ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ НАИЛУЧШЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А. Л. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 5, 1997

Пусть f – 2π-периодическая функция. Тригонометрический полином $T_m(x)$ порядка не выше m, минимизирующий сумму $\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l) - T_m(x_l)]^2$, где $x_l = \frac{2\pi l}{q}$, $l = 0, 1, ..., q-1$ для некоторого целого числа $q > 2m$, называется полиномом наилучшего квадратического приближения для функции f по системе точек x_l. Пусть H – совокупность всех 2π-периодических функций $f(x)$, которые удовлетворяют условию $|f(x_2) - -f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$, и пусть $C_m^q(x, H) = \sup_{f \in H} |f(x) - T_m(f, x)|$. В настоящей работе будет дано решение задачи об асимптотике величины $C_m^q(x, H)$ при $m, q \to \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для 2π-периодической функции f тригонометрический полином $T_m(x)$ порядка не выше m, который минимизирует сумму

$$\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l) - T_m(x_l)]^2, \quad \text{где } x_l = \frac{2\pi l}{q}, \quad l = 0, 1, ..., q-1$$

для некоторого целого числа $q > 2m$, называется *полиномом наилучшего квадратического приближения* по системе точек x_l. Известно (см. [1]), что этот полином, который мы обозначим через $T_m(f, x)$, имеет вид

$$T_m(f, x) = \frac{1}{q}\sum_{l=0}^{q-1} f(x_l)\frac{\sin(m+1/2)(x_l - x)}{\sin\frac{1}{2}(x_l - x)}.$$

Аппроксимацией функций полиномами наилучшего квадратического приближения занимались С. Н. Бернштейн [1], М. Д. Калашников [2], Г. П. Губанов [3] и другие.

Совокупность всех 2π-периодических функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица $|f(x_2)-f(x_1)|\le|x_2-x_1|$, назовем классом H. Обозначим

$$C^q_m(x,H)=\sup_{f\in H}|f(x)-T_m(f,x)|,\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{xq}{2\pi},$$

$$D_\varphi(s,p)=\frac{2\cos\left(\frac{1}{2}\left\{s\varphi(x)-\frac{s}{2}\right\}\right)\frac{\pi}{q}}{\pi p\sin\frac{\pi}{2p}},\quad s,p\in\mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, а $\{a\}$ – дробная доля a.

В работе [2] получена формула для $C^q_m(x,H)$, с помощью которой можно исследовать асимптотическое поведение этой величины при условии, что q делится на $2m+1$. В настоящей работе мы получаем асимптотики (при $m,q\to\infty$) для $C^q_m(x,H)$ без этого ограничения.

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть x – произвольное число, $m,q\in\mathbb{N}$, $q=q_m>2m$, $\frac{2m+1}{q_m}\to\alpha$ при $m\to\infty$, и пусть*

$$y^q_m(x,\alpha)=C^q_m(x,H)\left[\frac{\pi\alpha/2}{\sin(\pi\alpha/2)}\,\frac{\ln m}{m}\right]^{-1}.$$

а) *Если α иррационально или $\alpha=0$, то*

$$\lim_{m\to\infty}y^q_m(x,\alpha)=\frac{4}{\pi^2}.$$

б) *Если $\alpha=\frac{s}{p}$, где $s,p\in\mathbb{N}$, $(s,p)=1$, то при $\underline{\lim}_{m\to\infty}D_\varphi(s,p)\ge0$ имеем*

$$\underline{\lim}_{m\to\infty}y^q_m(x,\alpha)\ge\frac{4}{\pi^2},\quad \overline{\lim}_{m\to\infty}y^q_m(x,\alpha)\le\frac{2}{\pi p\sin\frac{\pi}{2p}},$$

а при $\overline{\lim}_{m\to\infty}D_\varphi(s,p)<0$ имеем

$$\underline{\lim}_{m\to\infty}y^q_m(x,\alpha)\ge\frac{2}{\pi p}\cot\frac{\pi}{2p},\quad \overline{\lim}_{m\to\infty}y^q_m(x,\alpha)\le\frac{4}{\pi^2}.$$

Кроме того, для любого

$$h\in\left[\frac{4}{\pi^2};\frac{2}{\pi p\sin\frac{\pi}{2p}}\right]\quad\text{или}\quad h\in\left[\frac{2}{\pi p}\cot\frac{\pi}{2p};\frac{4}{\pi^2}\right]$$

и для любого x (за исключением быть может тех x, для которых отношение $x/2\pi$ рационально) существуют последовательности $\{m_n\}$ и $\{q_n\}$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2m_n+1}{q_n}=\frac{s}{p}\quad\text{и}\quad\lim_{n\to\infty}y^{q_n}_{m_n}(x,\alpha)=h.$$

Замечание 1. Величина $C^q_m(x,H)$ имеет период $2\pi/q$ по переменной x. Ввиду этого в дальнейшем будем считать, что $0\le x\le2\pi/q$.

Замечание 2. В определении величины $C_m^q(x,H)$ класс H можно заменить на класс H_x 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица степени 1 и обращающихся в нуль в данной точке x. Таким образом

$$C_m^q(x,H) = \sup_{f\in H_x} |T_m(f,x)|. \tag{1}$$

§3. ДВЕ ЛЕММЫ

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Положим*

$$b_k = \int_0^\infty \frac{\sinh(kx)\,dx}{e^{qx}+1}, \quad \Delta b_k = b_k - b_{k+1}, \quad k = 1,...,m.$$

Тогда

$$\frac{1}{\sin(\pi k/q)} = \frac{2q}{\pi}b_k + \frac{q}{\pi k}, \tag{2}$$

$$b_k = O\left(\frac{k}{q^2}\right), \tag{3}$$

$$\Delta b_k = O\left(\frac{1}{q^2}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pm kx}}{e^{qx}+1}\,dx = \frac{1}{q}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n\pm k/q},$$

то

$$b_k = \frac{k}{q^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-k^2/q^2}. \tag{5}$$

Отсюда, подставляя в формулу (см. [4], стр. 473)

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

значение $x = \pi k/q$ и учитывая (5), получим (2). Далее, из (5) имеем

$$b_k = \frac{k}{q^2}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2-k^2/q^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2-k^2/q^2}\right) \le \frac{k}{q^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2-1/4},$$

откуда следует (3). Для доказательства формулы (4) заметим, что

$$|\Delta b_k| = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{(k+1)t}-e^{kt}+e^{-kt}-e^{-(k+1)t}}{e^{qt}+1}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(e^t-1)(e^{kt}+e^{-(k+1)t}}{2(e^{qt}+1)}\,dt < \int_0^\infty \frac{(e^t-1)e^{kt}}{e^{qt}+1}\,dt < \int_0^\infty \frac{e^t-1}{e^{qt/2}}\,dt = O\left(\frac{1}{q^2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f(x)$ – ограниченная 2π-периодическая функция, и пусть*

$$\Delta f(x_l) = f(x_{l-1}) - f(x_l), \quad ||\Delta f|| = \max_{l\in\mathbb{N}} |\Delta f(x_l)|.$$

Тогда равномерно по m, q и x имеет место формула

$$T_m(f,x) = \frac{1}{2q\sin(\pi m/q)} \sum_{l=\tau}^{q-\tau} \Delta f(x_l) \frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)} + f(0) + O(\tau||\Delta f||),$$

где

$$\tau = \left[\frac{q}{m}\right], \qquad \gamma(l) = \frac{2\pi l}{q} - \frac{\pi}{q} - x.$$

Доказательство. Применяя к $T_m(f,x)$ преобразование Абеля, получим

$$T_m(f,x) = \frac{2}{q}\sum_{l=1}^{q-1} \Delta f(x_l) d_l + f(0), \tag{6}$$

где

$$d_l = \sum_{i=l}^{q-1} D_m(x - x_i),$$

а $D_m(x)$ – ядро Дирихле. Замечая, что

$$d_l = \frac{q-l}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k(\frac{\pi}{q}+x)}{2\sin(\pi k/q)} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\gamma(l)}{2\sin(\pi k/q)},$$

а также

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k(\frac{\pi}{q}+x)}{2\sin(\pi k/q)} = O(q),$$

из (6) получим

$$T_m(f,x) = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1} \Delta f(x_l) \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)} + \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1} l\Delta f(x_l) + f(0) + O(||\Delta f||). \tag{7}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\tau-1} \Delta f(x_l) \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)}\right| = O(\tau||\Delta f||)$$

и, аналогично

$$\frac{1}{q}\sum_{l=q-\tau+1}^{q-1} \Delta f(x_l) \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\gamma(l)}{\sin(\pi k/q)} = O(\tau||\Delta f||),$$

то применяя лемму 1 из (2) и (7), получим

$$T_m(f,x) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=\tau}^{q-\tau} \Delta f(x_l) \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin k\gamma(l)}{k} + f(0) + J_1 + J_2 + O(\tau||\Delta f||), \tag{8}$$

где

$$J_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r} \Delta f(x_l) \sum_{k=1}^{m} b_k \sin k\gamma(l), \quad J_2 = \frac{1}{q}\sum_{l=r}^{q-r} l\Delta f(x_l).$$

Так как

$$\sum_{l=r}^{q-r} \Delta f(x_l) = O(r||\Delta f||),$$

то из формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi$$

имеем

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\left(\frac{\gamma(l)}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\Delta f(x_l) + O(r||\Delta f||) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k} + O(r||\Delta f||). \tag{9}$$

Обратимся к изучению суммы J_1. Обозначим

$$B_m(l) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sin k\gamma(l), \quad A_m(l) = \sum_{k=1}^{m} \sin k\gamma(l).$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$B_m(l) = \sum_{k=1}^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{k} A_i(l)\right)\Delta^2 b_k + \Delta b_{m-1}\sum_{k=1}^{m-1} A_k(l) + b_m A_m(l),$$

где $\Delta^2 b_k = \Delta b_k - \Delta b_{k+1}$. Так как

$$\sum_{i=1}^{k} A_i(l) = \frac{k+1}{2}\cot\frac{\gamma(l)}{2} - \frac{\sin(k+1)\gamma(l)}{4\sin^2\gamma(l)/2},$$

$$\sum_{k=1}^{m-2}(k+1)\Delta^2 b_k = 2b_1 - b_2 - b_{m-1} - (m-1)\Delta b_{m-1},$$

то

$$J_1 = -\frac{2b_m}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin(\gamma(l)/2)} + S, \tag{10}$$

где

$$S = \frac{2}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\left[\left(b_1 - \frac{b_2}{2}\right)\cot\frac{\gamma(l)}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\sin^2\gamma(l)/2}\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k \sin(k+1)\gamma(l) - \frac{\Delta b_{m-1}\sin m\gamma(l)}{4\sin^2\gamma(l)/2}\right]$$

Оценим величину S. Заметим сперва, что

$$\frac{1}{q}\sum_{l=r+2}^{q-r-3}\frac{|\sin(k+1)\gamma(l)|}{\sin^2\gamma(l)/2}\le\frac{1}{q}\sum_{l=r+2}^{[q/2]}\frac{1}{\sin^2\gamma(l)/2}+\frac{1}{q}\sum_{l=[q/2]+1}^{q-r-3}\frac{1}{\sin^2\gamma(l)/2}\le$$

$$\le\frac{q}{4}\sum_{l=r+2}^{[q/2]}\frac{1}{(l-2)^2}+\frac{q}{4}\sum_{l=r+3}^{[q/2]-2}\frac{1}{l^2}+O(1)=O(m). \tag{11}$$

Кроме того, так как

$$\Delta^2 b_k=\int_0^\infty\frac{\Delta^2\sinh(kx)}{e^{qx}+1}\,dx,\quad (\sinh\,kx)''\ge 0,$$

то имеем

$$\Delta^2 b_k\ge 0. \tag{12}$$

Из соотношений

$$\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k=\Delta b_1-\Delta b_{m-1}=O\left(\frac{1}{q^2}\right),\quad \sum_{l=r}^{q-r}\frac{1}{\sin\gamma(l)/2}=O(q^2),$$

а также из (3), (4), (10) – (12) получим

$$S\le||\Delta f||\left[O\left(\frac{1}{q^2}\right)\sum_{l=r}^{q-r}\frac{1}{\sin\gamma(l)/2}+O(qm)\sum_{k=1}^{m-2}\Delta^2 b_k+O\left(\frac{1}{q^2}\right)O(qm)+O(1)\right]=$$

$$=O(||\Delta f||). \tag{13}$$

Следовательно, из (8) – (10) и (13) вытекает оценка

$$T_m(f,x)=-\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k}-\frac{2b_m}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma(l)}+$$

$$+f(0)+O(r||\Delta f||). \tag{14}$$

Займемся изучением величины

$$G=\frac{1}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin k\gamma(l)}{k}.$$

В работе [5] (стр. 182) получена оценка

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\cos(m+1/2)x}{2(m+1)\sin\frac{x}{2}}-\Delta(m+1)\psi_m(x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\Delta^2(k)\psi_k(x),$$

где

$$\Delta(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \Delta^2(k) = \Delta(k) - \Delta(k+1) = O\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

$$\psi_k(x) = -\frac{\sin(k+1)x}{4\sin^2 x/2}.$$

Отсюда, учитывая (11), имеем

$$\left|G - \frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin(\gamma(l)/2)}\right| \le$$

$$\le \left[\Delta(m+1)\sum_{l=r+2}^{q-r-3}|\psi_m(\gamma(l))| + \sum_{k=m+1}^{\infty}\Delta^2(k)\sum_{l=r+2}^{q-r-3}|\psi_k(\gamma(l))| + O\left(\frac{q}{m}\right)\right]O(||\Delta f||). \tag{15}$$

Из (14) с учетом (15) следует, что

$$\left|T_m(f,x) - \frac{2b_m + (m+1)^{-1}}{\pi}\sum_{l=r}^{q-r}\Delta f(x_l)\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma(l)}\right| = O(r||\Delta f||). \tag{16}$$

Замечая, что

$$\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{(m+1)\sin(\gamma(l)/2)}\Delta f(x_l) = O(r||\Delta f||)$$

и используя (11), выводим, что в оценке (16) число $(m+1)^{-1}$ можно заменить на m^{-1}. Так как при этом

$$2b_m + m^{-1} = \frac{\pi}{q\sin(\pi m/q)},$$

то лемма 2 доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Докажем сперва, что равномерно по m, q и x имеет место формула

$$C_m^q(x,H) = \frac{\pi}{q^2\sin(\pi m/q)}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right| + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{17}$$

Отметим, что из определения $C_m^q(x,H)$ и из леммы 2 легко следует оценка сверху :

$$C_m^q(x,H) \le \frac{\pi}{q^2\sin(\pi m/q)}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right| + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{18}$$

Для нахождения оценки снизу обозначим

$$\rho(x_l) = \operatorname{sign}(\cos(m+1/2)\gamma(l)), \quad l_k = \frac{q(2k+1)}{4m+2} + \frac{1}{2} + \frac{xq}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\rho(x_l) = (-1)^{k+1}$ при $l \in (l_k, l_{k+1})$. Построим 2π-периодическую функцию $f_0(t)$ следующим образом : $f_0(t) = 0$ при $0 \le t \le x_{[l_1]+1}$, $f_0(t)$ линейна на $[x_{j-1}, x_j]$ и $f_0(x_j) = f_0(x_{j-1} + (-1)^k 2\pi/q$ при $j \in (l_k, l_{k+1})$, где $j = [l_1]+2, [l_1]+3, ..., [q/6]$. Аналогично, предположим, что $f_0(t) = 0$ при $x_{[l_{2m-1}]} \le t \le 2\pi$, $f_0(t)$ линейна на $[x_{j-1}, x_j]$ и $f_0(x_{j-1}) = f_0(x_j) + (-1)^k 2\pi/q$ при $j \in (l_k, l_{k+1})$, где $j = [l_{2m-1}] - 1, [l_{2m-1}] - 2, ..., [5q/6]$. Для значений $t \in (x_{[q/6]}, x_{[5q/6]}$ функцию f_0 определим линейно. Ясно, что $f_0(t) \in H_x$. Поскольку для построенной функции f_0 имеем

$$\frac{1}{2q\sin(\pi m/q)} \sum_{l=[q/6]+1}^{[5q/6]-1} \Delta f_0(x_l) \frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)} = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\Delta f_0(x_l) = \frac{2\pi}{q}\rho(x_l), \quad l = [l_1]+1, ..., [q/6], \quad l = [5q/6], ..., [l_{2m-1}],$$

то из (1) с учетом леммы 2 получим требуемую оценку снизу, которая вместе с (18) доказывает формулу (17).

Чтобы получить утверждение теоремы для иррациональных α, обозначим

$$L_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{l=2}^{q-1} \frac{|\cos(m+1/2)\gamma(l)|}{\sin(\gamma(l)/2)}$$

и докажем, что

$$L_m(q) = \frac{4\ln q}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cos\left(n\theta\left(\frac{xq}{2\pi} - \frac{1}{2}\right)\right) \times \\ \times \ln\left(\frac{1}{q} + \left\|\frac{n(2m+1)}{q}\right\|\right)(4n^2-1)^{-1} + O(1) \tag{19}$$

равномерно по m, q и x, где $\theta = (2m+1)\pi/q$, а $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого числа. Замечая, что

$$\sum_{l=2}^{q-1} \frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)} = \sum_{l=1}^{q-1} \frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} + O(q),$$

$$\frac{1}{q}\sum_{l=2}^{q-1} \frac{1}{\sin(\gamma(l)/2)} = \frac{2}{\pi}\ln q + O(1)$$

и используя разложение

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(2nx)(4n^2-1)^{-1},$$

получим следующее выражение :

$$L_m(q) = \frac{4\ln q}{\pi^2} + \frac{4}{q\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} + O(1). \tag{20}$$

Имеем

$$\frac{1}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\cos n(2m+1)\gamma(l)}{\sin(\pi l/q)} = \frac{2}{q}\sum_{l=1}^{[q/2]}\frac{\cos 2\pi n(2m+1)l/q\cdot\cos 2\pi n(2m+1)\varphi(x)/q}{\sin(\pi l/q)} +$$

$$\begin{aligned}&+O(1) = \frac{2}{\pi}\ln q\cos 2\pi n(2m+1)\frac{\varphi(x)}{q} - \\ &-\frac{2}{q}\cos 2\pi n(2m+1)\frac{\varphi(x)}{q}\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} + O(1).\end{aligned} \tag{21}$$

Далее, используя равенства

$$\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} = \sum_{l=1}^{q-1}\sum_{k=1}^{n(2m+1)}\sin(2k-1)\pi l/q = \sum_{k=1}^{n(2m+1)}\cot(2k-1)\pi/2q$$

и

$$\sum_{k=1}^{pq}\cot\frac{(2k-1)\pi}{q} = 0, \quad p\in\mathbb{N},$$

получим

$$\sum_{l=1}^{q-1}\frac{\sin^2\pi n(2m+1)l/q}{\sin(\pi l/q)} = \sum_{k=1}^{q\{n(2m+1)/q\}}\cot\frac{(2k-1)\pi}{q}. \tag{22}$$

Обозначим

$$r = q\left\{\frac{n(2m+1)}{q}\right\}, \quad \bar{r} = \min(r; q-r) = q\left\|\frac{n(2m+1)}{q}\right\|.$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^{r}\cot\frac{(2k-1)\pi}{2q} = \sum_{k=1}^{\bar{r}}\cot\frac{(2k-1)\pi}{2q} = \frac{2q}{\pi}\sum_{k=1}^{\bar{r}}\frac{1}{2k-1} + O(q) = \frac{q}{\pi}\ln(1+\bar{r}) + O(q).$$

Отсюда и из (20) – (22) получим формулу (19).

Обозначим

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{q}\sum_{l=r}^{q-r}\left|\frac{\cos(m+1/2)\gamma(l)}{\sin(\gamma(l)/2)}\right|.$$

При $(2m+1)/q \to \alpha \neq 0$ имеем

$$\overline{L}_m(q) = L_m(q) + O(1), \qquad \left\| \frac{n(2m+1)}{q} \right\| \to \|n\alpha\|,$$

где $n\alpha$ – нецелое число для иррациональных α. Разделив (17) на $m^{-1}\ln m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, согласно (19) получим утверждение теоремы для иррациональных α.

Для доказательства теоремы 1 при $\alpha = 0$ оценим $\overline{L}_m(q)$ снизу и сверху. Поскольку

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + O(1), \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

то имеем

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi} \sum_{l=r}^{[q/2]} \frac{|\cos\theta(l-\varphi(x))|}{l-\varphi(x)} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=r}^{[q/2]} \frac{|\cos\theta(l+\varphi(x))|}{l+\varphi(x)} + O(1).$$

Замечая, что

$$\operatorname{sign}(\cos x) = (-1)^{k+1}, \quad \frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi,$$

получим

$$\begin{aligned} \overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^{k+1} \sum_{l=[a_k^+]+1}^{[a_{k+1}^+]} \frac{\cos\theta(l-\varphi(x))}{l-\varphi(x)} + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} (-1)^{k+1} \sum_{l=[a_k^-]+1}^{[a_{k+1}^-]} \frac{\cos\theta(l+\varphi(x))}{l+\varphi(x)} + O(1), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$a_k^{\pm} = \frac{q}{2m+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) \pm \varphi(x).$$

Из (23) следует

$$\begin{aligned} \overline{L}_m(q) \geq \frac{2m+1}{\pi q} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{3}{2}} \sum_{l=[a_k^+]+1}^{[a_{k+1}^+]} \cos\theta(l-\varphi(x)) + \\ + \frac{2m+1}{\pi q} \sum_{k=0}^{[(m-1)/2]} \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{3}{2}} \sum_{l=[a_k^-]+1}^{[a_{k+1}^-]} \cos\theta(l+\varphi(x)) + O(1). \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\sum_{l=[a_k^{\pm}]+1}^{[a_{k+1}^{\pm}]} \cos\theta(l \mp \varphi(x)) = \frac{(-1)^{k+1}[\cos(\frac{1}{2} - \{a_{k+1}^{\pm}\})\theta + \cos(\frac{1}{2} - \{a_k^{\pm}\})\theta]}{2\sin\theta}$$

и

$$2\cos\frac{\theta}{2} \le \cos\left(\frac{1}{2} - \{a_{k+1}^{\pm}\}\right)\theta + \cos\left(\frac{1}{2} - \{a_k^{\pm}\}\right)\theta \le 2,$$

получим оценку снизу :

$$\overline{L}_m(q) \ge \frac{2(2m+1)}{\pi q}\cot\frac{\pi(2m+1)}{2q}\ln m + O(1). \tag{24}$$

Аналогично получается оценка сверху :

$$\overline{L}_m(q) \le \frac{2(2m+1)\ln m}{\pi q}\sin^{-1}\frac{\pi(2m+1)}{2q} + O(1). \tag{25}$$

Из (17), (24) и (25) следует утверждение теоремы 1 для $\alpha = 0$.

Пусть теперь

$$\frac{2m+1}{q} = \frac{s}{p} + \varepsilon, \quad (s,p) = 1, \quad s,p \in \mathbb{N}$$

и $\varepsilon \to 0$ при $m \to \infty$. Докажем формулу

$$\overline{L}_m(q) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\pi^2} + D_\varphi(s,p)\right)\ln q + O(1), & \text{при} \quad |\varepsilon|q \le 3, \\ \frac{4}{\pi^2}\ln q + D_\varphi(s,p)\ln\frac{1}{|\varepsilon|} + O(\varepsilon\ln q), & \text{при} \quad |\varepsilon|q > 3. \end{cases} \tag{26}$$

С этой целью отметим, что

$$\overline{L}_m(q) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{[q/2]}\left(|\cos\theta(l-\varphi(x))| + |\cos\theta(l+\varphi(x))|\right)l^{-1} + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{[q/2]}\left(\left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l - \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right| + \left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l + \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right|\right)l^{-1} + O(\varepsilon\ln q) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{l=kp+1}^{(k+1)p}\left(\left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l - \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right| + \left|\cos\pi\left(\frac{sl}{p} + \varepsilon l + \frac{s\varphi(x)}{p}\right)\right|\right)l^{-1} +$$

$$+ O(\varepsilon\ln q) = \frac{1}{\pi p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q-1}\left(\left|\cos\pi(kp\varepsilon + z_j^-)\right| + \left|\cos\pi(kp\varepsilon + z_j^+)\right|\right)k^{-1} + O(\varepsilon\ln q), \tag{27}$$

где $z_j^{\pm} = \frac{s}{p}(j \pm \varphi(x))$. Обозначим

$$J(z) = \sum_{k=1}^{q-1}|\cos\pi(kp\varepsilon + z)|k^{-1} \tag{28}$$

и докажем, что

$$J(z) = \begin{cases} |\cos\pi z|\ln q + O(1), & \text{при} \quad |\varepsilon|q \le 3, \\ \frac{2}{\pi}\ln(|\varepsilon|q) - |\cos\pi z|\ln\varepsilon + O(\varepsilon\ln q), & \text{при} \quad |\varepsilon|q > 3. \end{cases} \tag{29}$$

Для $\varepsilon = 0$ (29) сразу следует из (28). Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Так как

$$\int_1^q \frac{|\cos\pi(up\varepsilon + z)|}{u}\,du = \sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}\int_k^{k+1} |\cos\pi(up\varepsilon + z)|\,du + O(1),$$

то равномерно по z

$$\left|\int_1^q \frac{|\cos\pi(up\varepsilon + z)|}{u}\,du - \sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}|\cos\pi(pk\varepsilon + z)|\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k}\int_k^{k+1}\big(|\cos\pi(up\varepsilon + z)| - |\cos\pi(kp\varepsilon + z)|\big)\,du\right| + O(1) \leq$$

$$\leq 2\pi|\varepsilon|p\sum_{k=1}^{q-1}\frac{1}{k} + O(1) = O(\varepsilon\ln q) + O(1).$$

Поэтому, с учетом (28) получим

$$J(z) = \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(u + \operatorname{sign}\varepsilon\cdot z)|}{u}\,du + O(\varepsilon\ln q). \qquad (30)$$

Пусть $|\varepsilon|q \leq 3$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$\left|\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(y+t)|}{t}\,dt - \int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi y|}{t}\,dt\right| \leq 2\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\sin\pi t/2|}{t}\,dt = O(1).$$

Из (30) получим (29).

Пусть теперь $|\varepsilon|q > 3$. Имеем

$$\int_{|\varepsilon|p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt = \int_{|\varepsilon|p}^{3p}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt + \int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt =$$

$$= -|\cos\pi z|\ln|\varepsilon| + \int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt + O(1). \qquad (31)$$

Однако

$$\begin{aligned}\int_{3p}^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi(z+t)|}{t}\,dt &= \int_{3p-z}^{|\varepsilon|qp-z}\frac{|\cos\pi x|}{x}\,dx + O(1) = \\ &= \int_1^{|\varepsilon|qp}\frac{|\cos\pi x|}{x}\,dx + O(1) = \frac{2}{\pi}\ln(|\varepsilon|q) + O(1).\end{aligned} \qquad (32)$$

Из (30) – (32) следует (29) и при $|\varepsilon|q > 3$.

Далее, так как при $(s,p) = 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{p}\big(|\cos\pi z_j^-| + |\cos\pi z_j^+|\big) = 2\cos\left(\frac{1}{2} - \left\{s\varphi(x) - \frac{l}{2}\right\}\right)\frac{\pi}{2p}\sin^{-1}\frac{\pi}{2p},$$

то из (27) – (29) следует (26). Пусть выполнено условие $\underline{\lim}_{m\to\infty} D_\varphi(s,p) \geq 0$. Замечая, что $\ln q > -\ln|\varepsilon|$ при $|\varepsilon|q > 3$, из (26) получим

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \geq \frac{4}{\pi^2}, \quad \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \leq \frac{2}{\pi p} \sin^{-1} \frac{\pi}{2p}. \tag{33}$$

Пусть теперь $\overline{\lim}_{m\to\infty} D_\varphi(s,p) < 0$. Из (26) имеем

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \geq \frac{2}{\pi p} \cot \frac{\pi}{2p}, \quad \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{\overline{L}_m(q)}{\ln m} \leq \frac{4}{\pi^2}.$$

Вместе с (17) и (33) это доказывает первую часть утверждения б). Для доказательства заключительной части утверждения б) рассмотрим последовательность

$$\frac{2m_n+1}{q_n} = \frac{ns+\alpha_n}{np}, \quad n \in \mathbb{N};$$

где

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad sn = 0(mod\, 2), \\ 0, & \text{если} \quad sn = 1(mod\, 2), \end{cases}$$

и заметим, что если $\dfrac{x}{2\pi}$ – иррациональное число, то $\left\{\dfrac{sxpn}{2\pi}\right\}$ всюду плотно в интервале $[0,1]$. Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. Let f be a 2π-periodic function. A trigonometric polynomial $T_m(x)$ of order at most m, which minimizes the sum $\sum_{l=0}^{q-1}[f(x_l) - T_m(x_l)]^2$, where $x_l = \frac{2\pi l}{q}$, $l = 0, 1, ..., q-1$ for some integer $q > 2m$ is called a polynomial of the best quadratic approximation for the function f by the system of points x_l. Let H be the space of all 2π-periodic functions $f(x)$ satisfying $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$, and let $C_m^q(x,H) = \sup_{f\in H} |f(x) - T_m(f,x)|$. The paper obtains exact asymptotics of $C_m^q(x,H)$ as $m, q \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, "О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов", ДАН СССР, т. 4, № 1, стр. 1 – 8, 1934.
2. М. Д. Калашников, "О полиномах наилучшего квадратического приближения в заданной системе точек", ДАН СССР, т. 105, № 4, стр. 634 – 636, 1955.
3. Г. П. Губанов, "Приближение функций тригонометрическими полиномами наилучшего квадратического приближения, Изв. Вузов, Математика, т. 12, стр. 22 – 29, 1970.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М., Наука, 1969.
5. А. Н. Колмогоров, Избранные труды, М., Наука, 1985.

27 марта 1997

Армянский государственный
инженерный университет