать два случая :

1) функция $a(x)$ непрерывна в точке $x = \infty$,

2) $x = \infty$ является точкой разрыва функции $a(x)$.

Сначала рассмотрим второй случай, то есть

$$a(+\infty) \neq a(-\infty). \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (16) и $\Phi(z) \in A_y$ является решением задачи (2). Тогда справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \geq -1$, то

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x - z} + S(z) G\left(\frac{1}{z+i}\right), \quad z \in G^+ \cup G^-, \tag{17}$$

где $G(w)$ – полином порядка N, $G(0) = 0$ при $N > 0$ и $G(w) \equiv 0$ при $N = 0$ или $N = -1$.

б) Если $N < -1$, то задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, ..., -N$$

и $\Phi(z)$ можно представить в виде (17), где $G(w) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $N > 0$. Обозначим

$$\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x - iy) = f_y(x).$$

Так как

$$a(x) = \frac{S^+(x)}{S^-(x)}, \quad x \neq x_k, \quad k = 1, ..., n,$$

то

$$\frac{\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)} - \frac{\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)} = \frac{f_y(x)}{S^+(x)}. \tag{18}$$

Функция $\Phi^-(z - iy)[S^-(z)]^{-1}$ аналитична при $\operatorname{Im} z < 0$ кроме точки $z = -i$, где имеет полюс порядка N. Через $Q_y(1/(z+i))$ обозначим главную часть этой функции в точке $z = -i$. Равенство (18) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)} - \left[\frac{\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)} - Q_y\left(\frac{1}{x+i}\right)\right] = \frac{f_y(x)}{S^+(x)} + Q_y\left(\frac{1}{x+i}\right). \tag{19}$$

Обозначим $\Phi_y^+(z) = \Phi^+(z+iy)$, $\Phi_y^-(z) = \Phi^-(z-iy)$. Так как $\Phi(z) \in A_y$, то

$$\Phi_y^\pm(z) = \frac{S^\pm(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_y(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + S^\pm(z)\left[P_y(z) + Q_y\left(\frac{1}{z+i}\right)\right], \qquad (20)$$

где $P_y(z)$ – произвольный полином. Докажем, что $P_y(z) \equiv 0$. Для произвольного $s > 0$ имеем

$$\Phi^+(x+i(s+y)) - a(x)\Phi^-(x-i(s+y)) = I_3(f; x+i(s+y)) - I_3(f; x-i(s+y)) +$$
$$+S^+(x+is)Q_y\left(\frac{1}{x+i(s+1)}\right) - a(x)S^-(x-is)Q_y\left(\frac{1}{x+i(s-1)}\right) +$$
$$+S^+(x+is)P_y(x+is) - a(x)S^-(x-is)P_y(x-is) = f_{s+y}(x).$$

Так как $f_{s+y}(x) \in L^1(-\infty, +\infty)$, то в силу оценок (13) - (15) заключаем, что $P_y(z) \equiv 0$. Так как при $y \to 0$ $f_y(x) \to f(x)$ в $L^1(-\infty, +\infty)$, то переходя к пределу в (20) и учитывая лемму 1, получим доказательство утверждения а). Остальные утверждения доказываются аналогично.

В теореме 1 при условии (16) мы установили, что каждое решение задачи (2) представляется в виде (17). Докажем основную теорему.

Теорема 2. *Если выполнено условие (16), то справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \geq -1$, то общее решение задачи (2) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + S(z)G\left(\frac{1}{z+i}\right), \quad z \in G^+ \cup G^-, \qquad (21)$$

где $G(w) \equiv 0$ при $N = 0$ или $N = -1$, а при $N > 0$ $G(w)$ – полином порядка N, $G(0) = 0$.

б) Если $N < -1$, то задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \ldots, N$$

и $\Phi(z)$ можно представить в виде (21), где $G(w) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность финитных функций из класса Гёльдера таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_1 = 0.$$

Для любого n положим

$$\Phi_n(z) = \frac{S(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(x)}{S^+(x)}\,\frac{dx}{x-z} + S(z)G\left(\frac{1}{z+i}\right).$$

Докажем, что для любого n

$$\lim_{y\to+0}\|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\| = 0. \tag{22}$$

В самом деле, так как по формуле Сохоцкого-Племеля

$$\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) = f_n(x), \quad x\in(-\infty,+\infty), \quad x\neq x_k,$$

и по лемме 1

$$|\Phi_n^\pm(z)| < \frac{\text{const}}{|z-x_k|^{\delta_k}}, \quad \delta_k < 1$$

в окрестности x_k, $k = 1,\ldots,n$, то для любого $A > 0$ будем иметь

$$\int_{-A}^{A}|\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) - f_n(x)|\,dx = 0. \tag{23}$$

Используя представление

$$\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_3(f_n; x+iy) - a(x)I_3(f_n; x-iy) + J(x,y), \tag{24}$$

где

$$J(x,y) = \sum_{k=1}^{N} c_k\left[\frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x)\frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k}\right],$$

получим

$$\int_{A}^{\infty}|\Phi_n^+(x) - a(x)\Phi_n^-(x) - f_n(x)|\,dx \le J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y),$$

где

$$J_1(x,y) = \int_A^\infty\left|\frac{S^+(x+iy)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\,\frac{dt}{(t-x)^2+y^2} - f_n(x)\right|dx,$$

$$J_2(x,y) = \int_A^\infty\left|\frac{S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\,\frac{dt}{t-x-iy}\right|dx,$$

$$J_3(x,y) = \int_A^\infty\left|S^+(x+iy)G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right) - a(x)S^-(x-iy)G\left(\frac{1}{x+iy+i}\right)\right|dx.$$

Для первого интеграла имеем оценку

$$J_1(x,y) \le \int_A^\infty \frac{|S^+(x+iy)|}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \frac{dt\,dx}{(t-x)^2+y^2} \le C_1 y \int_a^b \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \times$$

$$\times \left[\int_A^\infty \frac{x^{\alpha_0}\,dx}{(t-x)^2+y^2}\right] dt \le C_2 y \int_A^\infty \frac{x^{\alpha_0}\,dx}{(b-x)^2+y^2} = C_2 y \int_{(A-b)/y}^\infty \frac{(\tau y+b)^{\alpha_0}\,d\tau}{\tau^2+1}.$$

Последний интеграл стремится к нулю при $y \to +0$. Для интеграла $J_2(x,y)$ аналогично имеем

$$J_2(x,y) \le c_1 y \int_a^b \left|\frac{f_n(t)}{S^+(t)}\right| \left[\int_A^\infty \frac{|x+iy|^{\alpha_0}\,dx}{|x+i|\,|t-x-iy|}\right] dt \le$$

$$\le c_2 y \int_A^\infty \frac{dx}{|x+i|^{1-\alpha_0}|t-x-iy|} \le c_3 y \int_A^\infty \frac{dx}{|x+i|^{2-\alpha_0}} + c_3 y \int_A^\infty \frac{dx}{|t-x-iy|^{2-\alpha_0}}.$$

Отсюда, учитывая оценку (14) для $J(x,y)$ и равенство (23), получим (22). Используя представление (24), равенство (22) и оценки (13) и (14), будем иметь

$$||\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)||_1 \le ||\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)||_1 +$$

$$+ ||f_n(x) - f(x)||_1 + ||[\Phi_n^+(x+iy) - \Phi^+(x+iy)] - a(x)[\Phi_n^-(x-iy) - \Phi^-(x-iy)]||_1 \le$$

$$\le ||\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)||_1 + ||f_n(x) - f(x)||_1 + c_2 y,$$

откуда, при $y \to +0$ получим

$$\lim_{y\to+0} ||\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)||_1 = 0.$$

3.2. Рассмотрим случай, когда функция $a(x)$ непрерывна в бесконечно удаленной точке и принадлежит классу Гёлдера в окрестности $x = \infty$, то есть

$$|a(x_1) - a(x_2)| < A\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right|^\mu, \quad A > 0, \mu > 0. \tag{25}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $a(x)$ удовлетворяет условию (25) и $\mu > 1/2$, то справедливы следующие утверждения :*

а) Если $N \ge -1$, то общее решение задачи (2) можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{S(z)}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{x-z} + S(z) \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{(z+i)^k}, \tag{26}$$

где при $N = -1$ считаем $c_k = 0$.

б) Если $N < -1$, то для разрешимости задачи (2) необходимы и достаточны условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{S^+(x)} \frac{dx}{(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \dots, -N.$$

Доказательство. Учитывая предыдущую теорему, достаточно доказать, что

$$\lim_{y \to +0} ||S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)||_1 = 0. \tag{27}$$

Действительно, из оценки (9) следует, что

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq \text{const } |S^+(x+iy)| \times$$

$$\times \left(\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x-iy} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-x+iy} - \ln a(x) \right| + \frac{y}{|x+i|^2} \right) =$$

$$= \text{const } |S^+(x+iy)| \left(|\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| + |\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| + \frac{y}{|x+i|^2} \right),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a(t)\, dt}{t-z}.$$

Так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$|\Psi^+(x+iy) - \Psi^+(x)| < \left| \frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} < \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}},$$

$$|\Psi^-(x-iy) - \Psi^-(x)| < \left| \frac{1}{x-iy} - \frac{1}{x} \right|^{\mu} < \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}},$$

то

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq \text{const } \frac{y^{2\mu}}{|x+i|^{2\mu}}.$$

Учитывая, что $\mu > 1/2$, из последней оценки получаем (27).

ABSTRACT. We investigate a version of the Hilbert boundary value problem asking to find analytic in the lower and upper half-planes functions $\Phi^+(z)$ and $\Phi^-(z)$ satisfying the condition $\lim_{y \to 0} ||\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)||_1 = 0$, where $|| \cdot ||_1$ is the norm of $L^1(-\infty, +\infty)$ and $a(x)$ is piecewise continuous in Hölder sense. In the paper we solve this problem in the class A_y consisting of those analytic functions

$\Phi(z)$ that satisfy the condition $|\Phi(z)| \le C|z|^m$ for every $|\operatorname{Im} z| \ge y > 0$, where C and m may depend only on y.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., Наука, 1968.
2. Ф. Д. Гахов, Красвые задачи, М., Наука, 1977.
3. Б. В. Хведелидзе, "Линейные разрывные граничные задачи теории функций", Труды Тбилисского мат. института АН ГрузССР, т. 23, 1956.
4. Г. М. Айрапетян, "Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 1, стр. 3 – 20, 1990.
5. Г. М. Айрапетян, "Граничная задача сопряжения со сдвигом в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 3, 1987.

5 апреля 1997

Армянский государственный инженерный университет