ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ КАРТАНА ДЛЯ p-АДИЧНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Пеи-Чу Ху, Чунг-Чун Янг

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 4, 1997

В работе рассматривается теория Неванлинны p-адичных голоморфных кривых и доказываестя p-адичный аналог теорем Ночки и Ру-Столла для предположения Картана о соотношениях дефектов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Теория Неванлинны (или теория распределения значений) столь красива, что естественен интерес к выяснению того как будет выглядеть такая теория в p-адичном случае. Существуют две "основные теоремы" и соотношения дефектов, занимающие центральное место в теории Неванлинны. H. H. Khóai [7], H. H. Khóai, M. V. Quang [9] и A. Boutabaa [1] доказали p-адичные аналоги двух "основных теорем" и соотношений дефектов теории Неванлинны. H. H. Khóai [8], W. Cherry и Zh. Ye [4] начали изучать некоторую переменную p-адичную теорию Неванлинны и доказали соотношение дефектов гиперплоскостей в общем случае. Ху и Янг показали, что представление Столла [21] метода Чуанга-Стейнмеца для доказательства соотношения дефектов малых функций вместе с доказательством Широсаки [19] теоремы Ру-Столла [15] и использованием метода Картана могут дать p-адичный аналог теоремы Ру-Столла для движущихся мишеней. Они также изучили множество единственности значений для p-адичных мероморфных функций.

В настоящей работе доказываестя p-адичный аналог теорем Ночки и Ру-

Столла для предположения Картана о соотношениях дефектов, а именно

Теорема. *Пусть V – $n+1$-мерное векторное пространство над $\mathbf{C}_p$, а $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ – конечное множество p-адичных голоморфных кривых $g_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$ в основной позиции, $q \geq n$. Возьмем целое k, $1 \leq k \leq n$. Пусть $f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ – p-адичная голоморфная кривая, являющаяся k-плоской над $\mathcal{R}$ и такая, что любая пара (f, g_j) свободна для $j = 0, ..., q$. Предположим, что g_j растет медленнее чем f для каждого j. Тогда имеем*

$$\sum_{j=0}^{q} \delta_f(g_j) \leq 2n - k + 1.$$

Обозначения приведены в следующих параграфах. Здесь мы только опишем историю этой задачи.

(i) Случаи в комплексном анализе :

(i)-1 постоянные мишени : Р. Неванлинна [11] для $n = k = 1$; Г. Картан [2] для $n = k > 1$; Е. И. Ночка [12 – 14] для $n > k \geq 1$;

(i)-2 движущиеся мишени : Н. Стейнмец [20] для $n = k = 1$; М. Ру и В. Столл [15], [16] для $n = k > 1$ и для $n > k \geq 1$.

(ii) Случаи в p-адичном анализе :

(ii)-1 постоянные мишени : H. H. Khóai [7], H. H. Khóai, M. V. Quang [9] и A. Boutabaa [1] для $n = k = 1$; H. H. Khóai и M. V. Tu [10], W. Cherry и Zh. Ye [4] для $n = k > 1$; P. C. Hu и C. C. Yang для $n > k \geq 1$ (теорема 1.1).

(ii)-2 движущиеся мишени : П. Ч. Ху и Ч. Ч. Янг [5] для $n = k \geq 1$; П. Ч. Ху и Ч. Ч. Янг для $n > k \geq 1$ (теорема 1.1).

(iii) Случаи в диофантовом анализе :

(iii)-1 постоянные мишени : теорема Рота ([23]) для $n = k = 1$; теорема подпространства Шмидта ([23]) для $n = k \geq 1$; М. Ру и П. М. Вонг [18] для $n > k \geq 1$.

(iii)-2 движущиеся мишени : П. Войта [24] для $n = k = 1$; М. Ру и П. Войта [17] для $n = k \geq 1$. Случай $n > k \geq 1$ остается нерешенным.

§2. ТЕОРИЯ НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ p-АДИЧНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть p – простое число, $\mathbf{Q}_p$ – поле p-адичных чисел и $\mathbf{C}_p$ – p-адичное дополнение алгебраического замыкания $\mathbf{Q}_p$. Абсолютное значение $|\ |_p$ в $\mathbf{C}_p$ нормализовано так, что $|\ p\ |_p = p^{-1}$. Далее мы используем обозначение ord_p для аддитивной валюации на $\mathbf{C}_p$.

Напомним, что в метрическом пространстве, метрика которого порождается неархимедовской нормой, последовательность называется последовательностью Коши тогда и только тогда, когда разность между соседними членами стремится к нулю; и если метрическое пространство полно, бесконечная сумма сходится тогда и только тогда, когда ее основной член стремится к нулю. Таким образом, если мы рассмотрим выражения вида

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad (a_n \in \mathbf{C}_p)$$

мы можем приписать значение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ функции $f(z)$ при замене Z на z, для которого

$$|\ a_n z^n\ |_p \to 0.$$

Определим “радиус ρ сходимости” :

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sup |\ a_n\ |_p^{\frac{1}{n}}.$$

Тогда ряд будет сходиться, если $|\ z\ |_p < \rho$ и расходиться, если $|\ z\ |_p > \rho$. Функция $f(z)$ называется p-адичной аналитической на $B(\rho)$, где

$$B(\rho) = \{z \in \mathbf{C}_p \ \mid\ |\ z\ |_p < \rho\}.$$

Если $\rho = \infty$, то функция $f(z)$ называется p-адичной целой на $\mathbf{C}_p$.

Задана непостоянная p-адичная функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbf{C}_p)$$

на $B(\rho)$ $(0 < \rho \leq \infty)$. Суть метода Вимана–Валирона состоит в анализе поведения функции с помощью *максимального члена* :

$$\mu(r, f) = \max_{n\geq 0} |\ a_n\ |_p\, r^n \quad (0 < r < \rho)$$

вместе с *центральным индексом* :

$$\nu(r,f)=\max_{n\geq 0}\{n \mid |a_n|_p r^n=\mu(r,f)\}.$$

Определим

$$\nu(0,f)=\lim_{r\to 0}\nu(r,f).$$

Очевидно, если $f\not\equiv 0$, то $\mu(r,f)>0$ для $r>0$. Далее, заметим, что если h другая – p-адичная аналитическая функция на $B(\rho)$, то

$$\mu(r,fh)=\mu(r,f)\mu(r,h). \tag{1}$$

Лемма 2.1. *[5] Центральный индекс $\nu(r,f)$ убывает при $r\to\rho$ и удовлетворяет формуле*

$$\log\mu(r,f)=\log|a_{\nu(0,f)}|_p+\int_0^r\frac{\nu(t,f)-\nu(0,f)}{t}dt+\nu(0,f)\log r. \quad (0<r<\rho).$$

Следовательно, $\mu(r,f)$ – убывающая непрерывная функция.

Следующую техническую лемму можно найти в [4] :

Лемма 2.2. *[Подготовительная теорема Вейерштрасса] Существуют единственный одиночный многочлен P порядка $\nu(r,f)$ и p-адичная аналитическая функция g на $B[r]$ такие, что $f=gP$, где*

$$B[r]=\{z\in \mathbb{C}_p \mid |z|_p\leq r\}.$$

Далее, g не имеет нулей внутри $B[r]$, а P имеет ровно $\nu(r,f)$ нулей, с учетом кратности, на $B[r]$.

Обозначим через $n(r,\frac{1}{f})$ число нулей (с учетом кратности) отображения f с абсолютным значением $\leq r$ и определим *функцию валентности* f для 0 выражением

$$N(r,\frac{1}{f})=\int_0^r\frac{n(t,\frac{1}{f})-n(0,\frac{1}{f})}{t}dt+n(0,\frac{1}{f})\log r. \quad (0<r<\rho).$$

Лемма 2.2 показывает, что

$$n(r,\frac{1}{f})=\nu(r,f).$$

Из леммы 2.1 следует *формула Йенсена* :

$$N(r, \frac{1}{f}) = \log \mu(r, f) - \log | a_{n(0, \frac{1}{f})} |_p . \qquad (2)$$

Для каждого n начертим граф $\gamma_n(t)$, который описывает $ord_p(a_n z^n)$ как функцию от $t = ord_p(z)$. Тогда $\gamma_n(t)$ является прямой с наклоном n. Обозначим через $\gamma(t, f)$ границу пересечения всех полуплоскостей, лежащих под кривыми $\gamma_n(t)$. Эта кривая называется многоугольником Ньютона функции $f(z)$ (см. [9]). Точки t, в которых $\gamma(t, f)$ имеет вершины, называются *критическими точками* функции $f(z)$. Конечный отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит только конечное множество критических точек. Ясно, что если t – критическая точка, то $ord_p(a_n) + nt$ достигает своего минимума не менее чем для двух значений n. Очевидно, имеем

$$\mu(r, f) = p^{-\gamma(t, f)}, \quad r = p^{-t}.$$

Основным свойством многоугольника Ньютона является то, что если $t = ord_p(z)$ не является критической точкой, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t, f)},$$

откуда следует, что $|f(z)|_p = \mu(r, f)$. Под *мероморфной функцией* f на $B(\rho)$ будем подразумевать отношение $\frac{g}{h}$ двух p-адичных аналитических функций g и h таких, что g и h не имеют простых факторов в кольце p-адичных аналитических функций на $B(\rho)$. Заметим, что (1) выполняется и, что наибольший простой делитель любых двух p-адичных аналитических функций существует. Мы можем единственным образом расширить μ на мероморфную функцию $f = \frac{g}{h}$, полагая

$$\mu(r, f) = \frac{\mu(r, g)}{\mu(r, h)}.$$

Положим также

$$\gamma(t, f) = \gamma(t, g) - \gamma(t, h).$$

Ясно, что если $t = ord_p(z)$ не является критической точкой для $f(z)$, т.е. t не является критической точкой для $g(z)$ или $h(z)$, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t, f)} = \mu(r, f).$$

Определим

$$|\mathbf{C}_p| = \{|z|_p \mid z \in \mathbf{C}_p\}.$$

Заметим, что $\{p^w \mid w \in \mathbf{Q}\} \subseteq |\mathbf{C}_p|$. Тогда $|\mathbf{C}_p|$ плотно в $\mathbf{R}[0,+\infty)$. Если $a : \mathbf{R}[0,+\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ и $b : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{R}$ – вещественнозначные функции, то $a(r) \leq b(z)$ означает, что для любого положительного числа $0 < R < \rho$ существует конечное множество E в $|\mathbf{C}_p|[0,R]$ такое, что

$$a(r) \leq b(z), \quad r = |z|_p \in |\mathbf{C}_p|[0,R] - E.$$

Используя эти обозначения, имеем

$$\mu(r,f) = |f(z)|_p$$

для p-адичного мероморфного отображения f на $B(\rho)$.

Определим *считывающую функцию* $n(r,f)$ и *функцию валентности* $N(r,f)$ отображения f для полюсов :

$$n(r,f) = n(r,\frac{1}{h}), \quad N(r,f) = N(r,\frac{1}{h}).$$

Применяя (2) для g и h, получим *формулу Йенсена*

$$N(r,\frac{1}{f}) - N(r,f) = \log\mu(r,f) - C_f, \tag{3}$$

где C_f – постоянная, зависящая только от f. Определим

$$m(r,f) = \log^+\mu(r,f) = \max\{0, \log\mu(r,f)\}.$$

Наконец, определим *характеристическую функцию*

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Легко проверить, что

$$T(r,f) = \max\{\log\mu(r,g), \log\mu(r,h)\} + O(1).$$

Ниже мы приводим некоторые основные факты, используемые в следующих параграфах.

Лемма 2.3. *(Первая основная теорема, [1], [9]). Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда для любого $a \in \mathbf{C}_p$ имеем*

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \rho.$$

Лемма 2.4. *(Лемма о логарифмической производной, [1], [4], [9]) Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1), \quad r \to \rho.$$

Лемма 2.5. *(Вторая основная теорема, [1], [4], [9]) Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$, и пусть $a_1, ..., a_q$ – различные номера $\mathbf{C}_p$. Тогда*

$$(q-1)T(r,f) \leq N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r,f) - \log r + O(1),$$

где

$$N_1(r,f) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

§3. ВЕС НОЧКИ

Пусть V – векторное пространство конечной меры $n+1>0$ над $\mathbf{C}_p$. Возьмем базис $e = (e_0, ..., e_n)$ для V. Для $\xi = \xi_0 e_0 + \cdots + \xi_n e_n \in V$ определим

$$\|\xi\| = \|\xi\|_e = \max_{0 \leq i \leq n} \{|\xi_i|_p\}.$$

$\| \ \|$ означает норму : (1) $\|\xi\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$; (2) $\|a\xi\| = |a|_p \|\xi\|$ для всех $\xi \in V$ и $a \in \mathbf{C}_p$; (3) $\|\xi + \eta\| \leq \max\{\|\xi\|, \|\eta\|\}$. Очевидно, норма зависит от базиса e, поэтому, она называется нормой, определенной над базисом e. Если $\| \ \|_{e'}$ – другая норма, определенная над базисом $e' = (e'_0, ..., e'_n)$, то легко доказать, что

$$\{\max_{0 \leq i \leq n} \|e'_i\|_e\}^{-1} \|\xi\|_e \leq \|\xi\|_{e'} \leq \{\max_{0 \leq i \leq n} \|e_i\|_{e'}\} \|\xi\|_e$$

для всех $\xi \in V$, т.е. нормы, определенные над базисами, эквивалентны. Если норма, определенная над некоторым базисом, назначена к V, то V называется нормированным векторным пространством. Норма в $V = \mathbf{C}_p$ нормирована так, что $\|\xi\| = |\xi|_p$.

Пусть $\mathbf{P}(V) = V/\{\mathbf{C}_p - \{0\}\}$, и пусть $\mathbf{P} : V - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ – стандартная проекция. Если $S \subset V$, сокращенно запишем

$$\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \cap \{V - \{0\}\}).$$

Дуальное векторное пространство V^* пространства V состоит из всех $\mathbf{C}_p$-линейных функций $\alpha : V \longrightarrow \mathbf{C}_p$, а

$$\langle \xi, \alpha \rangle = \alpha(\xi)$$

называем скалярным произведением $\xi \in V$ и $\alpha \in V^*$. Если $\alpha \neq 0$, то n-мерное линейное подпространство $E[a] = Ker(\alpha)$ зависит только от $a = \mathbf{P}(\alpha) \in \mathbf{P}(V^*)$ и $\ddot{E}[a] = \mathbf{P}(E[a])$ – гиперплоскость в $\mathbf{P}(V)$. Таким образом, $\mathbf{P}(V^*)$ биективно параметризует гиперплоскости в $\mathbf{P}(V)$.

Пусть $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ – дуальный к базису $e = (e_0, ..., e_n)$. Тогда норма на V порождает норму на V^*, определенную по формуле

$$\|\alpha\| = \|\alpha\|_\epsilon = \max_{0 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|_p\},$$

где $\alpha = \alpha_0\epsilon_0 + \cdots + \alpha_n\epsilon_n$. Неравенство Шварца

$$|\langle \xi, \alpha \rangle|_p \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|$$

выполняется для $\xi \in V$, $\alpha \in V^*$. Расстояние от $x = \mathbf{P}(\xi)$ до $\ddot{E}[a]$, $a = \mathbf{P}(\alpha) \in$ $\in \mathbf{P}(V^*)$ определяется по формуле

$$0 \leq \|x, a\| = \frac{|\langle \xi, \alpha \rangle|_p}{\|\xi\| \cdot \|\alpha\|} \leq 1.$$

Мы отождествляем $V^{**} = V$, $\langle \xi, \alpha \rangle = \langle \alpha, \xi \rangle$, и $(\bigwedge_{k+1} V)^* = \bigwedge_{k+1} V^*$, поскольку

$$\langle \xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_k, \alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rangle = \det(\langle \xi_i, \alpha_j \rangle).$$

Возьмем $k, l \in \mathbf{Z}[0, n]$, $\xi \in \bigwedge_{k+1} V$ и $\alpha \in \bigwedge_{l+1} V^*$. Если $k \geq l$, то скалярное произведение $\xi \angle \alpha \in \bigwedge_{k-l} V$ однозначно определяется из

$$\langle \xi \angle \alpha, \beta \rangle = \langle \xi, \alpha \wedge \beta \rangle$$

для всех $\beta \in \bigwedge_{k-l} V^*$. Если $k = l$, то, по определению

$$\xi \angle \alpha = \langle \xi, \alpha \rangle \in \mathbf{C}_p = \bigwedge_0 V.$$

Для $k < l$ определим $\xi \angle \alpha \in \bigwedge_{l-k} V^*$ так, что если $\eta \in \bigwedge_{l-k} V$, то

$$\langle \eta, \xi \angle \alpha \rangle = \langle \xi \wedge \eta, \alpha \rangle.$$

Возьмем неположительные целые числа a и b, $a \leq b$. Пусть J_a^b – множество всех возрастающих инъективных отображений $\lambda : \mathbf{Z}[0, a] \longrightarrow \mathbf{Z}[0, b]$. Норма на V также порождает нормы на $\bigwedge_{k+1} V$ и $\bigwedge_{l+1} V^*$. Возьмем $\xi \in \bigwedge_{k+1} V$, $\alpha \in \bigwedge_{l+1} V^*$ и запишем

$$\xi = \sum_{\lambda \in J_k^n} \xi_\lambda e_\lambda, \quad \alpha = \sum_{\lambda \in J_l^n} \alpha_\lambda \epsilon_\lambda,$$

где $e_\lambda = e_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge e_{\lambda(k)}$. Затем определим нормы

$$\|\xi\| = \|\xi\|_e = \max_{\lambda \in J_k^n} \{|\xi_\lambda|_p\}, \quad \|\alpha\| = \|\alpha\|_e = \max_{\lambda \in J_l^n} \{|\alpha_\lambda|_p\}.$$

При $l \leq k$ имеем

$$\|\xi \angle \alpha\| \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|.$$

Действительно, если $l = k$, то замечая, что

$$\xi \angle \alpha = \langle \xi, \alpha \rangle = \sum_{\lambda \in J_k^n} \xi_\lambda \alpha_\lambda,$$

получаем это неравенство. Если $l < k$, то заметим, что

$$(e_0 \wedge \cdots \wedge e_k) \angle \alpha = \sum_{\nu \in J_l^k} \operatorname{sign}(\nu, \nu^\perp) \langle e_\nu, \alpha \rangle e_{\nu^\perp},$$

см. [22], где $\nu^\perp \in J_{k-l-1}^k$ для каждого $\nu \in J_l^k$, $\mathrm{Im}\nu \cap \mathrm{Im}\nu^\perp = \emptyset$, и где $\operatorname{sign}(\nu, \nu^\perp)$ – знак возмущения $(\nu, \nu^\perp)$. Отсюда получим

$$\|(e_0 \wedge \cdots \wedge e_k) \angle \alpha\| = \max_{\nu \in J_l^k} \{|\langle e_\nu, \alpha \rangle|_p\} \leq \|\alpha\|.$$

Итак, имеем

$$\|\xi \angle \alpha\| = \|\sum_{\lambda \in J_k^n} \xi_\lambda e_\lambda \angle \alpha\| \leq \max_{\lambda \in J_k^n} \{|\xi_\lambda|_p \|e_\lambda \angle \alpha\|\} \leq \|\xi\| \cdot \|\alpha\|.$$

Пусть $V_1, ..., V_m$ и W – нормированные векторные пространства над $\mathbf{C}_p$. Пусть

$$\odot : V_1 \times \cdots \times V_m \longrightarrow W$$

– m-линейное отображение над $\mathbf{C}_p$. Если $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in V_1 \times \cdots \times V_m$, то будем писать

$$\odot(\xi) = \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_m,$$

и будем говорить, что ξ свободно для операции $\odot$, если $\odot(\xi) \neq 0$. Если $x_j = \mathbf{P}(\xi_j)$, мы также будем говорить, что $x_1, ..., x_m$ свободны для $\odot$ и

$$x_1 \odot \cdots \odot x_m = \mathbf{P}(\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_m)$$

определено корректно. “Норма”

$$\|x_1 \odot \cdots \odot x_m\| = \frac{\|\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_m\|}{\|\xi_1\| \cdots \|\xi_m\|}$$

также определена корректно.

Пример 3.1. Возьмем $V_1 = \cdots = V_m = V$, $W = \bigwedge_m V$ и $\odot = \wedge$. Пусть $\| \ \|$ – норма V, определенная над базисом e. Тогда $\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_m\|$ определено для всех $x_j \in \mathbf{P}(V)$ и $0 \leq \|x_1 \wedge \cdots \wedge x_m\| \leq 1$.

Пример 3.2. Возьмем $V_1 = \bigwedge_{k+1} V$, $V_2 = \bigwedge_{l+1} V^*$, $W = \bigwedge_{k-l} V$ и $\odot = \angle$ с $0 \leq l \leq k$. Тогда $\|x\angle a\|$ определено для всех $x \in \mathbf{P}(\bigwedge_{k+1} V)$ и $a \in \mathbf{P}(\bigwedge_{l+1} V^*)$, $0 \leq \|x\angle a\| \leq 1$. В частности, если $k = l = 0$, то $\|x\angle a\| = \|x, a\|$. Проективное пространство $\mathbf{P}(\bigwedge_{n+1} V^*)$ состоит из одной и только одной точки, обозначаемой через ∞.

Пример 3.3. Пусть $V_1 = \cdots = V_m = V$, и пусть $W = \amalg_m V$ – m-мерное симметричное тензорное произведение V. Тогда

$$\dim \amalg_m V = \binom{n+m}{m}.$$

Пусть для $\xi_j \in V$ $\xi_1 \amalg \cdots \amalg \xi_m$ – симметричное тензорное произведение. Пусть для $\xi \in V$ $\xi^{\amalg m}$ – m-тая симметричная тензорная степень. Определим

$$x^{\amalg m} = \mathbf{P}(\xi^{\amalg m})$$

для $x = \mathbf{P}(\xi)$. Мы можем отождествлять $\amalg_m V^* = (\amalg_m V)^*$, поскольку

$$\langle \xi_1 \amalg \cdots \amalg \xi_m, \alpha_1 \amalg \cdots \amalg \alpha_m \rangle = \frac{1}{m!} \sum_{\lambda \in \mathcal{J}_m} \langle \xi, \alpha_{\lambda(1)} \rangle \cdots \langle \xi, \alpha_{\lambda(m)} \rangle$$

для всех $x_j \in V, \alpha_j \in V^*, j = 1, ..., m$, где $\mathcal{J}_m$ – группа перестановок на $\mathbf{Z}[1, m]$. Пусть $J_{n,m}$ – множество всех отображений $\lambda : \mathbf{Z}[0, n] \longrightarrow \mathbf{Z}[0, m]$ таких, что

$$|\lambda| = \lambda(0) + \cdots + \lambda(n) = m.$$

Для $\lambda \in J_{n,m}, e = (e_0, ..., e_n) \in V^{n+1}$ определим

$$\lambda! = \lambda(0)! \cdots \lambda(n)!, \quad e^{\amalg\lambda} = e_0^{\amalg\lambda(0)} \amalg \cdots \amalg e_n^{\amalg\lambda(n)} \in \amalg_m V.$$

Если $e = (e_0, ..., e_n)$ в базисе V, то $\{e^{\amalg\lambda}\}_{\lambda \in J_{n,m}}$ – базис $\amalg_m V$, а $\{\frac{m!}{\lambda!}\epsilon^{\amalg\lambda}\}_{\lambda \in J_{n,m}}$ – дуальный базис $\amalg_m V^*$, где $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ – дуален к e. Норма на V порождает норму на $\amalg_m V$ и $\amalg_m V^*$ следующим образом : для $\eta \in \amalg_m V, \beta \in \amalg_m V^*$ с

$$\eta = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \eta_\lambda e^{\amalg\lambda}, \quad \beta = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \beta_\lambda \frac{m!}{\lambda!} \epsilon^{\amalg\lambda},$$

определим

$$\|\eta\| = \max_{\lambda \in J_{n,m}} |\eta_\lambda|_p, \quad \|\beta\| = \max_{\lambda \in J_{n,m}} |\beta_\lambda|_p.$$

Заметим, что

$$\xi^{\amalg m} = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \xi_0^{\lambda(0)} \cdots \xi_n^{\lambda(n)} e^{\amalg\lambda}, \quad \alpha^{\amalg m} = \sum_{\lambda \in J_{n,m}} \alpha_0^{\lambda(0)} \cdots \alpha_n^{\lambda(n)} \frac{m!}{\lambda!} \epsilon^{\amalg\lambda},$$

для

$$\xi = \xi_0 e_0 + \cdots + \xi_n e_n \in V, \quad \alpha = \alpha_0 \epsilon_0 + \cdots + \alpha_n \epsilon_n.$$

Тогда

$$\|\xi^{\amalg m}\| = \|\xi\|^m, \quad \|\alpha^{\amalg m}\| = \|\alpha\|^m.$$

Лемма 3.1. *Для всех* $x \in \mathbf{P}(V)$ $\|x \angle \infty\| = 1$.

Доказательство. Возьмем $\xi \in V - \{0\}$, $x = \mathbf{P}(\xi)$. Положим $\xi_j = \langle \xi, \epsilon_j \rangle$. Для $j \in \mathbf{Z}[0, n]$ определим

$$\hat{\epsilon}_j = (-1)^j \epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j-1} \wedge \epsilon_{j+1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_n.$$

Отсюда имеем

$$\|\xi\angle(\epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n)\| = \|\sum_{j=0}^{n} \langle \xi, \epsilon_j \rangle \hat{\epsilon}_j\| = \max_{0 \le j \le n} \{|\xi_j|_p\} = \|\xi\|.$$

Поскольку $\infty = \mathbf{P}(\epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n)$, то

$$\|x\angle\infty\| = \frac{\|\xi\angle(\epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n)\|}{\|\xi\| \cdot \|\epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n\|} = 1.$$

Лемма 3.2. *Для* $x \in \mathbf{P}(V)$, $a_j \in \mathbf{P}(V^*), j = 0, 1, ..., n$ *имеем*

$$\|a_0 \wedge \cdots \wedge a_n\| \le \max_{0 \le j \le n} \|x, a_j\|.$$

Доказательство. Для $\|a_0 \wedge \cdots \wedge a_n\| = 0$ неравенство тривиально. Если $\|a_0 \wedge \cdots \wedge a_n\| > 0$, то $a_0 \wedge \cdots \wedge a_n = \infty$. Из леммы 3.1 следует $\|x\angle(a_0 \wedge \cdots \wedge a_n)\| = 1$. Для каждого $j \in \mathbf{Z}[0, n]$ возьмем $\alpha_j \in V^* - \{0\}$, $\mathbf{P}(\alpha_j) = a_j$. Возьмем также $\xi \in V - \{0\}, \mathbf{P}(\xi) = x$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\|a_0 \wedge \cdots \wedge a_n\| = \|a_0 \wedge \cdots \wedge a_n\| \cdot \|x\angle(a_0 \wedge \cdots \wedge a_n)\| = \\
&= \frac{\|\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|}{\|\alpha_0\| \cdots \|\alpha_n\|} \cdot \frac{\|\xi\angle(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)\|}{\|\xi\|\|\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n\|} = \\
&= \frac{\|\sum_{j=0}^{n} \langle \xi, \alpha_j \rangle \hat{\alpha}_j\|}{\|\xi\|\|\alpha_0\| \cdots \|\alpha_n\|} \le \max_{0 \le j \le n} \frac{|\langle \xi, \alpha_j \rangle|_p \|\hat{\alpha}_j\|}{\|\xi\|\|\alpha_0\| \cdots \|\alpha_n\|} = \\
&= \max_{0 \le j \le n} \|x, a_j\| \|a_0 \wedge \cdots \wedge a_{j-1} \wedge a_{j+1} \wedge \cdots \wedge a_n\| \le \max_{0 \le j \le n} \|x, a_j\|.
\end{aligned}$$

Этим завершается доказательство.

Весы Ночки [12] — [14] (см. также Чен [3]) изначально доказаны для поля комплексных чисел. Первоначальная статья Ночки написана очень сжато. Полное доказательство можно найти в тезисе Чена, который, напротив, довольно обширен. Ру и Вонг [18] укоротили доказательство и расширили весы Ночки на любое поле характеристического нуля. Следуя Чену, Ру, Столлу и Вонгу, мы будем использовать понятие подосновной позиции.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, ..., a_q\}$ – семейство точек $a_j \in \mathbf{P}(V^*)$. Возьмем $\alpha_j \in V^* - \{0\}$ с $\mathbf{P}(\alpha_j) = a_j$. Для $\lambda \in J_l^q$ положим $\mathcal{A}_\lambda = \{a_{\lambda(0)}, ..., a_{\lambda(l)}\}$, и пусть $E(\mathcal{A}_\lambda)$ – линейное подпространство, порожденное $\{\alpha_{\lambda(0)}, ..., \alpha_{\lambda(l)}\}$ в V^* над $\mathbf{C}_p$. Определим

$$J_l(\mathcal{A}) = \{\lambda \in J_l^q \mid \alpha_\lambda \ne 0\}.$$

Очевидно, если $\lambda \in J_l(\mathcal{A})$, то $\dim E(\mathcal{A}_\lambda) = l+1$, и $\alpha_{\lambda(0)}, ..., \alpha_{\lambda(l)}$ – базис $E(\mathcal{A}_\lambda)$. Говорят, что для $1 \leq n \leq u \leq q$ $\mathcal{A}$ находится в u-подосновной позиции, если $E(\mathcal{A}_\kappa) = V^*$ для любого $\kappa \in J^q_u$. Для $u = n$ это понятие согласуется с обычным понятием гиперплоскостей в основнй позиции.

Лемма 3.3. *Пусть V – векторное пространство размерности $n+1$ над $\mathbf{C}_p$, и пусть $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, ..., a_q\}$ – семейство точек $a_j \in \mathbf{P}(V^*)$ в u-подосновной позиции, $1 \leq n \leq u \leq q$. Тогда существуют функция $\omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}(0,1]$, называемая весом Ночки, и действительное число $\theta \geq 1$, называемое постоянной Ночки, обладающие следующими свойствами :*

1) $0 < \omega(a_j)\theta \leq 1, \quad j = 0, 1, ..., q$;

2) $q - 2u + n = \theta(\sum_{j=0}^q \omega(a_j) - n - 1)$;

3) $1 \leq \frac{u+1}{n+1} \leq \theta \leq \frac{2u-n+1}{n+1}$;

4) $\sum_{j=0}^s \omega(a_{\kappa(j)}) \leq \dim E(\mathcal{A}_\kappa)$ *при* $\kappa \in J^q_s$ *и* $0 \leq s \leq u$;

5) пусть $r_0, ..., r_q$ – последовательность действительных чисел с $r_j \geq 1$ для всех j. Тогда для любого $\kappa \in J^q_s$ с $0 \leq s \leq u$ при $\dim E(\mathcal{A}_\kappa) = l+1$ существует $\lambda \in J_l(\mathcal{A})$ такое, что $Im\lambda \subset Im\kappa$, $E(\mathcal{A}_\lambda) = E(\mathcal{A}_\kappa)$ и

$$\prod_{j=0}^{s} r_{\kappa(j)}^{\omega(a_{\kappa(j)})} \leq \prod_{j=0}^{l} r_{\lambda(j)}.$$

Подробнее см. [18]. Согласно Ру-Столлу [15] базис $e = (e_0, ..., e_n)$ пространства V называется совершенным для конечного семейства $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, ..., a_q\}$ точек в $\mathbf{P}(V^*)$, $q \geq n$ и $J_n(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, если для любого $\lambda \in J_n(\mathcal{A})$

$$\langle e_0 \wedge \cdots \wedge e_j, \alpha_{\pi(0)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\pi(j)} \rangle \neq 0, \quad \pi \in \mathcal{J}_\lambda, \quad j = 0, 1, ..., n,$$

где $\alpha_j \in V^* - \{0\}$, $\mathbf{P}(\alpha_j) = a_j$, $\mathcal{J}_\lambda$ – группа перестановок $\{\lambda(0), ..., \lambda(n)\}$. Существование совершенного базиса доказано Ру-Столлом [15] в поле комплексных чисел. Поскольку доказательство алгебраично, оно также работает на $\mathbf{C}_p$. Итак справедлива

Лемма 3.4.. *Пусть задано конечное семейство $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, ..., a_q\}$ точек в $\mathbf{P}(V^*)$, $q \geq n$ и $J_n(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Тогда существует совершенный базис V для $\mathcal{A}$.*

§4. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА p-АДИЧНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Пусть V – нормированное векторное пространство размерности $n+1>0$ над $\mathbf{C}_p$, и пусть $\| \ \|$ – норма, определенная над базисом $e=(e_0,...,e_n)$ пространства V. Под *p-адичной голоморфной кривой*

$$f:\mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$$

мы будем иметь ввиду класс эквивалентности $(n+1)$-кратностей p-адичных целых функций

$$(\tilde{f}_0,...,\tilde{f}_n):\mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{C}_p^{n+1}$$

таких, что $\tilde{f}_0,...,\tilde{f}_n$ не имеют простых факторов в кольце p-адичных целых функций на $\mathbf{C}_p$ и таких, что не все $\tilde{f}_j$ тождественно равнялись бы нулю. Здесь

$$\tilde{f}=\tilde{f}_0e_0+\cdots+\tilde{f}_ne_n:\mathbf{C}_p \longrightarrow V$$

называется приведенным представлением f, а базис e называется допустимым для f, если $\tilde{f}_0 \not\equiv 0$. Обозначим

$$\mu(r,\tilde{f})=\max_{0\le k\le n}\mu(r,\tilde{f}_k).$$

Заметим, что

$$\mu(r,\tilde{f})=\max_{0\le k\le n}|\tilde{f}_k(z)|_p=\|\tilde{f}(z)\|.$$

Поэтому *характеристическая функция*

$$T(r,f)=\log\mu(r,\tilde{f})$$

определена корректно для всех $r>0$ с точностью до $O(1)$.

Возьмем отображение

$$\tilde{h}=\tilde{h}_0e_0+\cdots+\tilde{h}_ne_n:\mathbf{C}_p \longrightarrow V,$$

где $(\tilde{h}_0,...,\tilde{h}_n)$ – $(n+1)$-кратных p-адичных мероморфных функций таких, что не все $\tilde{h}_j$ тождественно равны ную. Согласно прдложению 7.1 Черри-Йе [4] существует наибольший простой делитель h функций $\tilde{h}_0, ..., \tilde{h}_n$ такой, что $\tilde{f} = \frac{\tilde{h}}{h}$ – приведенное представление p-адичной голоморфной кривой $f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$. Мы назовем $\tilde{h}$ представлением f и будем писать $f = \mathbf{P} \circ \tilde{h}$. Заметим, что

$$\mu(r, \tilde{h}) = \mu(r, h)\mu(r, \tilde{f}).$$

Используя формулу Йенсена, получим

$$T(r, f) + N_f(r) = \log \mu(r, \tilde{h}) + O(1), \tag{4}$$

где

$$N_f(r) = N(r, \frac{1}{h}) - N(r, h).$$

Имеем также

$$N(r, \tilde{h} = 0) = N(r, \frac{1}{h}), \quad N(r, \tilde{h} = \infty) = N(r, h).$$

Пусть $\tilde{f} = \tilde{f}_0 e_0 + \cdots + \tilde{f}_n e_n : \mathbf{C}_p \longrightarrow V$ -приведенное представление f. Тогда

$$\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \cdots \wedge \tilde{f}^{(n)} = \mathbf{W}[e, \tilde{f}] e_0 \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

где $\mathbf{W}[e, \tilde{f}]$ – детерминант Вронского от $\tilde{f}$ по базису e, и поэтому

$$|\mathbf{W}[e, \tilde{f}]|_p = \|\tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \cdots \wedge \tilde{f}^{(n)}\|.$$

Мы также получим

$$\mathbf{W}[e, \tilde{f}] = \langle \tilde{f} \wedge \tilde{f}' \wedge \cdots \wedge \tilde{f}^{(n)}, \epsilon_0 \wedge \epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n \rangle,$$

где $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ – дуальный базис e. Введем p-адичную целую функцию

$$\mathbf{K}[e, \tilde{f}] = \tilde{f}_0 \cdots \tilde{f}_n$$

и p-адичную мероморфную функцию

$$S[e, \tilde{f}] = \frac{\mathbf{W}[e, \tilde{f}]}{\mathbf{K}[e, \tilde{f}]}.$$

Из леммы о логарифмической производной имеем

$$m(r, S[e, \tilde{f}]) = O(1). \tag{5}$$

Пусть $V_0, V_1, ..., V_s$ и W – нормированные векторные пространства над $\mathbf{C}_p$. Пусть

$$\odot : V_0 \times \cdots \times V_s \longrightarrow W$$

– $(s+1)$-линейное отображение над $\mathbf{C}_p$. Возьмем p-адичные голоморфные кривые

$$f_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V_j), \quad j = 0, 1, ..., s$$

с приведенными представлениями

$$\tilde{f}_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow V_j, \quad j = 0, 1, ..., s.$$

В этом случае говорят, что $(f_0, ..., f_s)$ свободен для $\odot$, если $\tilde{f}_0 \odot \cdots \odot \tilde{f}_s \not\equiv 0$. В этих условиях обозначим

$$\mu(r, f_0 \odot \cdots \odot f_s) = \frac{\mu(r, \tilde{f}_0 \odot \cdots \odot \tilde{f}_s)}{\mu(r, \tilde{f}_0) \cdots \mu(r, \tilde{f}_s)}.$$

Имеем

$$\mu(r, f_0 \odot \cdots \odot f_s) = \|f_0(z) \odot \cdots \odot f_s(z)\|.$$

Предположим, что $(f_0, ..., f_s)$ свободен для $\odot$ и определим функцию компенсации

$$m_{f_0 \odot \cdots \odot f_s}(r) = -\log \mu(r, f_0 \odot \cdots \odot f_s).$$

Заметим, что

$$f_0 \odot \cdots \odot f_s : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(W)$$

– p-адичная голоморфная кривая с представлением $\tilde{f}_0 \odot \cdots \odot \tilde{f}_s$. Итак, мы получаем первую основную теорему :

$$\sum_{j=0}^{s} T(r, f_j) = N_{f_0 \odot \cdots \odot f_s}(r) + m_{f_0 \odot \cdots \odot f_s}(r) + T(r, f_0 \odot \cdots \odot f_s) + O(1).$$

При $\dim W = 1$ $\mathbf{P}(W)$ – точка, а $T(r, f_0 \odot \cdots \odot f_s)$ – константа.

Пусть $g : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$ – p-адичная голоморфная кривая с приведенным представлением

$$\tilde{g} = \tilde{g}_0 \epsilon_0 + \cdots + \tilde{g}_n \epsilon_n : \mathbf{C}_p \longrightarrow V^*,$$

где $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ – дуальный базис e. Пара (f, g) называется свободной, если она свободна для $\angle$, т.е.

$$\tilde{f}\angle\tilde{g} = \langle\tilde{f}, \tilde{g}\rangle = \tilde{g}_0\tilde{f}_0 + \cdots + \tilde{g}_n\tilde{f}_n \not\equiv 0.$$

Пусть пара (f, g) свободна. Тогда первая основная теорема принимает вид

$$T(r, f) + T(r, g) = N_f(r, g) + m_f(r, g) + O(1),$$

где

$$N_f(r,g) = N_{f\angle g}(r) = N(r, \frac{1}{\langle\tilde{f}, \tilde{g}\rangle}), \quad m_f(r,g) = m_{f\angle g}(r).$$

Дефект отображения f для g определяется из

$$\delta_f(g) = 1 - \lim_{r\to\infty} \sup \frac{N_f(r, g)}{T(r, f) + T(r, g)}$$

с $0 \le \delta_f(g) \le 1$. Говорят, что g растет медленне f, если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} = 0.$$

Если так, то

$$\delta_f(g) = 1 - \lim_{r\to\infty} \sup \frac{N_f(r, g)}{T(r, f)}.$$

Предположим, что $\xi \in V$, $\eta \in V - \{0\}$, и положим $y = \mathbf{P}(\eta)$. Пусть пара (y, g) свободна. p-адичная мероморфная функция

$$g_{\xi,\eta} = \frac{\langle\xi, \tilde{g}\rangle}{\langle\eta, \tilde{g}\rangle}$$

называется координатной функцией g. Пусть $\mathcal{M}(\mathbf{C}_p)$ – поле всех p-адичных мероморфных функций на $\mathbf{C}_p$. Пусть $\mathcal{R}$ – подполе $\mathcal{M}(\mathbf{C}_p)$ и $\mathbf{C}_p \subset \mathcal{R}$. Тогда g называется определенной над $\mathcal{R}$, если $g_{\xi,\eta} \in \mathcal{R}$ для всевозможных ξ и η. Если базис ϵ допустим для g, то k-тая координатная функция g определяется так :

$$g_k = g_{e_k, e_0} = \frac{\tilde{g}_k}{\tilde{g}_0}, \quad k = 0, ..., n.$$

Очевидно, g определено над $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $g_k \in \mathcal{R}$ для $k = 1, ..., n$. Заметим, что $\mu(r, \tilde{g}_k) = \mu(r, g_k)\mu(r, \tilde{g}_0)$. Для $k = 1, ..., n$ имеем

$$\begin{aligned} T(r, g_k) &\le \max\{\log\mu(r, \tilde{g}_0), \log\mu(r, \tilde{g}_k)\} + O(1) \le \\ &\le T(r, g) + O(1) \le \sum_{j=1}^{n} T(r, g_j) + O(1). \end{aligned} \tag{6}$$

p-адичная голоморфная кривая f называется линейно невырождающейся над $\mathcal{R}$, если (f, g) свободен для каждой p-адичной голоморфной кривой $g : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$, определенной над $\mathcal{R}$. Если f – линейно вырождающаяся над $\mathcal{R}$, то пусть $\mathcal{G}^*$ – множество всех p-адичных голоморфных кривых $g : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$, определенных над $\mathcal{R}$ и таких, что (f, g) не свободно. Возьмем подмножество $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^{q} \subseteq \mathcal{G}^*$, причем $q + 1 = \#\mathcal{G}^*$, если $\mathcal{G}^*$ финитно, и $q = \infty$ – в противном случае. Возьмем также приведенное представление g_j

$$\tilde{g}_j = \tilde{g}_{j0}\epsilon_0 + \cdots + \tilde{g}_{jn}\epsilon_n : \mathbf{C}_p \longrightarrow V^*.$$

Для $\lambda \in J_l^q$ запишем $\mathcal{G}_\lambda = \{g_{\lambda(j)}\}_{j=0}^{l}$, что является сокращенной записью формулы

$$\tilde{g}_\lambda = \tilde{g}_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{\lambda(l)} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \bigwedge_{l+1} V^*.$$

Если $\tilde{g}_\lambda \not\equiv 0$, то

$$g_\lambda = g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(l)} = \mathbf{P} \circ \tilde{g}_\lambda : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(\bigwedge_{l+1} V^*)$$

– p-адичная голоморфная кривая, и семейство $\mathcal{G}_\lambda$ называется линейно независимым. Определим

$$J_l(\mathcal{G}) = \{\lambda \in J_l^q \mid \tilde{g}_\lambda \not\equiv 0\},$$

и

$$\ell_f(\mathcal{R}) = \max\{l + 1 \mid J_l(\mathcal{G}) \neq \emptyset, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*\}$$

с $1 \leq \ell_f(\mathcal{R}) \leq n + 1$. Запишем

$$V_{\mathcal{R}} = V \otimes_{\mathbf{C}_p} \mathcal{R} = \mathcal{R}\{e_0, ..., e_n\},$$

$$V_{\mathcal{R}}^* = V^* \otimes_{\mathbf{C}_p} \mathcal{R} = \mathcal{R}\{\epsilon_0, ..., \epsilon_n\},$$

и определим линейное подпространство $V_{\mathcal{R}}^*$:

$$E[f] = \{w \in V_{\mathcal{R}}^* \mid \langle \tilde{f}, w \rangle \equiv 0\}.$$

Легко доказать, что $\ell_f(\mathcal{R}) = \dim E[f]$. Положим $k = n - \ell_f(\mathcal{R})$. Тогда f называется k-плоской над $\mathcal{R}$. С целью упрощения наших обозначений будем писать $\ell_f(\mathcal{R}) = 0$, если f линейно невыродающаяся над $\mathcal{R}$, т.е. $E[f] = \emptyset$, и будем говорить, что f является n-плоской над $\mathcal{R}$.

Лемма 4.1. *Число k неотрицательно, т.е.* $0 \le \ell_f(\mathcal{R}) \le n$.

Доказательство. Если $k < 0$, т.е. $\ell_f(\mathcal{R}) = n+1$, то существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ такое, что

$$\tilde{g}_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{\lambda(n)} \not\equiv 0; \quad \langle \tilde{f}, \tilde{g}_{\lambda(j)} \rangle \equiv 0 \ (0 \le j \le n).$$

Согласно правилу Крамера $\tilde{f} \equiv 0$, что невозможно.

Лемма 4.2. *Пусть $f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ – p-адичная голоморфная кривая, линейно вырождающаяся над $\mathcal{R}$. Тогда f является k-плоской над $\mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда существует базис $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n)$ пространства $V_{\mathcal{R}}$ над $\mathcal{R}$ с дуальным базисом $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$ таким, что для любого представления $\tilde{f} : \mathbf{C}_p \longrightarrow V$ мы имеем*

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^{k} \langle \tilde{f}, \alpha_j \rangle \xi_j.$$

Более того, базис можно выбрать так, что $\alpha_j \in V^*$ для $j = 0, ..., k$ и

$$\langle \tilde{f}, \alpha_0 \rangle, ..., \langle \tilde{f}, \alpha_k \rangle$$

– p-адично голоморфны и линейно независимы над $\mathcal{R}$.

С доказательством можно ознакомиться в работе [15] (теорема 6.9).

§5. ОТОБРАЖЕНИЕ СТЕЙНМЕЦА–СТОЛЛА

Пусть V – векторное пространство размерности $n+1 > 0$ над $\mathbf{C}_p$. Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^{q}$ – конечное семейство голоморфных кривых $g_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$, $n \le q < \infty$ и $J_n(\mathcal{G}) \ne \emptyset$. Для каждого $z \in \mathbf{C}_p$ определим орбиту $\mathcal{G}(z) = \{g_j(z)\}_{j=0}^{q}$. Пусть $\tilde{g}_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow V^*$ – приведенное представление g_j для $j = 0, ..., q$. Базис $e = (e_0, ..., e_n)$ пространства V называется совершенным для $\mathcal{G}$, если для каждого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$

$$\langle e_0 \wedge \cdots \wedge e_j, \tilde{g}_{\pi(0)} \wedge \cdots \wedge \tilde{g}_{\pi(j)} \rangle \not\equiv 0, \quad \pi \in \mathcal{J}_\lambda, \quad j = 0, 1, ..., n,$$

где $\mathcal{J}_\lambda$ – группа перестановок $\{\lambda(0), ..., \lambda(n)\}$. Определим

$$I = I(\mathcal{G}) = \bigcup_{l=0}^{n} \bigcup_{\lambda \in J_l(\mathcal{G})} \tilde{g}_\lambda^{-1}(0).$$

Очевидно, $J_l(\mathcal{G}) = J_l(\mathcal{G}(z))$, если $z \in \mathbf{C}_p - I$. Поэтому, если $z \in \mathbf{C}_p - I$, то совершенный базис V для $\mathcal{G}(z)$ является также совершенным базисом V для $\mathcal{G}$. В частности, совершенный базис V для $\mathcal{G}$ существует.

Пусть $\| \ \|$ – норма, определенная над совершенным базисом $e = (e_0, ..., e_n)$ пространства V для $\mathcal{G}$. Имеем

$$\tilde{g}_j = \tilde{g}_{j0}\epsilon_0 + \cdots + \tilde{g}_{jn}\epsilon_n : \mathbf{C}_p \longrightarrow V^*, \quad j = 0, ..., q,$$

где $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ – дуальный базис e. Заметим, что для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ базис ϵ допустим для каждого $g_{\lambda(j)}$, поскольку e совершенен. Координатные функции

$$g_{\lambda(j)k} = \frac{\tilde{g}_{\lambda(j)k}}{\tilde{g}_{\lambda(j)0}}, \quad \lambda \in J_n(\mathcal{G}), \quad j = 0, ..., n, \quad k = 0, ..., n,$$

определены. Определим

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{g_{\lambda(j)k} \mid \lambda \in J_n(\mathcal{G}), 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n\}.$$

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{G}})$ – конечномерное векторное пространство, порожденное $\tilde{\mathcal{G}}$ над $\mathbf{C}_p$, и пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{G}})$ – поле, порожденное $\tilde{\mathcal{G}}$ над $\mathbf{C}_p$. Тогда

$$\mathbf{C}_p \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mathbf{C}_p)$$

и $\mathcal{R} = \mathbf{C}_p$, если каждый элемент $\mathcal{G}_\lambda$ постоянен для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. $\mathcal{R}$ – также наименьшее поле такое, что каждый элемент $\mathcal{G}_\lambda$ определен над $\mathcal{R}$ для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. Мы будем предполагать, что каждое g_j растет медленнее p-адичной голоморфной кривой $f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$. Из (6) получаем, что каждое $g_{jk} \in \tilde{\mathcal{G}}$ растет медленнее f, т.е.

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, g_{jk})}{T(r, f)} = 0,$$

для $j \in \mathrm{Im}\lambda$ с $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$. Следовательно, все $\phi \in \mathcal{R}$ и, далее, все p-адичные голоморфные кривые, определенные над $\mathcal{R}$, растут медленне f.

p-адичная целая функция $G_0 \not\equiv 0$ называется универсальным знаменателем $\tilde{\mathcal{G}}$, если$G_0\phi$ – p-адичная целая функция для каждого $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}$ такая, что для любого $z \in \mathbf{C}_p$ существует $\phi \in \tilde{\mathcal{G}}$ с $(G_0\phi)(z) \neq 0$. Такие G_0 существуют, поскольку наибольшие простые делители

$$\{\tilde{g}_{\lambda(j)0} \mid \lambda \in J_n(\mathcal{G}), j = 0, ..., n\}$$

согласно предложению 7.1 из [4] существуют. Предположим, что $\mathcal{L}^*$ – дуальное векторное пространство $\mathcal{L}$. Тогда p-адичная голоморфная векторная функция $\tilde{G} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathcal{L}^* - \{0\}$, однозначно определяемая из

$$\langle \phi, \tilde{G}(z) \rangle = (G_0\phi)(z)$$

для всех $\phi \in \mathcal{L}$ и $z \in \mathbf{C}_p$, определяет линейно невырождающуюся p-адичную голоморфную кривую

$$G = \mathbf{P} \circ \tilde{G} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{L}^*),$$

называемую сопряженным отображением $\tilde{\mathcal{G}}$. Далее мы получаем p-адичную голоморфную кривую

$$G^{\amalg m} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(\amalg_m \mathcal{L}^*)$$

с приведенным представлением

$$\tilde{G}^{\amalg m} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \amalg_m \mathcal{L}^* - \{0\}.$$

Пусть $\mathcal{L}^*(m)$ является наименьшим линейным подпространством $\amalg_m \mathcal{L}^*$, содержащим $\tilde{G}^{\amalg m}(\mathbf{C}_p)$. Определим

$$q(m) = \dim \mathcal{L}^*(m).$$

Тогда $\mathcal{L}^*(1) = \mathcal{L}^*$ и

$$G^{\amalg m} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{L}^*(m))$$

линейо невыродающийся, т.е. его образ не может содержаться ни в одной гиперплоскости.

Выберем приведенное представление $\tilde{f} : \mathbf{C}_p \longrightarrow V - \{0\}$ отображения f с

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^{n} \tilde{f}_j e_j, \quad \tilde{f}_0 \not\equiv 0,$$

и определим

$$V(0) = \mathbf{C}_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}_p e_n \subset V,$$

$$V(m) = \mathcal{L}^*(m) \oplus \{V(0) \otimes \mathcal{L}^*(m+1)\}, \quad m = 1, \ldots$$

с размерностью

$$k(m) + 1 = \dim V(m) = q(m) + nq(m+1).$$

Мы определили p-адичную голоморфную векторную функцию

$$\tilde{F}_m = \tilde{f}_0 G_0 \tilde{G}^{\amalg m} + (\tilde{f} - \tilde{f}_0 e_0) \otimes \tilde{G}^{\amalg m+1} : \mathbf{C}_p \longrightarrow V(m).$$

Так как $\tilde{f}_0 G_0 \not\equiv 0$, то мы имеем $\tilde{F}_m \not\equiv 0$. Итак, определена p-адичная голоморфная кривая, называемая m-тым p-адичным отображением Стейнмеца-Столла :

$$F_m = \mathbf{P} \circ \tilde{F}_m : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V(m)).$$

Пусть $\theta = (\theta_0, ..., \theta_l)$ – базис $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$, $\theta_0 = 1$, и пусть $\tau = (\tau_0, ..., \tau_l)$ – дуальный базис. Запишем

$$\tilde{G} = \sum_{j=0}^{l} \tilde{G}_j \tau_j.$$

Тогда $\tilde{G}_j = G_0\theta_j, j = 0, ..., l$. Поэтому отображение G определено над $\mathcal{R}$ и, следовательно

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,G)}{T(r,f)} = 0.$$

Заметим, что $G_0 = \tilde{G}_0 = \langle\theta_0, \tilde{G}\rangle$. Положим $b = \mathbf{P}(\theta_0) \in \mathbf{P}(\mathcal{L})$. Из первой основной теоремы следует, что

$$0 \le N(r, \frac{1}{G_0}) = N_G(r,b) \le T(r,G) + O(1).$$

Отсюда имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N(r, \frac{1}{G_0})}{T(r,f)} = 0.$$

Заметим, что $\tilde{G} \neq 0$, откуда следует, что $\tilde{G}^{\amalg m+1} \neq 0$ и $\tilde{G}^{\amalg m} \neq 0$. Поэтому, легко получаем

$$N_{F_m}(r) = N(r, \tilde{F}_m = 0) \le N(r, \frac{1}{G_0}),$$

и, следовательно

$$\lim_{r\to\infty} \frac{N_{F_m}(r)}{T(r,f)} = 0.$$

Пусть $\| \ \|$ – норма, определенная над базисом θ векторного пространства $\mathcal{L}$, которая порождает нормы на $\mathcal{L}^*$ и

$$\amalg_m \mathcal{L}^* \oplus \{V(0) \otimes \amalg_{m+1} \mathcal{L}^*\} \supset V(m),$$

соответственно, и, следовательно, ограничивает норму на $V(m)$. Заметим, что

$$\|\tilde{F}_m\| \leq \max\{\|\tilde{f}_0 G_0 \tilde{G}^{\amalg m}\|, \|(\tilde{f} - \tilde{f}_0 e_0) \otimes \tilde{G}^{\amalg m+1}\|\} \leq$$

$$\leq \max\{|\tilde{f}_0|_p |\langle 1, \tilde{G}\rangle|_p \|\tilde{G}\|^m, (\max_{1 \leq j \leq n} |\tilde{f}_j|_p) \|\tilde{G}\|^{m+1}\} \leq \|\tilde{f}\| \|\tilde{G}\|^{m+1},$$

откуда получаем

$$\mu(r, \tilde{F}_m) \leq \mu(r, \tilde{f}) \mu(r, \tilde{G})^{m+1}.$$

Поскольку μ непрерывно, а $|\mathbf{C}_p|$ плотно в $\mathbb{R}[0, +\infty)$, то

$$\mu(r, \tilde{F}_m) \leq \mu(r, \tilde{f}) \mu(r, \tilde{G})^{m+1}$$

для всех $r > 0$. Следовательно, имеем

$$T(r, F_m) \leq T(r, f) + (m+1) T(r, G) + O(1) = \{1 + o(1)\} T(r, f).$$

Определим

$$\tilde{\mathcal{G}}_m = \{\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m \mid \phi_j \in \tilde{\mathcal{G}}, \ j = 1, ..., m\}$$

и введем сокращеную запись $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{G}}_m)$. Имеем

$$\mathbf{C}_p \subseteq \mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}_{m+1} \subseteq \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{G}}_{m+1}) \subseteq \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathcal{R}.$$

Существует одно и только одно сюръективное линейное отображение $\sigma : \amalg_m \mathcal{L} \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathcal{L}_m$ такое, что

$$\sigma(\phi_1 \amalg \cdots \amalg \phi_m) = \phi_1 \cdots \phi_m$$

при $\phi_j \in \mathcal{L}$ для $j = 1, ..., m$. Заметим, что

$$\tilde{G}^{\amalg m} = \sum_{\lambda \in J_{l,m}} \frac{m!}{\lambda!} \tilde{G}_0^{\lambda(0)} \cdots \tilde{G}_l^{\lambda(l)} \tau^{\amalg m} = G_0^m \sum_{\lambda \in J_{l,m}} \frac{m!}{\lambda!} \theta_0^{\lambda(0)} \cdots \theta_l^{\lambda(l)} \tau^{\amalg m}.$$

Получаем

$$\langle \phi, \tilde{G}^{\amalg m} \rangle = G_0^m \sigma(\phi)$$

для всех $\phi \in \amalg_m \mathcal{L}$. Согласно теореме 3.9 Столла [21] мы также имеем следующее :

Лемма 5.1. *Пусть* $\tau_{m,1},\dots,\tau_{m,q(m)}$ *– базис пространства* $\mathcal{L}^*(m)$ *над* $\mathbf{C}_p$. *Тогда*

$$\tilde{G}^{\amalg m} = \sum_{j=1}^{q(m)} B_{m,j}\tau_{m,j},$$

где каждое $B_{m,j}$ *–* p*-адичная целая функция с* $G_0^{-m}B_{m,j} \in \mathcal{L}_m$. *Более того*

$$G_0^{-m}B_{m,1},\dots,G_0^{-m}B_{m,q(m)}$$

является базисом $\mathcal{L}_m$.

В частности, мы видим, что

$$q(m) = \dim \mathcal{L}_m \le \dim \mathcal{L}_{m+1} = q(m+1),$$

откуда легко можно вывести результат Стейнмеца

$$\lim_{m\to\infty} \inf \frac{q(m+1)}{q(m)} = 1.$$

Используя теорему 6.5 Столла [21], мы также получаем следующее :

Лемма 5.2. *Если* f *– линейно невыродающееся отображение над* $\mathcal{R}$, *то* m*-тое* p*-адичное отображение Стейнмеца-Столла* F_m *является линейно невыродающимся.*

Пусть $\tau_{m,1},\dots,\tau_{m,q(m)}$ – базис $\mathcal{L}^*(m)$ над $\mathbf{C}_p$. Тогда

$$e(m) = \{\tau_{m,i}, e_k \otimes \tau_{m+1,j} \mid 1 \le k \le n, 1 \le i \le q(m), 1 \le j \le q(m+1)\}$$

– базис $V(m)$, над которым определена норма. Возьмем $c \in \bigwedge_{k(m)+1} V(m)^*$, $\|c\| = 1$. Тогда

$$\mathbf{W}[e(m), \tilde{F}_m] = \langle \tilde{F}_m \wedge \tilde{F}_m' \wedge \cdots \wedge \tilde{F}_m^{(k(m))}, c\rangle$$

– детерминант Вронского от $\tilde{F}_m$ по базису $e(m)$ с

$$|\mathbf{W}[e(m), \tilde{F}_m]|_p = \|\tilde{F}_m \wedge \tilde{F}_m' \wedge \cdots \wedge \tilde{F}_m^{(k(m))}\|.$$

p-адичная мероморфная функция на $\mathbf{C}_p$ определяется из

$$S_m = \frac{\mathbf{W}[e(m), \tilde{F}_m]}{\mathbf{K}_m},$$

где

$$\mathrm{K}_m = \tilde{f}_0^{q(m)}(\tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_n)^{q(m+1)} G_0^{(m+1)(k(m)+1)}.$$

Лемма 5.3. *Если f – линейно невыродающееся отображение над $\mathcal{R}$, то существует p-адичная мероморфная функция $\phi_m \in \mathcal{R}$ такая, что $\mathrm{K}[e(m), \tilde{F}_m] = \phi_m \mathrm{K}_m$.*

Доказательство. Согласно лемме 5.1 существуют p-адичные целые функции $B_{m,i}$ и $B_{m+1,j}$ такие, что

$$\tilde{G}^{\amalg m} = \sum_{i=1}^{q(m)} B_{m,i}\tau_{m,i}, \quad \tilde{G}^{\amalg m+1} = \sum_{j=1}^{q(m+1)} B_{m+1,j}\tau_{m+1,j},$$

$\theta_{m,i} = G_0^{-m} B_{m,i} \in \mathcal{L}_m \subset \mathcal{R}$, $\theta_{m+1,j} = G_0^{-m-1} B_{m+1,j} \in \mathcal{L}_{m+1} \subset \mathcal{R}$ и такие, что $\theta_{m,1}, \ldots, \theta_{m,q(m)}$ – базис $\mathcal{L}_m$, а $\theta_{m+1,1}, \ldots, \theta_{m+1,q(m+1)}$ – базис $\mathcal{L}_{m+1}$. Мы имеем

$$\tilde{F}_m = \sum_{i=1}^{q(m)} \tilde{f}_0 G_0 B_{m,i}\tau_{m,i} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{q(m+1)} \tilde{f}_k B_{m+1,j} e_k \otimes \tau_{m+1,j},$$

и, следовательно

$$\mathrm{K}[e(m), \tilde{F}_m] = \left(\prod_{i=1}^{q(m)} \tilde{f}_0 G_0 B_{m,i}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{q(m+1)} \tilde{f}_k B_{m+1,j}\right) = \phi_m \mathrm{K}_m,$$

где

$$\phi_m = \left(\prod_{i=1}^{q(m)} \theta_{m,i}\right)\left(\prod_{j=1}^{q(m+1)} \theta_{m+1,j}\right)^n \in \mathcal{R}.$$

Если f – линейно невыродающееся отображение над $\mathcal{R}$, то из (5) получаем

$$m(r, S[e(m), \tilde{F}_m]) = O(1).$$

Заметим, что

$$S_m = \phi_m S[e(m), \tilde{F}_m],$$

отсюда

$$m(r, S_m) \le m(r, \phi_m) + m(r, S[e(m), \tilde{F}_m]) = o(T(r, f)).$$

Определим

$$a_i = \mathrm{P}(\epsilon_i) \in \mathrm{P}(V^*), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Имеем

$$N(r,S_m) \le q(m)N_f(r,a_0) + q(m+1)\sum_{i=1}^{n} N_f(r,a_i) +$$

$$+ (m+1)(k(m)+1)N(r,\frac{1}{G_0}).$$

Тогда

$$T(r,S_m) \le q(m)N_f(r,a_0) + q(m+1)\sum_{i=1}^{n} N_f(r,a_i) + o(T(r,f)),$$

для $r \to \infty$.

Для $0 \le j \in \mathbf{Z}$ определим $s(j) = \frac{1}{2}(j-1)j$. Возьмем $0 < m \in \mathbf{Z}$, $m > s(n)$. Для любого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ p-адичная целая функция $\mathbf{K}_{m,\lambda} \not\equiv 0$ определяется из

$$\mathbf{K}_{m,\lambda} = \left(\prod_{j=0}^{n} \langle \tilde{f}, \mathbf{g}_{\lambda(j)} \rangle^{q(m-s(j))}\right)\left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{f}_j^{\tilde{q}(m+1)-q(m-s(j))}\right) G_0^{(m+1)(k(m)+1)},$$

где

$$\mathbf{g}_{\lambda(j)} = \frac{1}{\tilde{g}_{\lambda(j)0}}\tilde{g}_{\lambda(j)}.$$

Лемма 5.4. *Если f – линейно невырожающееся отображение над $\mathcal{R}$, то для любого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ существуют линейный изоморфизм $L_\lambda : V(m) \longrightarrow V(m)$, базис $e(m)$ пространства $V(m)$ и p-адичная мероморфная функция $\phi_{m,\lambda} \in \mathcal{R}$ такие, что* $\mathbf{K}[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m] = \phi_{m,\lambda}\mathbf{K}_{m,\lambda}$.

Ру и Столл [15] доказали этот результат на $\mathbf{C}$. Поскольку их метод алгебраичен, доказательство справедливо также на $\mathbf{C}_p$. Следовательно, для каждого $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ получаем p-адичную мероморфную функцию

$$S_{m,\lambda} = \frac{\mathbf{W}[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m]}{\mathbf{K}_{m,\lambda}}$$

с

$$S_{m,\lambda} = \phi_{m,\lambda} S[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m],$$

и, следовательно

$$m(r, S_{m,\lambda}) = o(T(r,f)).$$

Заметим, что

$$\mathbf{W}[e(m), L_\lambda \circ \tilde{F}_m] = c_\lambda \mathbf{W}[e(m), \tilde{F}_m]$$

для постоянной $c_\lambda \in \mathbf{C}_p$. Тогда мы получаем основное тождество Ру-Столла

$$\frac{S_{m,\lambda}}{S_m} = c_\lambda \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle \langle e_0, \tilde{g}_{\lambda(j)} \rangle}{\langle \tilde{f}, \tilde{g}_{\lambda(j)} \rangle} \right)^{q(m-s(j))}.$$

Следовательно

$$\frac{\mu(r, S_{m,\lambda})}{\mu(r, S_m)} = |c_\lambda|_p \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{\mu(r, f \angle a_j) \mu(r, e^0 \angle g_{\lambda(j)})}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})} \right)^{q(m-s(j))},$$

где $e^0 = \mathbf{P}(e_0) \in \mathbf{P}(V)$. Определим

$$\Xi(r) = \frac{1}{\mu(r, S_m)} \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{\mu(r, f \angle a_j)} \right)^{q(m)},$$

$$\Psi_\lambda(r) = \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})},$$

$$R_\lambda(r) = \frac{\mu(r, S_{m,\lambda})}{|c_\lambda|_p} \prod_{j=0}^{n} \frac{\mu(r, f \angle a_j)^{q(m)-q(m-s(j))}}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})^{q(m)-q(m-s(j))} \mu(r, e^0 \angle g_{\lambda(j)})^{q(m-s(j))}},$$

для всех $r > 0$. После легких вычислений перепишем основное тождество в виде

$$R_\lambda(r) \Xi(r) = \Psi_\lambda(r)^{q(m)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\log \Xi(r) = N(r, S_m) - N(r, \frac{1}{S_m}) + q(m) \sum_{j=0}^{n} m_f(r, a_j) + O(1) \leq \\
&\leq q(m) N_f(r, a_0) + q(m+1) \sum_{i=1}^{n} N_f(r, a_i) + \\
&+ q(m) \sum_{j=0}^{n} m_f(r, a_j) + o(T(r, f)) \leq \\
&\leq (q(m) + nq(m+1)) T(r, f) + o(T(r, f)).
\end{aligned} \tag{7}$$

Для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ мы также имеем

$$\begin{aligned}
&\log^+ R_\lambda(r) \leq m(r, S_{m,\lambda}) + \log^+ \frac{1}{|c_\lambda|_p} + \sum_{j=0}^{n} (q(m) - q(m - s(j))) m_f(r, g_{\lambda(j)}) + \\
&+ \sum_{j=0}^{n} q(m - s(j)) m_{e^0 \angle g_{\lambda(j)}}(r) \leq \sum_{j=0}^{n} (q(m) - q(m - s(j))) T(r, f) + o(T(r, f)).
\end{aligned} \tag{8}$$

§6. p-АДИЧНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ В ПОДОСНОВНОЙ ПОЗИЦИИ

Продолжим изучение ситуации в §5. Пусть u – целое число и $n \leq u \leq q$. Говорят, что конечное семейство $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ находится в u-подосновной позиции, если для любого $\kappa \in J_u^q$ существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ с $\mathrm{Im}\lambda \subseteq \mathrm{Im}\kappa$. Конечно, n-подосновная позиция является основной позицией.

Предположим, что $\mathcal{G}$ находится в u-подосновной позиции. Очевидно, если $z \in \mathbf{C}_p - I$, то орбита $\mathcal{G}(z)$ находится в u-подосновной позиции. Для $\lambda \in J_l^q$ запишем

$$\mathcal{G}_\lambda(z) = \{g_{\lambda(0)}(z), ..., g_{\lambda(l)}(z)\}.$$

Тогда $\dim E(\mathcal{G}_\lambda(z))$ является постоянной для $z \in \mathbf{C}_p - I$ (см. [16], лемма 3.2).

Лемма 6.1. *Пусть V – векторное пространство размерности $n+1$ над $\mathbf{C}_p$, и пусть $\mathcal{G} = \{g_0, g_1, ..., g_q\}$ – семейство p-адичных голоморфных кривых $g_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$ в u-подосновной позиции, $1 \leq n \leq u \leq q$. Тогда существуют функция $\omega : \mathbf{Z}[0, q] \longrightarrow \mathbf{R}(0, 1]$ и действительное число $\theta \geq 1$, которые для $z \in \mathbf{C}_p - I$ обладают следующими свойствами :*

1) $0 < \omega(j)\theta \leq 1, \quad j = 0, 1, ..., q$;

2) $q - 2u + n = \theta(\sum_{j=0}^q \omega(j) - n - 1)$;

3) $1 \leq \frac{u+1}{n+1} \leq \theta \leq \frac{2u-n+1}{n+1}$;

4) $\sum_{j=0}^s \omega(\kappa(j)) \leq \dim E(\mathcal{G}_\kappa(z))$, если $\kappa \in J_s^q$ с $0 \leq s \leq u$;

5) пусть $r_0, ..., r_q$ – семейство функций, определенных на $\mathbf{C}_p - I$ с $r_j \geq 1$ для всех j. Тогда для любого $\kappa \in J_s^q$, $0 \leq s \leq u$ при $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z)) = l + 1$ существует $\lambda \in J_l(\mathcal{G})$, $\mathrm{Im}\lambda \subset \mathrm{Im}\kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$ и

$$\prod_{j=0}^{s} r_{\kappa(j)}(z)^{\omega(\kappa(j))} \leq \prod_{j=0}^{l} r_{\lambda(j)}(z).$$

Доказательство. Фиксируем точку $z_0 \in \mathbf{C}_p - I$. Тогда $\mathcal{G}(z_0)$ находится в u-подосновной позиции. Мы получаем весовую функцию Ночки ω и постоянную Ночки θ для семейства $\mathcal{G}(z_0)$. Определим $\omega(j) := \omega(g_j(z_0))$ для семейства $\mathcal{G}(z)$ при $z \in \mathbf{C}_p - I$. Поскольку $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z))$ постоянна для $z \in \mathbf{C}_p - I$, то свойства

1-4 следуют из леммы 3.3. Согласно пункту 5) леммы 3.3 для любого $\kappa \in J_s^q$, $0 \le s \le u$ при $\dim E(\mathcal{G}_\kappa(z_0)) = l+1$ существует $\lambda \in J_l(\mathcal{G}(z_0))$, $\mathrm{Im}\lambda \subset \mathrm{Im}\kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z_0)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z_0))$, и такое, что

$$\prod_{j=0}^{s} r_{\kappa(j)}(z)^{\omega(\kappa(j))} \le \prod_{j=0}^{l} r_{\lambda(j)}(z), \quad z \in \mathbf{C}_p - I.$$

Заметим, что $\tilde{g}_\lambda(z_0) \ne 0$. Следовательно, $\tilde{g}_\lambda \not\equiv 0$ и $\lambda \in J_l(\mathcal{G})$. Поэтому $\tilde{g}_\lambda(z) \ne 0$, поскольку $z \in \mathbf{C}_p - I$, и, следовательно, $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$.

Определим размерность $\Gamma(\mathcal{G})$ семейства $\mathcal{G}$ из

$$\Gamma(\mathcal{G})(z) = \inf_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \{\|g_{\lambda(0)}(z) \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}(z)\|\}.$$

Тогда $0 \le \Gamma(\mathcal{G}) \le 1$, а $\Gamma(\mathcal{G})(z) > 0$, если $z \in \mathbf{C}_p - I$.

Лемма 6.2. *Для $x \in \mathbf{P}(V)$, $0 < b \in \mathbf{R}$ определим*

$$\mathcal{G}(x,b,z) = \{j \in \mathbf{Z}[0,q] \mid \|x, g_j(z)\| < b\}.$$

Если $z \in \mathbf{C}_p - I$ и $0 < b \le \Gamma(\mathcal{G})(z)$, то $\#\mathcal{G}(x,b,z) \le u$.

Доказательство. Предположим, что $\#\mathcal{G}(x,b,z) \ge u+1$. Тогда существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ такое, что $\mathrm{Im}\lambda \subseteq \mathcal{G}(x,b,z)$. Следовательно

$$\|x, g_{\lambda(j)}(z)\| < b, \quad j = 0, ..., n.$$

Из леммы 3.2 следует

$$0 < \Gamma(\mathcal{G})(z) \le \|g_{\lambda(0)}(z) \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}(z)\| \le$$
$$\le \max_{0 \le j \le n} \|x, g_{\lambda(j)}(z)\| < b \le \Gamma(\mathcal{G})(z),$$

что невозможно.

Лемма 6.3. *Пусть $x \in \mathbf{P}(V)$ и $z \in \mathbf{C}_p - I$ такие, что $\|x, g_j(z)\| > 0$ для $j = 0, ..., q$. Тогда*

$$\prod_{j=0}^{q} \left(\frac{1}{\|x, g_j(z)\|}\right)^{\omega(j)} \le \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})(z)}\right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|}.$$

Доказательство. Возьмем $b = \Gamma(\mathcal{G})(z)$. Из леммы 6.2 имеем $\#\mathcal{G}(x,b,z) \le$ $\le u$. Поэтому существует $\kappa \in J_u^q$ такое, что $\mathcal{G}(x,b,z) \subset \mathrm{Im}\kappa$. Заметим, что

$E(\mathcal{G}_\kappa(z)) = V^*$. Согласно лемме 6.1 существует $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$, $\mathrm{Im}\lambda \subset \mathrm{Im}\kappa$ такое, что $E(\mathcal{G}_\lambda(z)) = E(\mathcal{G}_\kappa(z))$, и такое, что

$$\prod_{j=0}^{u}\left(\frac{1}{\|x, g_{\kappa(j)}(z)\|}\right)^{\omega(\kappa(j))} \leq \prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|} \leq$$
$$\leq \sum_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})}\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{\|x, g_{\lambda(j)}(z)\|}.$$

Положим $C = \mathbf{Z}[0,q] - \mathrm{Im}\kappa$. Тогда $\|x, g_j(z)\| \geq b$ для $j \in C$, и, следовательно

$$\prod_{j\in C}\left(\frac{1}{\|x, g_j(z)\|}\right)^{\omega(j)} \leq \prod_{j\in C}\frac{1}{\|x, g_j(z)\|} \leq$$
$$\leq \left(\frac{1}{b}\right)^{\#C} = \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})(z)}\right)^{q-u}.$$

Для $r > 0$ функция размерности $\Gamma_{\mathcal{G}}$ определяется из

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(r) = \inf_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})}\{\mu(r, g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)})\}.$$

Тогда

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(r) = \Gamma(\mathcal{G})(z) \leq 1.$$

Заметим, что

$$\prod_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})} \|g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}\| \leq \Gamma(\mathcal{G}).$$

Обычным методом можно показать, что

$$\prod_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})} \mu(r, g_{\lambda(0)} \wedge \cdots \wedge g_{\lambda(n)}) \leq \Gamma_{\mathcal{G}}(r) \quad (r > 0).$$

Замечая, что для $\lambda \in J_n(\mathcal{G})$ первая основная теорема имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} T(r, g_{\lambda(j)}) = N_{g_{\lambda(0)}\wedge\cdots\wedge g_{\lambda(n)}}(r) + m_{g_{\lambda(0)}\wedge\cdots\wedge g_{\lambda(n)}}(r) + O(1),$$

получаем

$$0 \leq -\log\Gamma_{\mathcal{G}}(r) \leq \sum_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})} m_{g_{\lambda(0)}\wedge\cdots\wedge g_{\lambda(n)}}(r) \leq$$
$$\leq \sum_{\lambda\in J_n(\mathcal{G})}\sum_{j=0}^{n} T(r, g_{\lambda(j)}) + O(1).$$

Теорема 6.1. *Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^{q}$ – конечное семейство p-адичных голоморфных кривых $g_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$ в u-подосновной позиции, $u \leq 2u - n \leq q$. Пусть*

$f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ - p-адичная голоморфная кривая, линейно невырождающаяся над $\mathcal{R}$. Предположим, что g_j растет медленнее f для $j = 0, ..., q$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{q} m_f(r, g_j) \leq (2u - n + 1 + \varepsilon)T(r, f),$$

для достаточно больших r.

Доказательство. Определим $b = \#J_n(\mathcal{G})$. Пусть ω – весовая функция Ночки, а θ – постоянная Ночки. Согласно лемме 7.2 Ру-Столла [15] $0 < m \in \mathbf{Z}$ можно выбрать так, что

$$1 \leq \frac{q(m+1)}{q(m)} < 1 + \frac{\varepsilon}{3n\theta}, \quad 0 \leq \frac{q(m) - q(m - s(j))}{q(m)} < \frac{\varepsilon}{3nb\theta}.$$

Тогда из леммы 6.3 имеем

$$\prod_{j=0}^{q} \left(\frac{1}{\|f, g_j\|}\right)^{\omega(j)} \leq \left(\frac{1}{\Gamma(\mathcal{G})}\right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\|f, g_{\lambda(j)}\|},$$

откуда следует, что

$$\prod_{j=0}^{q} \left(\frac{1}{\mu(r, f \angle g_j)}\right)^{\omega(j)} \leq \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)}\right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \prod_{j=0}^{n} \frac{1}{\mu(r, f \angle g_{\lambda(j)})} =$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)}\right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \Psi_\lambda(r) =$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma_{\mathcal{G}}(r)}\right)^{q-u} \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} (R_\lambda(r)\Xi(r))^{\frac{1}{q(m)}}.$$

Получаем

$$\sum_{j=0}^{q} \omega(j) m_f(r, g_j) \leq -(q-u) \log \Gamma_{\mathcal{G}}(r) + \frac{1}{q(m)}(\log \Xi(r) +$$

$$+ \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \log^+ R_\lambda(r)) + \frac{1}{q(m)} \log b \leq$$

$$\leq (q-u) \sum_{\lambda \in J_n(\mathcal{G})} \sum_{j=0}^{n} T(r, g_{\lambda(j)}) + \left(1 + n\frac{q(m+1)}{q(m)}\right) T(r, f) +$$

$$+ b \sum_{j=0}^{n} \frac{q(m) - q(m - s(j))}{q(m)} T(r, f) + o(T(r, f)) \leq$$

$$\leq \left(n + 1 + \frac{2\varepsilon}{3\theta}\right) T(r, f) + o(T(r, f)).$$

Используя свойства весов Ночки, имеем

$$\sum_{j=0}^{q} m_f(r, g_j) = \sum_{j=0}^{q} \theta\omega(j) m_f(r, g_j) + \sum_{j=0}^{q} (1 - \theta\omega(j)) m_f(r, g_j) \le$$
$$\le \theta(n+1)T(r, f) + \frac{2\varepsilon}{3} T(r, f) + o(T(r, f)) +$$
$$+ \left(1 + q - \theta \sum_{j=0}^{q} \omega(j)\right) T(r, f) + O(1) \le$$
$$\le \left(1 + q - \theta(\sum_{j=0}^{q} \omega(j) - n - 1)\right) T(r, f) + \varepsilon T(r, f) =$$
$$= (2u - n + 1 + \varepsilon) T(r, f),$$

для достаточно больших r.

Следствие 6.1. В условиях теоремы 6.1

$$\sum_{j=0}^{q} \delta_f(g_j) \le 2u - n + 1.$$

§7. p-АДИЧНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ КРИВЫЕ В ОСНОВНОЙ ПОЗИЦИИ

Продолжим изучение ситуации в §5. Предположим, что $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^{q}$ находится в основной позиции и f является k-плоским над $\mathcal{R}$, $0 \le k \le n \le q$ таким, что каждая пара (f, g_j) свободна для $j = 0, ..., q$. Согласно лемме 4.2 тогда существует базис $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n)$ пространства $V_{\mathcal{R}}$ над $\mathcal{R}$ с дуальным базисом $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$ таким, что для приведенного представления $\tilde{f} : \mathbf{C}_p \longrightarrow V$ имеем

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^{k} \langle \tilde{f}, \alpha_j \rangle \xi_j.$$

Более того, базис может быть выбран таким, чтобы $\alpha_j \in V^*$ для $j = 0, ..., k$ и

$$\langle \tilde{f}, \alpha_0 \rangle, ..., \langle \tilde{f}, \alpha_k \rangle$$

– p-адически голоморфны и линейно независимы над $\mathcal{R}$. Мы также имеем

$$\tilde{g}_j = \sum_{i=0}^{n} \langle \xi_i, \tilde{g}_j \rangle \alpha_i, \quad j = 0, ..., q.$$

Возьмем базис $\epsilon = (\epsilon_0, ..., \epsilon_n)$ пространства V^* с $\epsilon_j = \alpha_j$ для $j = 0, ..., k$. Пусть $e = (e_0, ..., e_n)$ – дуальный базис ϵ. Пусть W – векторное пространство с базисом

$e_0, \dots, e_k$ над $\mathbf{C}_p$. Тогда $\epsilon_0, \dots, \epsilon_k$ является базисом W^*. p-адичная голоморфная кривая $\hat{f} : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(W)$ определяется из представления

$$\tilde{\hat{f}} = \sum_{j=0}^{k} \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle e_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow W.$$

Поскольку $\langle \tilde{f}, \epsilon_0 \rangle, \dots, \langle \tilde{f}, \epsilon_k \rangle$ линейно независимы над $\mathcal{R}$, то отображение $\hat{f}$ линейно невырождающееся над $\mathcal{R}$. Заметим, что

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^{k} \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle \xi_j = \sum_{j=0}^{n} \langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle e_j .$$

Имеем

$$\|\tilde{\hat{f}}\| = \max_{0 \le j \le k} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p \le \max_{0 \le j \le n} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p = \|\tilde{f}\| \le$$
$$\le \max_{0 \le j \le k} |\langle \tilde{f}, \epsilon_j \rangle|_p \|\xi_j\| \le \|\tilde{\hat{f}}\| \max_{0 \le j \le k} \max_{0 \le i \le n} |\xi_{ji}|_p,$$

где

$$\xi_j = \sum_{i=0}^{n} \xi_{ji} e_i, \quad \xi_{ji} \in \mathcal{R}.$$

Следовательно

$$\mu(r, \tilde{\hat{f}}) \le \mu(r, \tilde{f}) \le \mu(r, \tilde{\hat{f}}) \max_{0 \le j \le k} \max_{0 \le i \le n} \mu(r, \xi_{ji}) \quad (r > 0).$$

Заметим, что $\tilde{f} \neq 0$. Имеем

$$N_{\hat{f}}(r) = N(r, \tilde{\hat{f}} = 0) \le \sum_{j=0}^{k} N(r, \xi_j = \infty) \le \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{n} N(r, \xi_{ji}) = o(T(r, f)).$$

Следовательно, получаем

$$T(r, \hat{f}) + O(1) \le T(r, f) \le T(r, \hat{f}) + o(T(r, f)). \tag{9}$$

Замечание 7.1. Если $k = 0$, то $T(r, \hat{f})$ - постоянная, и неравенство (9) невозможно. Поэтому $k \ge 1$.

p-адичные голоморфные кривые $\hat{g}_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(W^*)$ также определяются из представлений

$$\tilde{\hat{g}}_j = \sum_{i=0}^{k} \langle \xi_i, \tilde{g}_j \rangle \epsilon_i : \mathbf{C}_p \longrightarrow W^*, \quad j = 0, \dots, q.$$

Заметим, что $\tilde{\tilde{g}}_j \not\equiv 0$, поскольку пара (f, g_j) свободна. Очевидно, каждое $\hat{g}_j$ определено над $\mathcal{R}$, и, следовательно

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,\hat{g}_j)}{T(r,f)} = 0, \quad j = 0, ..., q.$$

Отсюда получим

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,\hat{g}_j)}{T(r,\hat{f})} = 0, \quad j = 0, ..., q.$$

Лемма 7.1. *Семейство $\hat{\mathcal{G}} = \{\hat{g}_j\}_{j=0}^q$ находится в n-подосновной позиции.*

Доказательство. Возьмем $\kappa \in J_n^q$. Тогда $\tilde{g}_\kappa \not\equiv 0$, и, следовательно

$$\det(\langle \xi_i, \tilde{g}_{\kappa(j)}\rangle) \not\equiv 0 \quad (0 \le i, j \le n).$$

Поэтому существует $\lambda \in J_k^q$, $\mathrm{Im}\lambda \subseteq \mathrm{Im}\kappa$ такое, что

$$\det(\langle \xi_s, \tilde{g}_{\lambda(t)}\rangle) \not\equiv 0 \quad (0 \le s, t \le k).$$

Имеем

$$\tilde{\tilde{g}}_\lambda = \det(\langle \xi_s, \tilde{g}_{\lambda(t)}\rangle)\epsilon_0 \wedge \cdots \wedge \epsilon_k \not\equiv 0.$$

Поэтому $\lambda \in J_k(\hat{\mathcal{G}})$ и, следовательно, $\hat{\mathcal{G}}$ находится в n-подосновной позиции.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=0}^q$ – конечное семейство p-адичных голоморфных кривых $g_j : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V^*)$ в подосновной позиции, $q \ge n$. Возьмем целое k, $1 \le k \le n$. Пусть $f : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathbf{P}(V)$ – p-адичная голоморфная кривая, являющаяся k-плоской над $\mathcal{R}$, так что каждая пара (f, g_j) свободна для всех $j = 0, ..., q$. Предположим, что g_j растет медленнее f для каждого j. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{q}\delta_f(g_j) \le 2n - k + 1.$$

Доказательство. Из следствия 6.1 имеем

$$\sum_{j=0}^{q}\delta_{\hat{f}}(\hat{g}_j) \le 2n - k + 1.$$

Заметим, что

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g}_j\rangle = \sum_{i=0}^{n}\langle \tilde{f}, \alpha_i\rangle\langle \xi_i, \tilde{g}_j\rangle = \sum_{i=0}^{k}\langle \tilde{f}, \epsilon_i\rangle\langle \xi_i, \tilde{g}_j\rangle = \langle \tilde{\hat{f}}, \tilde{\hat{g}}_j\rangle.$$

Пусть $\tilde{\vec{f}}$ и $\tilde{\vec{g}}_j$ – приведенные представления $\tilde{f}$ и $\tilde{g}_j$, соответственно. Тогда существуют p-адичная голоморфная функция $h \not\equiv 0$ и p-адичные мероморфные функции $w_j \not\equiv 0$ такие, что $\tilde{\tilde{f}} = h\vec{f}$ и $\tilde{\tilde{g}}_j = w_j\vec{g}_j$. Получаем

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g}_j \rangle = hw_j \langle \vec{f}, \vec{g}_j \rangle.$$

Следовательно

$$N_f(r, g_j) - N_{\tilde{f}}(r, \tilde{g}_j) = N(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{w_j}) - N(r, w_j).$$

Возьмем приведенное представление $\tilde{\xi}_i$ мероморфной p-адичной голоморфной кривой

$$x_i = \mathrm{P} \circ \xi_i : \mathbf{C}_p \longrightarrow \mathrm{P}(V).$$

Тогда существует p-адичная мероморфная функция $h_i \not\equiv 0$ такая, что $\xi_i = h_i\tilde{\xi}_i$. Очевидно

$$N(r, \frac{1}{h_i}) \le \sum_{k=0}^{n} N(r, \frac{1}{\xi_{ik}}) = o(T(r, f)),$$

$$N(r, h_i) \le \sum_{k=0}^{n} N(r, \xi_{ik}) = o(T(r, f)).$$

Заметим, что

$$w_j \vec{g}_j = \tilde{\tilde{g}}_j = \sum_{i=0}^{k} h_i \langle \tilde{\xi}_i, \tilde{g}_j \rangle \epsilon_i \not\equiv 0.$$

Возьмем некоторое $i \in \mathbf{Z}[0, k]$ такое, что p-адичная голоморфная функция $\langle \tilde{\xi}_i, \tilde{g}_j \rangle \not\equiv 0$. Тогда

$$N(r, \frac{1}{w_j}) \le N(r, \frac{1}{h_i}) + N_{x_i}(r, g_j) = o(T(r, f)),$$

$$N(r, w_j) \le \sum_{i=0}^{k} N(r, h_i) = o(T(r, f)).$$

Заметим, что

$$N(r, \frac{1}{h}) = N_{\tilde{f}}(r) = o(T(r, f)).$$

Получим

$$N_f(r, g_j) - N_{\tilde{f}}(r, \tilde{g}_j) = o(T(r, f)),$$

откуда легко вывести равенство

$$\delta_f(g_j) = \delta_{\tilde{f}}(\tilde{g}_j).$$

Теорема доказана.

ABSTRACT. **The paper considers the Nevanlinna theory of p-adic holomorphic curves and proves p-adic analogous of Nochka and Ru-Stoll's theorems for the Cartan conjecture of defect relations.**

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Boutabaa, "Applications de la théorie de Nevanlinna p-adic", Collect. Math., vol. 42, pp. 75 — 93, 1991.
2. H. Cartan, "Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données", Mathematica (cluj) vol. 7, pp. 80 — 103, 1933.
3. W. Chen, "Cartan's conjecture : defect relations for meromorphic maps from parabolic manifold to projective space", University of Notre Dame Thesis, 1987.
4. W. Cherry, Zh. Ye, "Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem", Preprint.
5. P. C. Hu, C. C. Yang, "Value distribution theory of p-adic meromorphic functions", Preprint.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "A unique range set of p-adic meromorphic functions with 10 elements", Preprint.
7. Hà Huy Khóai, "On p-adic meromorphic functions", Duke Math. J., vol. 50, pp. 695 — 711, 1983.
8. Hà Huy Khóai, "Heights for p-adic holomorphic functions of several variables", Max-Planck Institut Für Mathematik, pp. 89 — 83, 1989.
9. Hà Huy Khóai, M. V. Quang, "On p-adic Nevanlinna theory", Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, vol. 1351, pp. 146 — 158, 1988.
10. Hà Huy Khóai, M. V. Tu, "p-adic Nevanlinna-Cartan theorem", International J. of Math., vol. 6, pp. 719 — 731, 1995.
11. R. Nevanlinna, Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions Meromorphes, Gauthier Villars, Paris, 1929; Reprint, Chelsea, New York, 1974.
12. E. I. Nochka, "Defect relations for meromorphic curves", Izv. Akad. Nauk. Moldav. SSR, Ser. Fiz.-Tek. Mat. Nauk, vol. 1, pp. 41 — 47, 1982.
13. E. I. Nochka, "On a theorem from linear algebra", Izv. Akad. Nauk. Moldav. SSR, Ser. Fiz.-Tek. Mat. Nauk, vol. 3, pp. 29 — 33, 1982.
14. E. I. Nochka, "On the theory of meromorphic curves", Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 269, pp. 377 — 381, 1983.
15. M. Ru, W. Stoll, "The second main theorem for moving targets", J. of Geom. Analysis, vol. 1, pp. 99 — 138, 1991.
16. M. Ru, W. Stoll, "The Cartan conjecture for moving targets", Proc. of Symposia in Pure Math., vol. 52, Part 2, pp. 477 — 508, 1991.
17. M. Ru, P. Vojta, "Schmidt's subspace theorem with moving targets", Invention Math., vol. 127, pp. 51 — 65, 1997.
18. M. Ru, P. M. Wong, "Integral points of $\mathrm{P}^n - \{2n+1$ hyperplanes in general position $\}$", Preprint.
19. M. Shirosaki, "Another proof of the defect relation for moving targets", Tôhoku Math. J., vol. 43, pp. 355 — 360, 1991.

20. N. Steinmetz, "Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes", J. Reine Angew. Math., vol. 368, pp. 134 — 141, 1986.
21. W. Stoll, "An extension of the theorem of Steinmetz-Nevanlinna to holomorphic curves", Math. Ann., vol. 282, pp. 185 — 222, 1988.
22. W. Stoll, "Value distribution theory for meromorphic maps", Aspects of Math. E7, Vieweg, 1985.
23. P. Vojta, "Diophantine approximation and value distribution theory", Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, vol. 1239, 1987.
24. P. Vojta, "Roth's theorem with moving targets", International Math. Research Notices, pp. 109 — 114, 1996.

12 июня 1997

Кафедра математики
Шандонгский университет 250100,
Шандонг, НР Китай

Кафедра математики
Гонк Конгский университет Науки и Технологии
Гонк Конг