ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, КОРРЕКТНЫХ ПО ПЕТРОВСКОМУ

Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 5, 1997

В статье исследована задача управления, описываемая корректными по Петровскому дифференциальными уравнениями в частных производных высокого порядка. Доказано существование точного управления смешанной задачей (при достаточно больших значениях временной переменной) для широкого класса операторов с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья является продолжением исследований, проведенных в [1]. Здесь изучена задача точного управления системами, описываемыми уравнениями, корректными по Петровскому. Исследуемый класс операторов охватывает дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. История вопроса и подробная библиография приведены в [1], [3].

Обозначим через Ω ограниченную область $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть, далее, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$ - открытый цилиндр, лежащий в прямом произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}^1 : t > 0\}$.

В цилиндре Q_T рассмотрим эволюционное уравнение порядка $4m$ ($m \geq 1$) вида

$$u_{tt} + L^{2m}u + L_1u = 0, \quad (1.1)$$

Проведение настоящего исследования стало возможно благодаря Joint-Stock Company "Prometheus".

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad (1.2)$$

$$L_1 u = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u), \quad (1.3)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ниже нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ — произвольно заданная точка. Для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим

$$m(x) = x - x^0 = (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0), \quad m_k(x) = x_k - x_k^0. \quad (1.4)$$

Пусть, далее, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к поверхности Γ , $\nu_k = \cos(\nu, x_k)$. Обозначим через $\nu_L = (\nu_{1L}, \dots, \nu_{nL})$ нормированный вектор к границе Γ , определенный следующим образом :

$$\nu_{kL} = \sum_{j=1}^n a_{kj}(x) \nu_j. \quad (1.5)$$

Разделим границу Γ на две части :

$$\Gamma(x^0) = \{x \mid x \in \Gamma, \sum_{k=1}^n m_k \nu_k \geq 0\} \quad \text{и} \quad \Gamma_+(x^0) = \Gamma \setminus \Gamma(x^0).$$

Для уравнения (1.1) рассмотрим следующую начально-краевую задачу :

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \text{на } \Omega, \quad (1.6)$$

где $u(0) = u(x, 0)$, $u'(0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$.

Пусть $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. На Σ зададим краевые условия

$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \dots, 2m-2, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial L^{m-1} u}{\partial \nu_L} \Big|_{\Sigma} = \begin{cases} v, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_+(x^0) \times (0, T), \end{cases} \quad (1.8)$$

где функция v — управление.

Проблема заключается в нахождении точного управления смешанной задачей (1.1), (1.6) — (1.8), а именно, функции $v(x, t)$, заданной на $\Gamma(x^0) \times (0, T)$ такой,

что для любых начальных данных $u^0(x)$ и $u^1(x)$ существует T , $0 < T < \infty$, при котором решение $u(v) = u(x, t; v)$ задачи (1.1), (1.6) — (1.8) обращается в нуль вместе со своей производной по t :

$$u(x, T; v) = u'(x, T; v) = 0. \quad (1.9)$$

§2. ОПЕРАТОР Λ

2.1. В основе решения задачи точного управления, поставленной в §1, лежит предложенный Ж.-Л. Лионсом [3] метод HUM. Он заключается в одновременном рассмотрении двух задач — прямой и, в определенном смысле, двойственной ей.

Пусть функция $\omega(x, t)$ — решение задачи

$$\omega_{tt} + L^{2m}\omega + L_1\omega = 0, \quad (2.1)$$

$$\omega(0) = \omega^0, \quad \omega'(0) = \omega^1, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{\partial^k \omega}{\partial \nu^k} \right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \dots, 2m - 1, \quad (2.3)$$

и пусть функция $z(x, t)$ — решение двойственной задачи

$$z_{tt} + L^{2m}z + L_1z = 0, \quad (2.4)$$

$$z(T) = z'(T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial^k z}{\partial \nu^k} \right|_{\Sigma} = 0, \quad k = 0, \dots, 2m - 2, \quad (2.6)$$

$$\left. \frac{\partial L^{m-1} z}{\partial \nu_L} \right|_{\Sigma} = \begin{cases} L^m \omega, & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0, T) \\ 0, & \text{на } \Gamma_0(x^0) \times (0, T). \end{cases} \quad (2.7)$$

Заметим, что мы исходим из того, что уравнение (1.1), при соответствующих предположениях относительно коэффициентов операторов L и L_1 (см. §3), является корректным по Петровскому и, стало быть, задачи (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.7) имеют единственное обобщенное решение в соответствующих пространствах Соболева (см. [2]).

Ниже мы будем существенно опираться на следующее

Предложение 2.1. Пусть функции $\omega(x, t)$ и $z(x, t)$ — решения задач (2.1) — (2.3) и (2.4) — (2.7), соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$\int_{\Omega} (z'(0)\omega^0 - z(0)\omega^1) dx = \iint_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt. \quad (2.8)$$

Доказательство. Умножив тождество (2.1) на $z(x, t)$, а тождество (2.4) на $\omega(x, t)$, составляя симметрическую разность и интегрируя ее по цилиндру Q_T , получим

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} (z\omega_{tt} - \omega z_{tt}) dx dt + \iint_{Q_T} (zL^{2m}\omega - \omega L^{2m}z) dx dt = \\ & = \iint_{Q_T} (\omega L_1 z - z L_1 \omega) dx dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Левая часть последнего соотношения преобразуется так (см. [1]):

$$\iint_{Q_T} (z\omega_{tt} - \omega z_{tt}) dx dt = \int_{\Omega} (z'(0)\omega^0 - z(0)\omega^1) dx. \quad (2.10)$$

Правая часть (2.9), в силу (2.3) и (2.6), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} (\omega L_1 z - z L_1 \omega) dx dt = \\ & = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \iint_{Q_T} (a_{\alpha}(x) D^{\alpha} \omega D^{\alpha} z - a_{\alpha}(x) D^{\alpha} z D^{\alpha} \omega) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Преобразуем, наконец, интеграл

$$I = \iint_{Q_T} (zL^{2m}\omega - \omega L^{2m}z) dx dt. \quad (2.12)$$

Применяя многократно формулу Гаусса-Остроградского, с учетом условий (2.6) и (1.5), получим

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} zL^{2m}\omega dx dt = \iint_{Q_T} L^m z L^m \omega dx dt - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Sigma} a_{ij}(x) \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} z \cdot L^m \omega d\Sigma = \\ & = \iint_{Q_T} L^m z L^m \omega dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} z \cdot L^m \omega d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично, пользуясь условиями (2.3), имеем

$$\iint_{Q_T} \omega L^{2m} z dx dt = \iint_{Q_T} L^m \omega \cdot L^m z dx dt. \quad (2.14)$$

Подставляя теперь (2.13) и (2.14) в (2.12), с учетом (2.7), получим

$$I = \iint_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt. \quad (2.15)$$

Подставляя, наконец, (2.10), (2.11) и (2.15) в (2.9), получим соотношение (2.8), и доказательство завершено.

2.2. Определим оператор Λ , ставящий в соответствие каждой паре начальных данных $\{\omega^0, \omega^1\}$ задачи (2.1) — (2.3) пару $\{z'(0), -z(0)\}$ следующим образом :

$$\Lambda\{\omega^0, \omega^1\} = \{z'(0), -z(0)\}. \quad (2.16)$$

Как будет доказано ниже, оператор Λ обратим в надлежащем образом построенных функциональных пространствах. После этого, повторяя рассуждения, проведенные в [3], можно убедиться в существовании решения основной задачи (1.1), (1.6) — (1.8).

Обозначим через $\vec{L}_2(\Omega)$ гильбертово пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, $u_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$, наделенных скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u_1 v_1 + u_2 v_2) dx. \quad (2.17)$$

В силу (2.16) и (2.17) имеем

$$\langle \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} \rangle = \int_{\Omega} (z'(0)\omega^0 - z(0)\omega^1) dx \quad (2.18)$$

и в силу предложения 2.1

$$\langle \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} \rangle = \iint_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt. \quad (2.19)$$

Таким образом, для обратимости оператора Λ достаточно показать, что интеграл

$$\left(\iint_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}$$

определяет норму на множестве начальных данных задачи (2.1) — (2.3).

§3. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ

3.1. а) Предполагается, что матрица $\|a_{ij}(x)\|$, определяющая оператор L , вещественна и симметрична, $a_{ij} \in C^{2m}(\Omega)$ и выполнено условие эллиптичности : существуют постоянные $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ такие, что

$$\gamma_0 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma_1 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \quad (3.1)$$

для любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$.

б) Коэффициенты $a_\alpha(x)$ оператора L_1 принадлежат пространству $C^{2m}(\Omega)$.

Следующие условия связаны с неотрицательностью энергии системы.

Для их формулировки умножим уравнение (2.1) на ω_t , где $\omega(x, t)$ — решение задачи (2.1) — (2.3) и проинтегрируем обе его части по Q_T . Имеем

$$\int_{Q_T} \omega_t (\omega_{tt} + L^{2m}\omega + L_1\omega) dx dt = 0. \quad (3.2)$$

Очевидно

$$\int_{Q_T} \omega_t \omega_{tt} dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\omega_t|^2 dx \Big|_0^T. \quad (3.3)$$

Далее, в силу условий (2.3)

$$\int_{Q_T} \omega_t L^{2m}\omega dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (L^m\omega)^2 dt \right\} dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |L^m\omega|^2 dx \Big|_0^T. \quad (3.4)$$

Наконец, последний интеграл правой части (3.2) (см. [1]) равен

$$\int_{Q_T} \omega_t L_1\omega dx dt = \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \int_{\Omega} a_\alpha(x) |D^\alpha\omega|^2 dx \Big|_0^T. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.3) — (3.5) в (3.2), получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\omega_t^2 + |L^m\omega|^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha\omega|^2 \right) dx \Big|_0^T = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что “интеграл энергии”

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\omega_t^2 + |L^m\omega|^2 + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha\omega|^2 \right) dx \quad (3.7)$$

является константой при $t \in [0, T]$.

Представление (3.7) диктует ограничения на младшие члены оператора задачи. Введем следующие обозначения :

$$\begin{aligned} L_k^0 &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \\ L_k &= \sum_{r=0}^{m-1} L^{m-1-r} L_k^0 L^r, \\ \tilde{L} &= L^{m-1} \left(\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

с) Требуется, чтобы для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) \xi^{2\alpha} \geq 0, \quad (\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}).$$

d) Для любого $\omega \in \dot{H}^{2m}(\Omega)$ (определение см. в п. 3.2)

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha \omega|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} m_k \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_k} |D^\alpha \omega|^2 + \left(\tilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k L_k \omega \right) : L^m \omega \right] dx \leq 0. \quad (3.9)$$

Заметим, что последнее условие возникает (см. [4]) и в случае уравнений второго порядка. Заметим также, что оно автоматически выполняется в том случае, когда матрица $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ постоянна.

3.2. Введем функциональные пространства, в которых исследуется поставленная в §1 задача управления.

Обозначим через $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{Z}^+$) пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.10)$$

а через $\dot{H}^s(\Omega)$ – подпространство $H^s(\Omega)$, являющееся замыканием в норме (3.10) финитных бесконечно дифференцируемых в Ω функций.

Ниже нам понадобится также норма в $\dot{H}^s(\Omega)$:

$$\|u\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (3.11)$$

эквивалентная (3.10).

Введем, наконец, в прямом произведении гильбертовых пространств

$$F = \dot{H}^{2m}(\Omega) \times L_2(\Omega) \quad (3.12)$$

норму

$$\|(u, v)\|_F = (\|u\|_{2m}^2 + \|v\|_0^2)^{1/2}, \quad (3.13)$$

где $\|\cdot\|_0$ – норма в пространстве $L_2(\Omega)$.

§4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В этом параграфе будет получен основной результат статьи, а именно, доказано существование точного управления смешанной задачей (1.1), (1.6) — (1.8).

Доказательство основано на следующих теоремах.

Теорема 4.1. Пусть $\omega(x, t)$ — решение задачи (2.1) — (2.3), отвечающее начальным данным $\{\omega^0, \omega^1\} \in F$, и выполнены условия а) — с). Тогда существует постоянная $c > 0$, не зависящая от T , такая, что

$$\int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma \leq c(1+T) \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.1)$$

Теорема 4.2. При выполнении условий теоремы 4.1 и d) существуют постоянные $c > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что для решения $\omega(x, t)$ задачи (2.1) — (2.3) справедлива оценка

$$\int_{\Gamma(x^*) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt \geq c(T - T_0) \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.2)$$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим функции $h_k \in C^{2m}(\bar{\Omega})$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$h_k(x)|_{\Gamma} = \nu_k. \quad (4.3)$$

Умножим тождество (2.1) на $h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$, просуммируем по $k = 1, 2, \dots, n$ и проинтегрируем обе его части по цилиндру Q_T . Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \omega_{tt} h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{2m} \omega h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt + \\ & + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L_1 \omega h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Интегралы

$$I_1 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \omega_{tt} h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt$$

преобразуются точно так же, как в [1]:

$$I_1 = X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \omega_t^2 \frac{\partial h_k}{\partial x_k} dx dt, \quad (4.5)$$

где

$$X = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \omega_t h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx \Big|_0^T. \quad (4.6)$$

Преобразуем теперь

$$I_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{2m} \omega h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt. \quad (4.7)$$

Аналогично (2.13), в силу условий (2.3) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^m \omega L^m \left(h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) dx dt - \\ &- \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} \left(h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) L^m \omega d\Sigma = I_2' - I_2''. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Заметим, что в силу условия $\omega|_{\Sigma} \equiv 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial}{\partial \nu}. \quad (4.9)$$

С учетом условий (4.3) и (4.9) преобразуем

$$\begin{aligned} I_2'' &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} \left(\sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) L^m \omega d\Sigma = \\ &= \sum_{i,j=1}^r \int_{\Sigma} a_{ij}(x) \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \nu} \right) L^m \omega d\Sigma = \\ &= \sum_{i,j=1}^r \int_{\Sigma} a_{ij}(x) \nu_i \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \omega L^m \omega d\Sigma + \sum_{|\alpha| \leq 2m-2} \int_{\Sigma} \sigma_{\alpha}(x) D^{\alpha} \omega L^m \omega d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь коэффициенты разложения $\sigma_{\alpha}(x)$ определяются матрицей $\|a_{ij}(x)\|$. Заметим, что в силу условий (2.3) последняя сумма обращается в нуль.

Имеем, далее

$$\begin{aligned} I_2'' &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \omega \right) L^m \omega d\Sigma - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Sigma} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \omega L^m \omega d\Sigma = \\ &= \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma - \sum_{i,j=1}^r \int_{\Sigma} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \omega L^m \omega d\Sigma. \end{aligned}$$

В силу условий (2.3) последний интеграл полученного соотношения исчезает, и мы имеем

$$I_2'' = \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma. \quad (4.11)$$

Преобразуем теперь

$$\begin{aligned} I_2' &= \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) L^m \omega L^m \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) dx dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta| \leq 2m \\ \alpha \neq 0}} \iint_{Q_T} D^{\alpha} h_k(x) \cdot b_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) L^m \omega dx dt = I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} h_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 2m} \iint_{Q_T} h_k(x) c_\alpha(x) D^\alpha \omega \cdot L^m \omega dx dt = I'_3 + I''_3. \quad (4.13)$$

Преобразуем

$$I'_3 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma} h_k(x) |L^m \omega|^2 \nu_k d\Sigma.$$

Учитывая (4.3), получим

$$I'_3 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma. \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в (4.13), а затем полученные выражения для I_3 в (4.12), будем иметь

$$I'_2 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma + I'_3 + I_4. \quad (4.15)$$

С учетом (4.11) и (4.15) для I_2 получим представление

$$I_2 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma + I'_3 + I_4. \quad (4.16)$$

Подставляя, наконец, (4.16) и (4.5) в тождество (4.4), перепишем его в виде

$$X + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (\omega_i^2 - |L^m \omega|^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma + I'_3 + I_4 + I_5 = 0, \quad (4.17)$$

где

$$I_5 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L_1 \omega h_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx dt.$$

Перейдем к доказательству неравенства (4.1). С этой целью оценим слагаемые (4.17). В силу ограниченности функций $c_\alpha(x)$ и $h_k(x)$ имеем

$$|I'_3| \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq 2m} \iint_{Q_T} |D^\alpha \omega| \cdot |L^m \omega| dx dt \leq c_2 \iint_{Q_T} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m} |D^\alpha \omega|^2 + |L^m \omega|^2 \right) dx dt. \quad (4.18)$$

Здесь и далее через c_i , $i = 1, 2, \dots$ будем обозначать различные константы.

Поскольку при каждом $t \in [0, T]$ $\omega(t) \in \dot{H}^{2m}(\Omega)$, то с учетом условия (3.1) получим

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} \iint_{Q_T} |D^\alpha \omega|^2 dx dt \leq c_3 \iint_{Q_T} |\Delta^m \omega|^2 dx dt \leq c_4 \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt, \quad (4.19)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Из (4.18) в силу (4.19) и (3.7) имеем

$$|I_3''| \leq c_5 \int_0^T E(t) dt = c_5 E(0) T. \quad (4.20)$$

Воспользовавшись теперь неравенством

$$E(t) \leq c_6 \int_{\Omega} |\omega_t|^2 dx + \|\omega\|_{2m}^2, \quad (4.21)$$

из (4.20) в силу начальных условий (2.2) и (3.13) имеем

$$|I_3''| \leq c_7 T (\|\omega^1\|_0^2 + \|\omega^0\|_{2m}^2) = c_7 T \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.22)$$

Обратимся к оценке I_4 . В силу ограниченности коэффициентов разложения $b_{\alpha\beta}(x)$ и $D^\alpha h_k$ при $|\alpha| \leq 2m$ имеем

$$|I_4| \leq c_8 \sum_{|\beta| \leq 2m} \iint_{Q_T} |D^\beta \omega| \cdot |L^m \omega| dx dt,$$

и аналогично предыдущему придем к оценке

$$|I_4| \leq c_9 T \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.23)$$

В точности такая же оценка для I_5 получена в [1].

Далее, легко убедиться, что для X справедливо неравенство

$$|X| \leq c_{10} \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.24)$$

Аналогичными рассуждениями получаем следующую оценку :

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} (\omega_t^2 - |L^m \omega|^2) dx dt \right| \leq c_{11} \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.25)$$

Из (4.22) — (4.25) и (4.17) приходим к окончательной оценке

$$\int_{\Sigma} |L^m \omega|^2 d\Sigma \leq c_{12} (1 + T) \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2. \quad (4.26)$$

Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $\omega(x, t)$ — решение задачи (2.1) — (2.3). Умножим тождество (2.1) на $m_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$, просуммируем по $k = 1, \dots, n$ и проинтегрируем по цилиндру Q_T . Имеем

$$0 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \omega_{tt} dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} L^{2m} \omega dx dt + \\ + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} L_1 \omega dx dt + J_1 + J_2 + J_0. \quad (4.27)$$

Как показано в [1]

$$J_1 = \tilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} \omega_t^2 dx dt, \quad (4.28)$$

где

$$\tilde{X} = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} m_k(x) \omega_t \frac{\partial \omega}{\partial x_k} dx \Big|_0^T. \quad (4.29)$$

Далее, из (2.3) следует, что

$$J_2 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} L^{2m} \omega dx dt = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^m \left(m_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \cdot L^m \omega dx dt - \\ - \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_L} L^{m-1} \left(m_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \cdot L^m \omega d\Sigma = J_2' - J_2''. \quad (4.30)$$

Преобразуем

$$J_2' = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{m-1} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \right) \right] \cdot L^m \omega dx dt = \\ = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{m-1} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{kj}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \cdot L^m \omega dx dt + \\ + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{m-1} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_k a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \right) \right] \cdot L^m \omega dx dt = \\ = \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k L^m \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \cdot L^m \omega dx dt + \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} L^{m-1} \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^n a_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) \right] \cdot L^m \omega dx dt = \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt + J_3 + J_4. \quad (4.31)$$

Мы воспользовались тем, что $\frac{\partial m_k}{\partial x_j} = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера. Легко видеть далее с учетом обозначения (3.8), что

$$J_4 = \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt - \iint_{Q_T} \tilde{L} \omega \cdot L^m \omega dx dt, \quad (4.32)$$

где оператор $\bar{L}$ задается выражением (3.8). Подставляя (4.32) в (4.31), получим

$$J'_2 = 2 \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt - \iint_{Q_T} \bar{L} \omega \cdot L^m \omega dx dt + J_3. \quad (4.33)$$

Далее, нетрудно убедиться в справедливости следующего разложения :

$$L^m \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} L^m \omega - L_k \omega, \quad (4.34)$$

где операторы L_k задаются выражениями (3.8). В силу (4.34) интеграл

$$J_3 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt - \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k L_k \omega \cdot L^m \omega dx dt. \quad (4.35)$$

Аналогично (4.13) — (4.15) имеем

$$\begin{aligned} J'_3 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |L^m \omega|^2 dx dt = \\ &= -\frac{n}{2} \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя теперь (4.36) в (4.33), получим

$$\begin{aligned} J'_2 &= \left(2 - \frac{n}{2} \right) \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma - \\ &- \iint_{Q_T} \left(\bar{L} \omega + \sum_{k=1}^n m_k L_k \omega \right) L^m \omega dx dt. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Обратимся, наконец, к интегралу J''_2 . Нетрудно убедиться, что в силу условий (2.3) имеем

$$L^{m-1} \left(m_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right) = m_k \frac{\partial}{\partial x_k} L^{m-1} \omega, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

На поверхности Σ в силу условия (2.3) имеем

$$\nu_i \frac{\partial^2 L^{m-1} \omega}{\partial x_k \partial x_j} = \nu_i \nu_k \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x_j} L^{m-1} \omega = \nu_k \frac{\partial^2 L^{m-1} \omega}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Из последнего соотношения, а также (2.3), (4.9) следует

$$\begin{aligned} J''_2 &= \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(m_k \frac{\partial}{\partial x_k} L^{m-1} \omega \right) L^m \omega d\Sigma = \\ &= \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) m_k \nu_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L^{m-1} \omega \cdot L^m \omega d\Sigma = \sum_{k=1}^n \iint_{\Sigma} m_k \nu_k \times \\ &\times \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L^{m-1} \omega \cdot L^m \omega d\Sigma = \iint_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставляя теперь (4.37) и (4.38) в (4.30), имеем

$$J_2 = \left(2 - \frac{n}{2}\right) \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k\right) |L^m \omega|^2 d\Sigma - \\ - \iint_{Q_T} \left(\tilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k L_k \omega\right) L^m \omega dx dt. \quad (4.39)$$

Интеграл J_0 преобразуется точно так же, как в [1]. Имеем (см. [1], стр. 82)

$$J_0 = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_T} m_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} L_1 \omega dx dt = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \iint_{Q_T} a_\alpha(x) |D^\alpha \omega|^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k} |D^\alpha \omega|^2 dx dt. \quad (4.40)$$

Соотношения (4.28), (4.39) и (4.40) позволяют переписать тождество (4.27) в следующем виде :

$$\tilde{X} + \frac{n}{2} \iint_{Q_T} \omega_t^2 dx dt + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \iint_{Q_T} |L^m \omega|^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k\right) |L^m \omega|^2 d\Sigma - \iint_{Q_T} \left(\tilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k L_k \omega\right) L^m \omega dx dt + \\ + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \iint_{Q_T} a_\alpha(x) |D^\alpha \omega|^2 dx dt - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} \iint_{Q_T} m_k(x) \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k} |D^\alpha \omega|^2 dx dt = 0. \quad (4.41)$$

Легко видеть, что последнее соотношение можно записать в виде

$$\tilde{X} + \frac{(n-2)}{2} Y + 2 \int_0^T E(t) dt - \iint_{Q_T} \left[\sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha \omega|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} m_k \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_k} |D^\alpha \omega|^2 + \left(\tilde{L}\omega + \sum_{k=1}^n m_k L_k \omega\right) L^m \omega \right] dx dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k\right) |L^m \omega|^2 d\Sigma = 0, \quad (4.42)$$

где $E(t)$ задается выражением (3.7), а

$$Y = \iint_{Q_T} \left(\omega_t^2 - |L^m \omega|^2 - \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha(x) |D^\alpha \omega|^2 \right) dx dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$Y = \int_{\Omega} \omega \omega_t dz \Big|_0^T. \quad (4.43)$$

Перейдем к доказательству оценки (4.2). В силу условия d) из (4.42) приходим к неравенству

$$\tilde{X} + \frac{(n-2)}{2} Y + 2 \int_0^T E(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma. \quad (4.44)$$

Подставляя интеграл по Σ , входящий в (4.44), в виде суммы двух интегралов по $\Gamma(x^0) \times (0, T)$ и $\Gamma_*(x^0) \times (0, T)$, пользуясь оценками

$$E(T) = E(0) \geq c_1 \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2$$

и

$$\int_{\Gamma_*(x^0) \times (0, T)} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma \leq 0,$$

нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства :

$$\tilde{X} + \frac{(n-2)}{2} Y + T c_2 \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} \left(\sum_{k=1}^n m_k \nu_k \right) |L^m \omega|^2 d\Sigma. \quad (4.45)$$

Интегралы $\tilde{X}$ и Y не превосходят величины $c_3 \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2$.

Следовательно, из (4.45) имеем

$$T c_2 \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Sigma + \frac{n}{2} c_3 \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2,$$

где $R(x^0) = \sup_{x \in \Gamma} \sum_{k=1}^n m_k \nu_k$ и, стало быть

$$\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Sigma \geq \frac{2c_2}{R(x^0)} \left(T - \frac{nc_3}{2c_2} \right) \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2.$$

Обозначив $T_0 = \frac{nc_3}{2c_2}$ и $c = \frac{2c_2}{R(x^0)}$, приходим к требуемой оценке

$$\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Sigma \geq c(T - T_0) \|\{\omega^0, \omega^1\}\|_F^2.$$

Теорема 4.2 доказана.

Из теорем 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия а) — д). Тогда оператор Λ , определенный выражением (2.16), при достаточно больших $T > 0$ осуществляет изоморфизм между пространствами F и F' , где

$$F' = H^{-2m}(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

а $H^{-2m}(\Omega)$ — пространство, сопряженное $\dot{H}^{2m}(\Omega)$.

Доказательство. В силу (2.16) — (2.18) имеем

$$\langle \Lambda\{\omega^0, \omega^1\}, \{\omega^0, \omega^1\} \rangle = \int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt = \int_{\Omega} (z'(0)\omega^0 - z(0)\omega^1) dx. \quad (4.46)$$

Далее, из оценки (4.1) следует существование интеграла

$$\left(\int_{\Gamma(x^0) \times (0, T)} |L^m \omega|^2 d\Gamma dt \right)^{1/2} < \infty. \quad (4.47)$$

Если теперь последний интеграл равен нулю, то в силу оценки (4.2) $\omega^0 = \omega^1 = 0$ при $T > T_0$. Поскольку задача (2.1) — (2.3) однозначно разрешима, то $\omega = 0$ в Q_T , откуда следует, что при $T > T_0$ интеграл (4.47) определяет норму на множестве начальных данных $\{\omega^0, \omega^1\}$ задачи (2.1) — (2.3). Норма (4.47) эквивалентна норме пространства Соболева на F . С учетом (4.46) отсюда следует, что оператор Λ обратим при достаточно больших $T > 0$. Это позволяет для любой пары $\{z'(0), -z(0)\}$, где $z'(0) \in H^{-2m}(\Omega)$ и $z(0) \in L_2(\Omega)$, найти единственную пару $\{\omega^0, \omega^1\} \in F$ такую, что (2.16), а это означает, что оператор Λ осуществляет изоморфизм между пространствами F и F' . Теорема доказана.

В следующей теореме содержится основной результат статьи.

Теорема 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.3 и $T > 0$ достаточно велико. Тогда при любых начальных данных $\{u^0, u^1\} \in F$ существует точное управление $v \in L_2(\Gamma(x^0) \times (0, T))$, приводящее систему (1.1), (1.6) — (1.8) в состояние покоя за время T .

Доказательство. По любым начальным данным $\{\omega^0, \omega^1\} \in F$ определяется [2] единственное обобщенное решение $\omega(x, t)$ задачи (2.1) — (2.3). В силу теоремы 4.1 для него существуют граничные значения $L^m \omega|_{\Sigma} \in L_2(\Sigma)$. Подставляя их в

(2.7) и решая задачу (2.4) — (2.7), найдем единственное решение $z(x, t)$. Затем, выбирая в качестве управления $v = L^m \omega|_{\Gamma(x^0) \times (0, T)}$, нетрудно убедиться в том, что решением исходной задачи является функция $u(x, t; v) = z(x, t)$. Теорема доказана.

Замечание. Вопрос о единственности точного управления решается с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [1] и [3].

ABSTRACT. The paper investigates the control problem for systems described by partial differential equations that are correct in Petrowsky's sense. The existence of exact control for the mixed problem for a wide class of operators with coefficients depending on space variables and large time intervals is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Шахбагян, М. эль-Саиди, "Задача управления для эволюционных уравнений высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 29, № 2, стр. 57 – 75, 1994.
2. J.-L. Lions, E Magenes, Problèmes aux Limites Nonhomogènes et Applications, vol. 1 and 2, Dunod, Paris, 1968.
3. J.-L. Lions, "Exact controlability, stabilization and perturbations for distributed systems", SIAM Reiew, vol. 30, no. 1, pp. 3 — 68, 1998.
4. Г. Идрис, Кандидатская диссертация, Ереван, 1991.

12 ноября 1996

Ереванский государственный университет