НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ СЕМИНАРА ПО ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЙ ГОНК КОНГ, ИЮЛЬ 1996

Под редакцией А. Ф. Беардона и Ч.-Ч. Янга

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 4, 1997

Темы и статьи :

Комплексная динамика : А. Ф. Беардон, Х. Г. Хуа, Х. Крайет
Комплексные линейные дифференциальные уравнения : С. П. Уанг
Искривления в некоторых комплексных переменных : В. Черри
Динамика в многомерных пространствах : П. К. Ху и Ч.-Ч. Янг
Теория факторизации : Ч.-Ч. Янг
Рост и распределение нулей : У. Бергвейлер
Теория Неванлинны : У. Бергвейлер
Метод Ньютона : Х. Крайет
Распределение значений случайных рядов : Д. К. Сан
Г-линии и теория распределения значений : Г. Барсегян

§1. ЗАДАЧИ Г. БАРСЕГЯНА (barseg@instmath.sci.am)

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

В последние годы объектами интенсивного изучения стали Г-линии и множества уровней. Мы пришли к новой стадии исследования мероморфных функций : в противоположность теории Неванлинны, описывающей число a-точек, теперь основное внимание уделяется изучению расположений a-точек. Оказывается, что в подобных исследованиях Г-линии играют важную роль. Ниже мы представим некоторые нерешенные задачи и темы для лучшего понимания распределений Г-линий и расположения a-точек. Прежде чем приступить к ним, мы представим контуры необходимых теоретических предпосылок.

Распределения Г-линий мероморфных и квазиконформных отображений, взаиморасположения a-точек. Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в заданной области D, и пусть Γ – гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости. Прообразы $w^{-1}(\Gamma)\cap D$ называются Γ-линиями (точно так же, как прообразы $w^{-1}(a)\cap D$ называются a-точками). Оценки сверху для длин $L(D,\Gamma)$ Γ-линий мероморфных функций в $\mathbf{C}$ и в произвольных областях D с кусочно–гладкой границей впервые были даны в работах автора [3] – [5]. Мы дадим упрощенную версию основного метода оценки $L(D,\Gamma)$, который называем ***принципом вариации касательной*** (см. [5] и [6]). Допустим, что

$$\nu(\Gamma) = \operatorname{Var}_{z\in\Gamma} \alpha_\Gamma(z) < \infty, \tag{1.1}$$

где $\alpha_\Gamma(z)$ – угол между касательной к Γ в $z \in \Gamma$ и вещественной осью ; очевидно, в некотором смысле, $\nu(\Gamma)$ характеризует "кривизну" линий Γ. Далее

$$L(D,\Gamma) \le K(\Gamma)\cdot\left(\iint\limits_D \left|\frac{w''(z)}{w'(z)}\right| d\sigma + l(D)\right), \tag{1.2}$$

где $K(\Gamma)$ – постоянная $< \infty$, зависящая только от Γ, а $l(D)$ – длина границы области D. В теории Γ-линий мероморфных функций в комплексной плоскости и в единичном круге существует теорема, аналогичная второй основной теореме Р. Неванлинны. Именно, для кривых Γ_ν, $\nu = 1,\dots,q$, без общих точек и удовлетворяющих формуле (1.1), справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{q} L(D(r),\Gamma_\nu) \le KA(r), \tag{1.3}$$

где $D(r) = \{z : |z| < r\}$, K – абсолютная константа, $A(r)$ – сферическая характеристическая функция и $r = r_n \to \infty$. Позже Γ-линии взаимно однозначных конформных отображений в единичном круге были рассмотрены во многих работах, начиная с хорошо известной статьи [19] У. К. Хеймана и Дж. М. Ву ; отметим также статьи Й. Гарнета, Ф. Геринга и П. Джонса [18] ; Дж. Фернандеса и Д. Гамильтона [14] ; Дж. Фернандеса и М. Цинмейстера [15] ; Дж. Фернандеса, Дж. Хейнонена и О. Мартио [16] ; Дж. Фернандеса [17] ; К. Бишопа, Л. Карлсона, Дж. Гарнета и П. Джонса [12] ; К. Бишопа, П. Джонса [13] ; Й. Вайсалы [21] ; К. Ойма [20] ; К. Асталы, Дж. Фернандеса и С. Роде [1] ; о квазирегулярных взаимно однозначных отображениях см. работу [21].

Интерес к Г-линиям обусловлен некоторыми важными обстоятельствами, среди которых отметим следующие.

Из первой и второй основных теорем Р. Неванлинны следует

$$\sum_{\nu=1}^{q} |N(r,a_\nu) - N(r,b_\nu)| \le 2T(r) + o(T(r)), \quad r = r_n \to \infty, \tag{1.4}$$

где a_ν и b_ν попарно различны. Назовем

$$B(r,a_\nu,b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{q} |\mathcal{N}(r,a_\nu) - \mathcal{N}(r,b_\nu)|$$

разностью Неванлинны, где

$$\mathcal{N}(r,w) = \int_0^r n(t,w)\,dt,$$

а $n(r,w)$ – обычное число w-точек в круге $|z| \le r$ с учетом кратностей.

Легко показать, что (см. Барсегян [7], [8])

$$\sum_{\nu=1}^{q} \big(C(r,a_\nu,b_\nu) + B(r,a_\nu,b_\nu)\big) \le L(r,\Gamma), \tag{1.5}$$

где a_ν и b_ν лежат на кривой Γ, а $C(r,a_\nu,b_\nu)$ отражает близость a_ν и b_ν-точек (которые мы обозначим через $z_i(a_\nu)$ и $z_i(b_\nu)$, соответственно), которая выглядит примерно как $\sum |z_i(a_\nu) - z_i(b_\nu)|$. Таким образом, изучение Г-линий приводит к новому подходу для вывода неравенств вида (1.4).

Теория Неванлинны неприменима к мероморфным функциям с "медленным ростом", определенным в единичном круге. Используя неравенство (1.5), мы получаем результат, напоминающий вторую основную теорему Р. Неванлинны для произвольных функций, мероморфных в $\mathbf{C}$ (см. [8]).

Пусть γ_ν и τ_ν, $\nu = 1, ..., n$, – два набора множеств таких, что

1) для любого $\nu = 1, ..., n$ кривые γ_ν и τ_ν являются непрерывными;

2) для любого $\nu = 1, ..., n$, множество γ_ν пересекается с каждой окружностью $\Gamma(R) = \{w : |w| = R\}$ в одной только точке (которую обозначим через $a_\nu(R)$), а множество τ_ν пересекается с каждой окружностью $\Gamma(R)$ также в одной точке (которую обозначим через $b_\nu(R)$);

3) для любого R точки $a_\nu(R)$ и $b_\nu(R)$ на $\Gamma(R)$ расположены в порядке возрастания аргумента : $a_1(R), b_1(R), a_2(R), b_2(R), \ldots, a_n(R), b_n(R), a_1(R)$.

Применяя неравенство (1.5) к случаю, когда $w(z)$, $\Gamma = \Gamma(R)$ и $a_\nu = a_\nu(R)$, $b_\nu = b_\nu(R)$, $\nu = 1, ..., n$, получаем следующий результат.

Интегрированное фундаментальное неравенство : для любой мероморфной функции $w(z)$ в единичном круге и любой положительной функции $\psi(R)$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^\infty \frac{C(r,a_\nu(R),b_\nu(R))}{\psi(R)}\,dR+\sum_{\nu=1}^{q}\int_0^\infty \frac{B(r,a_\nu(R),b_\nu(R))}{\psi(R)}\,dR \le \iint\limits_{D(r)} \frac{|w'(z)|}{\psi(|w(z)|)}\,d\sigma. \tag{1.6}$$

Легко можно найти связь между правой частью формулы (1.6) и интегралами, характеризующими классы функций в единичном круге (см. Барсегян [6], [8]). Поэтому, изучение Г-линий приводит к результату, аналогичному второй основной теореме, справедливой для всех мероморфных функций в единичном круге.

Благодаря присутствию величин $C(r,a_\nu,b_\nu)$ формула (1.5) описывает взаимные расположения $a_\nu(R)$ и $b_\nu(R)$-точек. Таким образом, изучение Г-линий ведет к описанию взаимных расположений a-точек. Такой подход является версией "свойства близости a-точек" (см. Барсегян [9], [10]), или "принципа разбиения мероморфных функций" (см. [11]).

Область исследования 1. Оценить сверху $L(D(r),\Gamma)$ и $\sum\limits_{\nu=1}^{q} L(D(r),\Gamma_\nu)$ для широкого класса кривых и функций $w(z)$, принадлежащих известным классам аналитических и мероморфных функций в единичном круге (таких, как классы ограниченных функций, H^p, Дирихле и т.д.) в терминах характеристик этих классов. Из вышеотмеченного следует, что такие оценки могут применяться в изучении утверждений, аналогичных второй фундаментальной теореме Р. Неванлинны и свойству близости для изучаемых классов функций.

Другой класс задач, касающийся Г-линий, связан с K-квазиконформными и квазирегулярными функциями $f(z)$ в комплексной области или с функциями $f(\overline{x})$, отображающими области из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. В качестве G-линий здесь мы можем рассматривать кривые Γ в $\mathbb{R}^n$, а также прообразы заданных поверхностей G в $\mathbb{R}^n$, которые назовем G-поверхностями. В последнем случае будем рассматривать площади $S(r,G)$ множеств $f^{-1}(G)$, лежащих в $\{|\overline{x}|<r\}$.

Область исследования 2. Оценить сверху выражение $\sum\limits_{\nu=1}^{q} L(D(r),\Gamma_\nu)$ для квазирегулярных и K-квазиконформных функций в $\mathbf{C}$ и оценить $\sum\limits_{\nu=1}^{q} L(r,\Gamma_\nu)$

и $\sum_{\nu=1}^{q} S(r, G_\nu)$ для широкого класса кривых Γ и поверхностей G в случае K–квазиконформных и квазирегулярных функций в $\mathbb{R}^n$.

В частном случае квазиконформных взаимно однозначных отображений в статье Вайсалы [1] даны оценки для $L(D(r), \Gamma)$; а в случае "угловых-квазиконформных" отображений в $\mathbb{C}$ (см. [5], [6]) даны оценки для $L(D(r), \Gamma_\nu)$ и $L(D(r), \Gamma)$; в случае же "угловых-квазиконформных" отображений в $\mathbb{R}^3$ оценки для $S(r, G)$ даны в работе В. Авакяна, Г. Барсегяна и М. Караханяна [2]. Эти результаты приводят к описанию числа a-точек отмеченных функций, а также взаимных расположений для различных значений a.

Теория Р. Неванлинны для квазирегулярных функций возникла в последние годы благодаря усилиям С. Рикмана, Й. Вайсалы и других, при помощи описания взаимных расположений a-точек.

Следующий класс задач касается обобщения концепции множества уровней функций $v(x, y) = \operatorname{Im} w(z)$, где $w(z) = v(x, y) + iu(x, y)$, которые являются Γ-линиями, когда $\Gamma = \{w : \operatorname{Im} w - T = 0\}$, где T – константа или, что то же самое, решениями уравнения

$$v(x, y) - T = 0. \tag{1.7}$$

Рассмотрим уравнение

$$F = 0, \tag{1.8}$$

где F – функция, зависящая от x, y, u, v и некоторых последующих смешанных производных функций u и v, которые определены посредством $w = u + iv$, где w – комплексное отображение, определенное в области D. Обозначим через $L_F(D)$ длины кривых в D, для которых справедлива формула (1.7) (если таковые есть для заданных F и w).

Область исследования 3. Оценить сверху $L_F(D)$ и $\sum_{\nu=1}^{q} L_{F_\nu}(D)$ для некоторых классов функций F_ν (например, линейных по u и v) и для $w(z)$, принадлежащих известным классам аналитических и мероморфных функций в области D.

Пусть $u(x, y)$ – решение уравнения Лапласа в области D (либо решение уравнения Пуассона, или более общего эллиптического уравнения) с граничным условием $u(x, y) = f(x, y)$, когда (x, y) принадлежит границе D.

Область исследования 4. Оценить сверху $\sum\limits_{\nu=1}^{q} L_{F_\nu}(D)$, где $F_\nu = u - T_\nu$, а T_ν – заданные постоянные в терминах вышеуказанных граничных условий.

Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbf{C}$ или в единичнок круге, $\Gamma(R)$ – окружность $\{w : |w| = R\}$, и пусть $\alpha(Re^{i\vartheta})$ – угол, образуемый касательной к одной из заданных $\Gamma(R)$-линий в заданном круге, взятой в точке $w^{-1}(Re^{i\vartheta})$. Пусть

$$\mathbf{C}(\Gamma(R)) = \sum \mathrm{Var}_{\vartheta=0}^{2\pi} \alpha(Re^{i\vartheta}),$$

где суммирование проводится по всем $\Gamma(R)$-линиям. Величина $\mathbf{C}(\Gamma(R))$ отражает "кривизну" всех $\Gamma(R)$-линий.

Область исследования 5. Оценить сверху $\mathbf{C}(\Gamma(R))$ и

$$\int_0^\infty \frac{\mathbf{C}(\Gamma(R))}{\psi(R)}\, dR$$

с положительными функциями $\psi(R)$ для различных классов мероморфных функций в $\mathbf{C}$ и в единичном круге. Аналогичную задачу можно поставить для угловых–квазиконформных, K–квазиконформных и квазирегулярных функций.

Можно ожидать интересные результаты для "кривизны" $\Gamma(R)$-линий. Многие технические применения теории потенциала, полученные в последние годы, касаются "кривизны" $\Gamma(R)$-линий, однако в них используются более сложные аспекты теории.

Область исследования 6. Было бы интересно установить аналог теории распределения Г-линий в случае функций нескольких комплексных переменных, отображающих $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, и рассмотреть вышеуказанные задачи для этих функций.

Оценки сверху для длин кривых приводят (см. (1.5)) к описанию взаимных расположений a-точек в случае мероморфных функций в комплексной плоскости и в единичном круге.

Область исследования 7. Построить теорию взаимных расположений a-точек для угловых–квазиконформных, K–квазиконформных и квазирегулярных функций в комплексной плоскости, в единичном круге и в $\mathbb{R}^n$.

Область исследования 8. Построение теории взаимных расположений a-точек для функций нескольких комплексных переменных, отображающих $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Astala, J. Fernandes, S. Ronde, "Quasilines and Hayman-Wu theorem", Indiana University Math. Journal, vol. 42, pp. 1078 – 1100, 1993.
2. В. Авакян, Г. Барсегян, М. Караханян, "Пространственно-обобщенные квазиконформные отображения", АРМНИИНТИ, т. 5, стр. 1 – 35, 1993.
3. Г. А. Барсегян, "О распределении разрывов при отображениях мероморфными функциями", Докл. Акад. Наук СССР, т. 237, стр. 1009 – 1011, 1977.
4. Г. А. Барсегян, "Новые результаты в теории мероморфных функций", Докл. АН СССР, т. 238, стр. 777 – 780, 1978.
5. Г. А. Барсегян, "О Геометрии мероморфных функций", Матем. Сборн., т. 114(156), стр. 179 – 226, 1980.
6. Г. А. Барсегян, "Касательный вариационный принцип в комплексном анализе", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 3, стр. 37 – 60, 1992.
7. G. A. Barsegian, "Principle of closeness of sufficiently large sets of a-points of meromorphic functions", Hokkaido Math. Journal, vol. 26, pp. 451 – 456, 1997.
8. Г. А. Барсегян, Геометрическая теория мероморфных функций (рукопись).
9. Г. А. Барсегян, "Свойство близости a-точек мероморфных функций", Мат. Сборник, т. 120(162), № 1, стр. 42 – 63, 1983.
10. Г. А. Барсегян, "Свойство близости мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей", Изв. Ан АрмССР, Математика, т. 20, № 5,6, стр. 375 – 425, 1985.
11. G. A. Barsegian, "Principle of partitioning of meromorphic functions", Math. Montisnigri, vol. 5, pp. 18 – 26, 1995.
12. C. Bishop, L. Carleson, J. Garnet, P. Jones, "Harmonic measures supported on curves", Pacif. Journal Math., vol. 138, pp. 233 – 236, 1989.
13. C. Bishop, P. Jones, "Harmonic measure and arclength", Ann. Math., vol. 132, pp. 511 – 547, 1990.
14. J. Fernandes, D. Hamilton, "Length of curves under conformal mappings", Comm. Math. Helv., vol. 62, pp. 122 – 134, 1987.
15. J. Fernandes, M. Zinsmeister, "Ensembles de niveau des representations conformes", C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 305, no. 1, pp. 449 – 452, 1987.
16. J. Fernandes, J. Heinonen, O. Martio, "Quasilines and conformal mappings", Journal d'Analyse Math., vol. 52, pp. 117 – 132, 1989.
17. J. Fernandes, "Domains with strong barrier", Monatshefte Math., vol. 5, pp. 47 – 65, 1989.
18. J. Garnet, F. Gehring, P. Jones, "Conformally invariant length sums", Indiana Univ. Math. Journal, vol. 32, pp. 809 – 829, 1983.
19. W. Hayman, J-M. Wu, "Level of sets of univalent functions", Comm. Math. Helv., vol. 56, pp. 366 – 403, 1981.
20. K. O'yma, "Harmonic measure and conformal length", Proc. Amer. Math., Soc., vol. 115, pp. 687 – 689, 1992.
21. J. Vaisala, "Bounded turning and quasiconformal mappings", Monatshefte Math., vol. 11, pp. 233 – 244, 1991.

§2. ЗАДАЧИ А. Ф. БЕАРДОНА (afb@dpmms.cam.ac.uk)

Пусть f – аналитическое отображение открытго единичного круга D в себя, и пусть $|f'| < 1$ в D (так что f является евклидовым сжатием D). Легко видеть, что евклидов диаметр $\mathrm{diam}[f^n(\mathrm{D})]$ стремится к нулю при $n \to \infty$, где f^n означает n-ую итерацию f (см. [1]). Известно, что для всех таких f

$$\mathrm{diam}\,[f^n(\mathrm{D})] = O(1/\sqrt{n}),$$

и существуют примеры, в которых

$$\mathrm{diam}\,[f^n(\mathrm{D})] \geq c/n$$

для некоторой постоянной c.

Задача 1. Правда ли, что для всех f

$$diam\,[f^n(\mathrm{D})] = O(1/n),$$

и если нет, то для каких классов областей можно доказать подобный результат?

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Beardon, "Analytic contractions of the unit disc", Bull. Hong Kong Math. Soc, vol. 1, 1997.

§3. ЗАДАЧИ ВАЛЬТЕРА БЕРГВЕЙЛЕРА

(bergweiler@math.uni-kiel.de)

Задача 1. Пусть f – целая функция порядка ρ. Обозначим через $T(r, f)$ ее характеристику Неванлинны, а через $M(r, f)$ – ее максимальный модуль. Согласно предложению Пели, впервые доказанному Говоровым [Функц. Анал. и Прил. т. 3, стр. 41 – 45, 1969], если $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$, то

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f)}{T(r, f)} \leq \pi\rho. \tag{3.1}$$

Правую часть можно заменить на π, если $\Delta = \sum_{a\in\mathbb{C}} \delta(a, f) = 1$, где $\delta(a, f)$ означает дефект Неванлинны. Это следует из результатов Петренко [Мат. СССР, Изв. т.

3, стр. 391 - 432, 1969]. Если $\Delta = 1$, то, как доказано Цангом и Хуангом [J. Shanghai Norm. Univ., Nat. Sci. Ed., no. 2, pp. 36 – 39, 1980], имеем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)} = \pi.$$

Улучшения оценки (3.1) можно получить из результатов Петренко, если Δ достаточно близка к 1. Какой является точная оценка сверху для

$$\liminf_{r\to\infty} \log M(r,f)/T(r,f)$$

в терминах ρ и Δ, если $0 < \Delta < 1$?

Задача 2. Пусть (z_j) – последовательность комплексных чисел, стремящаяся к ∞. Обозначим через $n(r)$ количество z_j, удовлетворяющих неравенству $|z_j| \leq r$. Предположим, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = \infty.$$

(Или, эквивалентно, $\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^{-p} = \infty$ для всех $p > 0$.) Существует ли целая функция f, нулями которой являются z_j и

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{n(r)} < \infty?$$

Пусть

$$\mu = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log n(r)}{\log\log r}. \tag{2}$$

Тогда $\mu \geq 1$. Было показано [J. Reine Angew. Math., vol. 430, pp. 85 – 107, 1992], что такая целая функция существует, если $1 < \mu \leq \infty$. Таким образом, только случай $\mu = 1$ остается нерешенным. Я предполагаю, что целая f с выше перечисленными свойствами не может существовать, если $\mu = 1$.

Можно также поставить вопрос о нахождении наилучшей оценки для $\liminf_{r\to\infty} \log M(r,f)/n(r)$ в терминах μ. Другими словами, определить

$$L(\mu) = \sup_{(z_j)} \inf_{f} \liminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r,f)}{n(r)},$$

где (z_j) пробегает по всем последовательностям, которые удовлетворяют формуле (2), а f – по всем целым функциям с нулями (z_j). Оценки сверху и снизу для $L(\mu)$ получены в процитированной работе. Ответ на первый вопрос будет положительным, если $L(1) < \infty$. Поведение $L(\mu)$ при $\mu \to \infty$ также неизвестно. Имеем ли мы $L(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$ и $L(\infty) = 0$?

Задача 3. Пусть f – трансцедентная мероморфная функция. Еременко и автор [Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 11, pp. 355 – 373, 1995], Чен и Фанг [Adv. Math., Beijing, vol. 24, pp. 93 – 94, 1995], а также Зальцман [неопубликовано] доказали, что $f'f - 1$ имеет бесконечно много нулей. Всегда ли дефект Неванлинны удовлетворяет неравенству $\delta(1, f'f) < 1$? Если так, то какой является наилучшая оценка сверху для $\delta(1, f'f)$?

Задача 4. Пусть P – непостоянный многочлен, и пусть f – трансцедентная мероморфная функция. Имеет ли $P(f)f' - 1$ бесконечно много нулей? Для целой f это доказал Мюес [Arch. Math., vol. 32, pp. 55 – 67, 1979], а для f конечного порядка – автор и Еременко.

§4. ЗАДАЧИ ВИЛЯМА ЧЕРРИ (cherry@math.tu-berlin.de)

Пусть $\mathbf{D}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, и пусть $\mathbb{P}^n$ – комплексное проективное пространство размерности n. Пусть $Z_0, \ldots, Z_n$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^n$. *Формой Фубини-Штуди* ω_{FS} на $\mathbb{P}^n$ назовем

$$\omega_{FS} = \frac{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} Z_j\overline{Z}_j\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{n} dZ_j \wedge d\overline{Z}_j\right) - \sum\limits_{i,j=0}^{n} \overline{Z}_i Z_j dZ_i \wedge d\overline{Z}_j}{\left(\sum\limits_{j=0}^{n} Z_j\overline{Z_j}\right)^2}.$$

При $n = 1$ форма Фубини-Штуди ω_{FS} приводится к форме сферической площади на римановой сфере (если риманова сфера имеет радиус 1/2 в $\mathbb{R}^3$). Если f – голоморфное отображение из $\mathbf{D}$ в $\mathbb{P}^n$, то $f^*\omega_{FS}$ является формой псевдоплощади на $\mathbf{D}$. Это означает, что

$$f^*\omega_{FS} = \rho(z)\, dz \wedge d\bar{z},$$

где z – комплексная координата на $\mathbf{D}$, а ρ – неотрицательная функция. Определим

$$f^\dagger(z) = \sqrt{\rho(z)}.$$

Величина $f^\dagger(z)$ показывает насколько f инфинитезимально искривляет длину в z, где длина на $\mathbf{D}$ берется относительно евклидовой метрики, а длина на

$\mathbb{P}^n$ берется относительно метрики, получающейся из формы Фубини-Штуди. Заметим, что при $n = 1$ имеем

$$f^{\mathfrak{l}}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2},$$

которая известна под названием сферической проиводной и, поэтому, мы выбрали такое обозначение.

Говорят, что набор $H_1, \ldots, H_q$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$ находится *в основной позиции*, если для любого подмножетва $\{H_j\}$ с кардинальностью $\leq n + 1$ линейные формы, определяющие гиперплоскости в этом подмножестве, линейно независимы. (При $n = 1$ гиперплоскости являются простыми точками на римановой сфере, а находиться в основной позиции означает, что эти точки различны). Теперь мы можем сформулировать следующее.

Теорема. *Пусть n – положительное целое число, и пусть $q \geq 2n + 1$. Пусть $H_1, \ldots, H_q$ – q гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$, находящиеся в основной позиции. Пусть $\Omega = \mathbb{P}^n \setminus \{H_1 \cup \cdots \cup H_q\}$. Тогда*

$$\sup\{f^{\mathfrak{l}}(0): \quad f : \mathrm{D} \longmapsto \Omega, \ f \text{ – голоморфна } \} < \infty.$$

Теорема состоит из двух составляющих. Первая утверждает, что дополнение $2n + 1$ гиперплоскостей в основной позиции в $\mathbb{P}^n$ располагается гиперболически в $\mathbb{P}^n$. Этот результат в сочетании с леммой Броди о параметризации дает конечную верхнюю оценку производной Фубини-Штуди в нулевой точке $f^{\mathfrak{l}}(0)$. Подробности см., например, в книге Ланги [2] (теоремы VII.2.5 и III.1.4.). Мы приходим к следующему вопросу : можно ли найти явную оценку сверху ?

Задача. Пусть n, q, H_j и Ω определяются из теоремы. Найти явную оценку сверху M такую, что если f – голоморфное отображение из D в Ω, то

$$f^{\mathfrak{l}}(0) \leq M.$$

Отметим, что M будет зависеть от гиперплоскостей H_j.

Отметим, что оценка сверху для $f^{\mathfrak{l}}(0)$ дает оценку снизу для касательных векторов, измеренных по метрике Кобаяши на Ω. Таким образом, задача сводится к нахождению явной оценки снизу для длины по метрике Кобаяши на Ω всех касательных векторов, имеющих длину 1 по метрике Фубини-Штуди.

При $n = 1$, т.е. когда f – мероморфная функция, опускающая по крайней мере три значения, можно найти явную оценку сверху для $f'(0)$. Для этого нужно построить явную форму сингулярной площади с отрицательной кривизной на римановой сфере и затем использовать лемму Альфорса-Шварца. Другим способом является использование второй основной теоремы Неванлинны с явным остаточным членом. В обоих случаях можно получить явную оценку, зависящую толко от (сферических) расстояний между опущенными точками – чем меньше расстояния между точками, тем больше оценка для сферической производной.

В многомерном случае построение явной сингулярной формы $(1,1)$ на $\mathbb{P}^n$, с отрицательной кривизной и сингулярной только на опущенных гиперплоскостях представляется довольно трудным. Такая техника использована в [1] и [4] для получения оценок сверху для $f'(0)$. Однако эти оценки зависят не только от опущенных гиперплоскостей H_j, но также от производных высших порядков от f в точке 0. Вообще оценки кривизны недостаточно сильны как касательный подход к опущенным гиперплоскостям с целью получения оценки для $f'(0)$, не зависящей от производных высших порядков. Конечно, можно попытаться использовать вторую основную теорему для получения оценок, как в одномерном случае. Однако, можно только получить оценки, зависящие от производных высших порядков f в точке 0.

Подобный вопрос затрагивается в работе [5], где используется метод явных оценок Неванлинны, однако, здесь рассматриваются отображения в $\mathbb{P}^2$, опускающие только четыре гиперплоскости и, таким образом, в данномм случае производные высших порядков ирают значительную роль. Для симметричных областей в $\mathbb{P}^1$, например, для дополнения n-ых корней единицы в работе [3] даны не только явные, но строгие оценки сверху для $f'(0)$. Авторы работы [3] стараются обобщить свою работу на случай симметричных расположений гиперплоскостей в $\mathbb{P}^n$, однако, до сих пор это им не удалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бабец, "Псевдоформы с отрицательной кривизной на $\mathbf{C}P_n$", Изв. АН

СССР, Математика, т. 50, стр. 1326 – 1337, 1986.
2. S. Lang, Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, 1987.
3. M. Bonk, W. Cherry, "Bounds on spherical derivatives for maps into regions with symmetries", Journal D'Analyse Mathématique (to appear).
4. M. Cowen, "The Kobayashi metric on $\mathbb{P}_n - (2^n + 1)$ hyperplanes", in : R.Kujala, A.Vitter (eds), Value-Distribution Theory, Part A, Marcel Dekker, pp. 205 – 224, 1974.
5. P. Hall, "Landau and Schottky theorems for holomorphic curves", Michigan Math. J., vol. 38, pp. 207 – 223, 1991.

§5. ЗАДАЧИ ПЕИ–ЧУ ХУ И ЧУНГ–ЧУН ЯНГА[1]

pchu@public.jn.sd.cn и mayang@uxmail.ust.hk

НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой заметке мы ставим некоторые задачи, связанные с динамикой методом Ньютона в многомерных пространствах. Мы будем использовать терминологию и обозначения Ху-Янга [8]. Через $F(\mathcal{F})$ и $J(\mathcal{F})$ мы обозначим множество Фату и множество Жулиа семейства $\mathcal{F}$, соответственно. В частности, если $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ – семейство, порожденное итерациями отображения f, мы примем сокращенные обозначения $F(f) = F(\mathcal{F})$ и $J(f) = J(\mathcal{F})$.

1. Расширенные вопросы для итераций рациональных функций. Фиксированная точка p отображения f на гладком многообразии M называется *притягивающей*, если существует окрестность U точки p такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p \quad \text{для всех} \quad x \in U.$$

Множество A называется *отталкивающим*, если для каждой окрестности V множества A $V - [A]$ непусто; и если существует окрестность U множетва A такая, что для каждого $x \in U - [A]$ существует $n_0 > 0$ с $f^n(x) \notin U$ для всех $n \geq n_0$, где $[A]$ – объединение основных орбит всех элементов в A.

Предположение 1.1. Пусть M – комплексное многообразие, $f : M \longmapsto M$ – голоморфное отображение, $p \in M$, $f(p) = p$, и пусть λ_i – собственные значения для $A = f'(p)$, удовлетворяющие неравенствам $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_m|$ $(m = \dim M)$. Если p – отталкивающий, то $|\lambda_m| > 1$ (т.е. p отталкивает).

[1]Работу первого автора частично поддерживал Postdoctoral Grant of China, а второго частично поддерживал UGC Grant of Hong Kong.

Предположение 1.2. Если f – непрерывное самоотображение на компактном гладком многообразии M, то множество притягивающих циклов компактно и множество Жулиа $J(f)$ равно замыканию своего множества отталкивающих циклов.

С. Смейл в [15] предположил, что диффеоморфизмы на S^2 с $\mathbf{C}^r$-топологией в основном должны иметь только конечное число раковин. С. Е. Ньюхауз [10] доказал, что на любом компактном $\mathbf{C}^\infty$-многообразии M с размерностью большей или равной 1, существует подмножество $\mathcal{R}$ открытого множетсва $\mathcal{U}$ в $\mathrm{Diff}^r(M, M)$, $r \geq 2$ такое, что каждый элемент подмножества $\mathcal{R}$ имеет бесконечно много раковин, где, по опрееленню, $\mathcal{R}$ содержит счетное пересечение открырых подмножетсв множества $\mathcal{U}$.

Непрерывное самоотображение на многообразии M называется исключительным, если его множество Жулиа содержит либо исключительные, либо изолированные точки, где точка $x \in M$ называется исключительной, если ее основная орбита конечна.

Предположение 1.3. Пусть f – непрерывное самоотображение на компактном гладком многообразии M либо с $|deg(f)| \geq 2$, либо с топологической энтропией $h_{top}(f) > 0$. Тогда

1) если f не исключительно, то $J(f)$ совершенно и для любого $x \in J(f)$ обратная орбита $O^-(x)$ плотна в $J(f)$;

2) $J(f) = M$ тогда и только тогда, когда существует x, правильная орбита $O^+(x)$ которой плотна в M;

3) если U – некоторое открытое множество, пересекающее множество Жулиа, то $f^n(U \cap J(f)) = J(f)$ для любого достаточно большого n;

4) если M – компактное комплексное многообразие, а f – голоморфное самоотображение на M, то f имеет не более чем конечное число раковин, и каждая компонента множества Фату периодична, т.е. для каждой компоненты U множества Фату существуют целые числа m и n такие, что $f^n(f^m(U)) = f^m(U)$.

Если M – риманова сфера, то предположение подтверждается. О подробностях см. в [3], [5], [6] и [8].

Обозначим через $\mathrm{Res}J(f)$ *остаточное множество Жулиа* отображения f, т.е. множество тех точек в $J(f)$, которые не лежат на границе $F(f)$. Теперь мы расширим предположение Макиенко [2] для рациональных функций на римановой сфере к следующему общему случаю :

Предположение 1.4. Пусть M – компактное ориентированное гладкое m-мерное многообразие и $f \in C(M, M)$ удовлетворяет условиям

1) либо $|deg(f)| \geq 2$, либо $h_{top}(f) > 0$,

2) $F(f)$ не имеет обратную инвариантную компоненту.

Тогда $ResJ(f) \neq \emptyset$.

Связанными работами по рациональным функциям являются [9], [11] и [12].

2. Хаусдорфова метрика и множества Жулиа. Фиксируем $f \in C(M, M)$, и пусть $\mathcal{U} \subset C(M, M)$ – окрестность f в компактно-открытой топологии. Всякую последовательность $\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ назовем *случайным возмущением* f на $\mathcal{U}$. Семейство

$$Ds(\mathcal{F}) = \{f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \mid n = 1, 2, ...\}$$

называется *случайным возмущением* DS $\{f^n\}$ на $\mathcal{U}$. Если $f_j = g$ для всех $j \geq 1$, то мы получаем постоянное возмущение $\mathcal{F} = \{g\}$ f с $Ds(\mathcal{F}) = \{g^n\}$. Интересно сравнить $J(Ds(\mathcal{F}))$ и $J(f)$, когда $\mathcal{F} \to f$, т.е. $f_j \to f$ для всех $j \geq 1$.

Предположение 2.1. Пусть M – компактное метрическое пространство, и пусть $f \in \mathbf{C}(M, M)$. Тогда

1) если f топологически стабильно, то существует окрестность $\mathcal{U}$ отображения f в $\mathbf{C}^0$-топологии такая, что для любого случайного возмущение $\mathcal{F}$ отображения f на $\mathcal{U}$ $d_H(J(Ds(\mathcal{F})), J(f)) \to 0$ при $\mathcal{F} \to f$;

2) если $\mathcal{F}$ – случайное возмущение f на $C(M, M)$, то $d_H(J(Ds(\mathcal{F})), J(f)) \to$ $\to 0$ при $\mathcal{F} \to f$ тогда и только тогда, когда каждая компонента $F(f)$ является чашкой притяжения.

Далее, если M – риманова сфера, то 2) в этом предположении справедливо (см. [1], [13], [17]).

Пусть M – компакт, и пусть X – векторное пространство, порождающее течение $\mathcal{F} = \{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^l$, содержащее точку 0. Пусть X_ε – векторное пространство, зависящее от параметра $\varepsilon \in \Omega$ такое, что $X_\varepsilon \to X_0 = X$ при $\varepsilon \to 0$ в C^1-топологии векторных пространств. Пусть $\mathcal{F}_\varepsilon = \{f_\varepsilon^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – течение, порожденное X_ε.

В теории возмущений принято полагать M гладким расслоением $\pi : M \longmapsto \longmapsto B$. Векторное пространство X на свертке M называется ***вертикальным***, если оно касательно к каждому слою. Функции на базе B слоя π определяют первые интегралы уравнения $\dot{x} = X(x)$ на M. Вертикальное векторное пространство X называется ***невозмущенным***. ***Возмущенным полем*** называется поле $X_\varepsilon = X + \varepsilon X_1$ близкое к X, которое определяет следующее возмущенное дифференциальное уравнение :

$$\dot{x} = X(x) + \varepsilon X_1(x).$$

Задача 2.1. В каких случаях имеют место $d_H(J(\mathcal{F}_\varepsilon), J(\mathcal{F})) \to 0$ *и* $\dim_H J(\mathcal{F}_\varepsilon) \to \to \dim_H J(\mathcal{F})$ *при* $\varepsilon \to 0$ *?*

Мы предполагаем, что они имеют место, когда $\{f^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ структурально стабильно.

3. Неблуждающие множества и множества Жулиа. Если f – рациональное отображение порядка не меньше двух на римановой сфере и U – любое непустое множество, встречающее $J(f)$, то мы знаем, что $J(f) \subset f^n(U)$ для всех достаточно больших целых n так, что $J(f) \subset \Omega(f)$, где $\Omega(f)$ – множество неблуждающих точек.

Предположение 3.1. Если M – компактное гладкое многообразие, то $J(f) \subset \subset \Omega(f)$ *и в пространстве* $\mathit{Diff}^1(M, M)$ *диффеоморфизмов* C^1

$$J(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(f^n).$$

4. Гиперболические множества и множества Жулиа. Под ***гиперболическим множеством*** дифференцируемого отображения f на многообразии M мы подразумеваем правильное инвариантное компактное множество $\Lambda \subset M$ (т.е. $f(\Lambda) = \Lambda$) такое, что для каждой точки $x \in \Lambda$ касательное пространство $T(M)_x$

разлагается в прямую сумму $T(M)_x = E^s_x \oplus E^u_x$ стабильного пространства E^s_x и нестабильного пространства E^u_x со следующими свойствами : для $\xi \in E^s_x$, $\eta \in E^u_x$, $n \geq 0$

$$(df)_x E^s_x \subset E^s_{f(x)}, \quad (df)_x E^u_x = E^u_{f(x)},$$

$$\|(df^n)_x \xi\| \leq a e^{-cn} \|\xi\|, \quad \|(df^n)_x \eta\| \geq \frac{1}{a} e^{cn} \|\eta\|,$$

где a, c – положительные постоянные, не зависящие от x, ξ, η, n. Если $\dim E^u_x$ постоянна для гиперболического множества Λ, то она называется *индексом Морса* Λ и обозначается через u_Λ.

Предположение 4.1. Пусть Λ является гиперболическим множеством $\mathbf{C}^r$-дифференцируемого преобразоиваниа f на многообразии M. Если индекс Морса $u_\Lambda = \dim M$, то Λ – отталкивающее множество.

Уместен следующий вопрос Смейла : являются ли отображения, удовлетворяющие аксиоме А, плотными в $\mathrm{Diff}^r(M, M)$? С. Е. Ньюхауз показал, что существует открытое множество $\mathcal{U}$ в $\mathrm{Diff}^2(S^2, S^2)$ такое, что если $f \in \mathcal{U}$, то f не удовлетворяет аксиоме А и f $\mathbf{C}^2$ структурально нестабильно. Предположим, что M ориентировано и Ω – элемент объема на M. Возьмем $f \in \mathbf{C}^1(M, M)$. Правильное инвариантное компактное подмножество Λ в M называется *объемно сжимающим гиперболическим* (соотв., *объемно расширяющим гиперболическим*), если существуют $a > 0$ и $0 \leq \lambda < 1$ (соотв., $b > 0$ и $\gamma > 1$) такие, что $|(f^n)^*\Omega/\Omega| \leq a\lambda^n$ (соотв., $|(f^n)^*\Omega/\Omega| \geq b\gamma^n$) на Λ, и называется объемно гиперболическим, если каждая правильная инвариантная компонента Λ либо объемно сжимающая, либо расширяющая гиперболическая. Мы ставим следующий вопрос :

Предположение 4.2. Множество $\mathbf{C}^r$-самоотображений ($r \geq 1$) на M с объемно гиперболическими множествами Жулиа плотно в $\mathbf{C}^r(M, M)$.

Для рациональных функций на римановой сфере это является предположением Фату, нерешенным даже для многочленов порядка 2 на $\mathbf{C}$. Заменим аксиому А следующей :

Аксиома В : $\Omega(f)$ объемно гиперболично, а множество $Per(f)$ плотно в $\Omega(f)$.

Мы также ставим следующий вопрос :

Предположение 4.3. Множество C^r-самоотображений ($r \geq 1$), удовлетворяющих аксиоме B на M, плотно в $Diff^r(M, M)$.

Пусть C_f – множество критических точек f. Определим

$$\overline{C_f = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(C_f)}.$$

Предположение 4.4. Пусть f – голоморфное отображение на компактном комплексном многообразии M. Если либо каждая критическая точка f имеет правильную орбиту, накапливающуюся на притягивающем цикле f, либо $J(f) \cap \cap C_f = \emptyset$, то $J(f)$ объемно гиперболично.

Мы также предполагаем, что $J(f) \neq \emptyset$, если f Ли-Йорк-хаотично.

5. Экспоненты Ляпунова и множества Жулиа. Пусть f – $\mathbf{C}^1$-отображение на m-мерном римановом многообразии M. Определим

$$\gamma_f = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sup_{x \in M} \log \|(df^n)_x\|.$$

Для любого $x \in M$ мы также определим

$$\gamma(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|(df^n)_x\|.$$

Относительно некоторой борелевской вероятностной меры μ определим

$$\Gamma(f, \mu) = \int_M \gamma(x) d\mu(x),$$

$$l(f, \mu) = \int_M \sum_{\chi_i(x) > 0} m_i(x) \chi_i(x)\, d\mu(x),$$

где $m_i(x)$ – кратность экспоненты Ляпунова $\chi_i(x)$ и, далее, определим

$$l(f) = \sup_{\mu \in \Sigma_f(M)} l(f, \mu), \quad \Gamma(f) = \sup_{\mu \in \Sigma_f(M)} \Gamma(f, \mu),$$

где $\Sigma_f(M)$ – множество всех f-инвариантных борелевских вероятностных мер на M.

Предположение 5.1. Пусть M – компактное многообразие и $f \in Diff^1(M, M)$. Тогда $J(f) \neq \emptyset$, либо $l(f) > 0$, либо $\Gamma(f) > 0$.

Здесь мы также ставим следующие задачи :

Предположение 5.2. Если M является компактным гладким многообразием и $f \in Diff^1(M, M)$, то

1) если либо $l(f) > 0$, либо $\Gamma(f) > 0$ и если $F(f)$ не имеет компонент, обратно инвариантных, то $ResJ(f) \neq \emptyset$;

2) $J(f) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует вероятностная мера μ на M такая, что f – мера, сохраняющая преобразование для μ с положительной экспонентой Ляпунова.

6. Метод Ньютона. Пусть f – голоморфное отображение на $\mathbf{C}^m$, и пусть N_f – отображение, построенное методом Ньютона. Пусть S – подмножество нулей f такое, что $\zeta \in S$ тогда и только тогда, когда ζ – притягивающая фиксированная точка N_f. Пусть $Att(\zeta)$ обозначает чашку притяжения для притягивающей фиксированной точки ζ из N_f. Для меры μ на M и для борелевского измеримого множества B с $\mu(B) > 0$ определим

$$A_{f,\mu}(B) = \mu\left(B \cap \left(\bigcup_{\zeta\in S} Att(\zeta)\right)\right) / \mu(B).$$

Тогда $A_{f,\mu}(B)$ будет вероятностью того, что для данного отображения f итерация N_f стремится к нулю f для случайного выбора начальной точки в B.

Задача 6.1. При каких условиях $A_{f,\mu}(B)$ положительна?

Пусть $\mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m)$ – подвекторное пространство, состоящее из всех многочленов порядка $\leq d$ на $\mathbf{C}^m$. Для $d = (d_1, ..., d_n)$ положим

$$\mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m) = \mathcal{P}_{d_1}(\mathbf{C}^m) \times \cdots \times \mathcal{P}_{d_n}(\mathbf{C}^m).$$

Подпространство $\mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbf{C}^m; 1)$) определяется следующим образом: $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbf{C}^m; 1)$) тогда и только тогда, когда

(i) $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m)$ с $\deg(f_k) = d_k$ $(1 \leq k \leq m)$,

(ii) один из коэффициентов $\hat{f}_k$ равен 1 для любого k, а абсолютные значения всех коэффициентов $f_k \leq 1$ для любого k, где $\hat{f}_k$ – однородная часть f_k порядка d_k,

(iii) $\{\hat{f}_1 = \cdots = \hat{f}_m = 0\} = \{0\}$ (соотв. $\det(f'(z)) \not\equiv 0$).

По теореме Bézout's, любое f в $\mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m; 1)$ имеет ровно $d_1 \cdot d_2 \cdots d_m$ нулей с учетом кратностей.

Задача 6.2. Существует ли число $r > 0$ для лебеговой меры μ на $\mathbf{C}^m$ такое, что $A_{f,\mu}(\mathbf{C}^m(r)) > 0$ для любого $f \in \mathcal{P}_d(\mathbf{C}^m; 1)$ (соотв. $\mathcal{P}'_d(\mathbf{C}^m; 1)$), где $\mathbf{C}^m(r)$ – r-шар с центром 0 в $\mathbf{C}^m$?

При замене условия (iii) условием (iii)* $\{\hat{f}_1 = \cdots = \hat{f}_m = 0\} = \{0\}$ и $\det(f'(z)) \neq 0$ для всех $z \in \mathbf{C}^m$ получается семейство $\mathcal{P}^*_d(\mathbf{C}^m; 1)$.

Предположение 6.1. Задача 6.2 правильна для семейства $\mathcal{P}^*_d(\mathbf{C}^m; 1)$.

7. Гиперболичность по Кобаяши и множества Жулиа.

Предположение 7.1. Если M – гиперболическое комплексное многообразие Кобаяши, то $J(f) = \emptyset$ для любого голоморфного самоотображения f на M.

Если M – совершенное гиперболическое комплексное многообразие Кобаяши, то M is taut так, что $J(f) = \emptyset$ для любого голоморфного самоотображения f на M, т.е. это предположение справедливо для совершенных гиперболических комплексных многообразий Кобаяши. Более подробно см. [5] и [8].

Предположение 7.2. Если f – голоморфное самоотображение на комплексном многообразии M с $h_{top}(f) > 0$, то каждая компонента множества Фату гиперболична по Кобаяши.

В том случае, когда M – проективное пространство, эту задачу решил Уэда. Более подробно см. [3], [5], [6] и [8].

8. Множества Жулиа голоморфных самоотображений на $\mathbf{C}^m$. Предположим, что M имеет логарифмически выпуклую аннулирующую функцию, а f – голоморфное отображение на M. Для $p \in \mathbb{Z}[1, m]$, где $m = \dim M$, введем величину

$$d_p[f] = \limsup_{n\to\infty} \limsup_{r\to\infty} \left(\frac{T_{p,f^n}(r)}{T_{p,f}(r)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

где $T_{p,f}(r)$ – функция порядка p функции f.

Предположение 8.1. Если $d_p[f] > 1$ для некоторого $p \in \mathbb{Z}[1, m]$, то $J(f) \neq \emptyset$.

Для $M = \mathbf{C}^m$ можно определить величину

$$d(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \left(\frac{\log M(r, f^n)}{\log M(r, f)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

где $M(r, f)$ – функция максимума функции f.

Предположение 8.2. Если для голоморфного отображения $f : \mathbf{C}^m \longmapsto \mathbf{C}^m$ $d(f) > 1$, *то* $J(f) \neq \emptyset$.

Пусть $P : \mathbf{C}^m \longmapsto \mathbf{C}^m$ – полиномиальное отображение. Определим

$$\mathcal{A}_P = \{f \in \text{Hol}\,(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^m) : Z(f - P) = \emptyset \text{ или } Z(f - P) \text{ родственно алгебраично}\}$$

Для $f, g \in \text{Hol}\,(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^m) - \mathcal{A}_P$ мы предполагаем

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, f \circ g = P)}{\log M(r, g)} = +\infty.$$

В случае $m = 1$ см. [14] и [16]. Более подробно см. [3] – [6] и [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Douady, "Julia sets of polynomials", Preprint, 1994.
2. A. E. Eremenko, M. Y. Lyubich, "The dynamics of analytic transformations", Leningrad Math. J., vol. 1, no. 3, pp. 563 – 634, 1990.
3. P. C. Hu, "Value distribution theory and complex dynamics", Ph.D thesis, Hong Kong Univ. of Science and Technology, 1996.
4. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fixed points and factorization of meromorphic mappings", Complex Variables (to appear).
5. P. C. Hu, C. C. Yang, Differentiable and Complex Dynamics of Several Variables, manuscript.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "Dynamics in high dimensional spaces", Preprint.
7. P. C. Hu, C. C. Yang, "Invariant sets in dynamics", Bulletin of Hong Kong Math. Soc. (to appear).
8. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fatou-Julia theory in high dimensional spaces", Bulletin of Hong Kong Math. Soc. (to appear).
9. S. Morosawa, "On the residual Julia sets of rational functions", Ergod. Th. & Dynam. Sys., vol. 17, pp. 205 – 210, 1997.
10. S. E. Newhouse, "Diffeomorphisms with infinitely many sinks", Topology, vol. 12, pp. 9 – 18, 1974.
11. J. Y. Qiao, "Buried points of Julia sets for rational or entire functions", Sci. in China, Ser. A, vol. 25, no. 11, pp. 1139 – 1146, 1995.
12. J. Y. Qiao, "Topological complexity of Julia sets", Sci. in China, Ser. A, vol. 27, pp. 775 – 781, 1997.
13. W. Y. Qiu, F. Y. Ren, Y. C. Yin, "Iterate for small random perturbations of rational functions and polynomials", Preprint.
14. P. C. Rosenbloom, "The fix-points of entire functions", Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl. Bd. M. Riesz, pp. 186 – 192, 1952.
15. S. Smale, "Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphisms", Proc. Int. Congress Math. (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, pp. 490 – 496, 1963.
16. C. C. Yang, J. H. Zheng, "On the fix-points of composite meromorphic functions and generalizations", J. D'Analyse Mathematique, vol. 68, pp. 59 – 93, 1996.
17. Y. C. Yin, "Discontinuity of Julia sets for polynomials", Acta Math. Sinica, vol. 38, pp. 99 – 102, 1995.

§6. ЗАДАЧИ К. Х. ХУА (mahua@netra.nju.edu.cn)

Задача 1. Независимо друг от друга Бейкер и Кин доказали, что для трансцедентной функции $f : C^* \to C^*$ множество Фату $F(f)$ имеет не более одного кольца Германа. Я предполагаю, что $F(f)$ не может содержать кольца Германа.

Задача 2. Построить трансцедентную мероморфную функцию, множество Фату которого имело бы кольцо Германа.

§7. ЗАДАЧИ ХАРТЬЕ КРИЕТЕ (kriete@uni-math.gwdg.de)

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ИТЕРАЦИЙ

Обозначим через $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ риманову сферу, и пусть $f : \mathbb{C} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ – мероморфная функция. Напомним, что *множество Фату* $\mathcal{F}(f)$ – это множество $z \in \hat{\mathbb{C}}$ такое, что семейство итераций $\{f^{\circ n}\}$ определено и нормально в окрестности z. *Множеством Жулиа* $\mathcal{J}(f)$ называется дополнение $\mathcal{F}(f)$ в $\hat{\mathbb{C}}$. Другими словами, множество Жулиа $\mathcal{J}(f)$ – это множество тех точек, вблизи которых f не имеет сходимого характера. Оно является непустым, совершенным и инвариантным множеством, в котором отталкивающие периодичные точки f плотны.

1. Сходимость множеств Жулиа. Рассмотрим последовательность функций $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, равномерно сходящихся на компакте к f. Нас интересуют динамические следствия этой сходимости. В частности, нас интересует

Задача 1. При каких условиях множества Жулиа $\mathcal{J}(f_m)$ сходятся ко множеству Жулиа $\mathcal{J}(f)$ как множества в хаусдорфовой метрике, когда $m \to \infty$?

Известны различные достаточные условия, при которых ответ положителен, см. [18], [17], [9], [11], [15]. Тем не менее, до сих пор принято считать, что f не имеет блуждающих областей и областей Бейкера. Поэтому мы спрашиваем :

Вопрос 1. Предположим, что f имеет блуждающую область и/или область Бейкера. Возможно ли найти функции f_m, стремящиеся к f равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}$ такие, что множества Жулиа $\mathcal{J}(f_m)$ стремятся к $\mathcal{J}(f)$ по хаусдорфовой метрике на $\mathbb{C}$ при $m \to \infty$?

В частности, нас интересует вопрос о приближении f рациональными функциями или многочленами. Иногда приближения f_m можно выбирать такими, чтобы они имели одинаковую с f динамику. Например, если приближения f_m и f имеют одинаковое количество так называемых "свободных сингулярных значений", то мы говорим о "динамическом приближении".

Задача 2. Найти широкие классы трансцедентных функций, динамически приближаемых многочленами или рациональными функциями.

Примеры можно найти в [3], [4] и [11] – [14], [19]. Заметим, что для каждого сингулярного значения v функции f существует последовательность $\{v_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ сингулярных значений v_m приближений f_m, стремящаяся к v. Поэтому нужно найти приближения f_m, не имеющие большое количество сингулярных значений.

Пример. Пусть $f(z) = e^z$. Тогда множество $sing(f)$ *конечных* сингулярных значений, играющее большую роль в комплексной динамике, равно $\{0\}$. Последовательности $\{f_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, где $f_m(z) = \left(1 + \dfrac{z}{m}\right)^m$, и $\{g_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, где $g_m(z) = \sum\limits_{\mu=0}^{m} \dfrac{z^m}{m!}$, сходятся к f равномерно на компактных подмножествах $\mathbf{C}$. С одной стороны мы получаем $\lim\limits_{m\to\infty} \sharp sing(g_m) = \infty$, а с другой стороны $sing(f_m) = sing(f) = \{0\}$ имеет место для каждого $m \in \mathbf{N}$. Поэтому последовательность $\{f_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ является динамическим приближением, но не $\{g_m\}_{m\in\mathbf{N}}$.

2. Метод Ньютона для трансцедентных функций. С недавних пор большое внимание уделяется методу Ньютона для заданной трансцедентной функции f, см. [1], [2], [7], [8], [19], [21]. Следуя Смейлу мы спрашиваем о вероятности применения метода Ньютона к заданной трансцедентной функции f для случайного выбора начального значения.

Пусть f – трансцедентная функция. Для начального $z_0 \in \mathbf{C}$ определим

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех z_0 таких, что последовательность $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ стремится к корню f.

Задача 3. Найти оценку снизу (сферической) лебеговой меры $\mathcal{A}$.

Известны достаточные условия, устанавливающие открытость и плотность множества $\mathcal{A}$, либо ее полную меру, см. [7], [8], [21]. Большинство этих условий подразумевает "гиперболичность" (в некотором смысле) функции f. Тем не менее, Харута [6] представил класс целых функций $\mathcal{H}$ таких, что множество $\mathcal{A}$, связанное с некоторым $f \in \mathcal{H}$, имеет *ограниченную плоскую* лебегову меру Λ. Если f – многочлен, то известны некоторые оценки для $\Lambda(\mathcal{A})$ (см. [5], [20], [16], [19]). Это приводит к следующему :

Вопрос 2. Пусть f – целая функция и $\{f_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ – последовательность полиномиальных приближений. Возможно ли выбрать приближения f_m такими, чтобы $\lim\inf\limits_{m\to\infty} cA(f_m)$ мог быть оценен (снизу) равномерно в m ?

3. Гиперболичность. "Гиперболичность" играет важную роль в итерации многочленов и рациональных функций. Определение приводит к классу трансцедентных функций конечного типа. Однако определение гиперболичности для более широких классов представляется довольно трудным. Некоторые попытки сделаны в работах [11] – [14].

Задача 4. Найти удобное определение "гиперболичности" для широкого класса трансцедентных функций.

4. Сходимость гиперболических компонент. Имея определение гиперболических трансцедентных функций, принадлежащих заданному семейству $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}$, где λ принимает значения в некотором параметрическом пространстве $\mathcal{P}$, например, $\mathbf{C}^*$, можно начать изучение гиперболических компонент в параметрическом пространстве. Отметим, что гиперболичность обычно определяется как открытое свойство, т.е. множество всех λ таких, что f_λ гиперболично, предполагается открытым.

Предположим также, что семейство допускает динамическое приближение семействами $\mathcal{F}_m = \{f_{m,\lambda}\}$ многочленов или рациональных функций.

Вопрос 3. Пусть H – гиперболическая компонента (в параметрическом пространстве $\mathcal{P}$) семейства $\mathcal{F}$. Существует ли последовательность гиперболических компонент H_m семейств $\mathcal{F}_m$, стремящаяся к H ?

Используя сходимость ядра, был дан положительный ответ для широкого класса семейств $\mathcal{F}$, ср. [11] – [14]. Вообще, нельзя ожидать хаусдорфову сходимость ([14]), однако, она имеет место в том случае, когда $\mathcal{F} = \{\lambda e^z\}$ и $\mathcal{F}_m = \{\lambda(1+\frac{z}{m})^m\}$, ([3], [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Bergweiler, N. Terglane, "On the zeros of solutions of linear differential equations of the second order", J. London Math. Soc., 1998 (to appear).
2. W. Bergweiler, "Newton's method for meromorphic functions", Pitman's Research Notes, vol. 305, pp. 147 – 158, 1994.
3. R. L. Devaney, "Julia sets and bifurcation diagrams for exponential maps", Int. J. Bifurcations and Chaos, vol. 1, pp. 287 - 308, 1984.
4. R. L. Devaney, L. R. Goldberg, J. H. Hubbard, "A dynamical approximation to the exponential map by polynomials", preprint, 1986.
5. J. Friedman, "On the convergence of Newton's method", Journal of Complexity, vol. 5, pp. 12 – 33, 1989.
6. M. Haruta, "Newton's method on the complex exponential function", Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
7. M. Jankowski, "Newton's method for solutions of quasi-Bessel differential equations", Ann. Acad. Sci. Fenn. (to appear).
8. M. Jankowski, Das Newtonverfahren für transzendente meromorphe Funktionen, Dissertation, 1996.
9. M. Kisaka, "Local uniform convergence and convergence of Julia sets", Nonlinearity, vol. 8, pp. 273 – 281, 1995.
10. B. Krauskopf, "Convergence of Julia sets in the approximation of λe^z by $\lambda\times$ $\times[1+(z/d)]^d$", Int. J. Bif. Chaos, vol. 3, pp. 257 – 270, 1993.
11. B. Krauskopf, H. Kriete, (ftp ://www.uni-math.gwdg.de) "Hausdorff convergence of Julia sets", Bull. Belg. Math. Soc. – Simon Stevin (to appear).
12. B. Krauskopf, H. Kriete, "On the convergence of hyperbolic components in families of finite type", Mathematica Gottingensis, vol. 5, 1995.
13. B. Krauskopf, H. Kriete, "Hausdorff convergence and the limit shape of the unicorn", Experimental Mathematics, vol. 6, no. 2, pp. 117 – 135, 1996.
14. B. Krauskopf, H. Kriete, "Kernel convergence of hyperbolic components", Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 17, no. 5, 1996.
15. B. Krauskopf, H. Kriete, "A note on non–converging Julia sets", Nonlinearity, vol. 9, no. 2, pp. 601 – 603, 1996.
16. H. Kriete, "On the efficiency of relaxed Newton's method", Pitman Research Notes in Math. Series, vol. 305, pp. 200 – 212, 1994.
17. H. Kriete, "Approximation of indifferent cycles", Mathematica Gottingensis, vol. 3, 1996.
18. H. Kriete, "Continuity of filled–in Julia sets and the Closing lemma", Nonlinearity, vol. 9, no. 6, pp. 1599 – 1608, 1996.
19. H. Kriete, On the Dynamics of Newton's Method, Habilitationsschrift, Göttingen, 1997.
20. S. Sutherland, "Finding roots of complex polynomials with Newton's method", Preprint, SUNY Stony Brook, 1989.
21. N. Terglane, Iteration Transzendenter Funktionen, Dissertation, 1996.

§8. ЗАДАЧИ ДАОЧУН САН

Задача 1. Пусть $X_n(\omega)$ – последовательность независимых, симметричных и равномерно распределенных действительных или комплексных случайных переменных с конечными ненулевыми вариациями. Рассмотрим случайную последовательность

$$f_\omega(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(\omega) Z^n$$

в $|Z| < 1$, где

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{n}|a_n| = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty.$$

Является ли образом $f_\omega(Z)$ вся комплексная плоскость с вероятностью единица ?

Дж. П. Кахан [1] доказал, что это имеет место, когда X_n – гауссовские случайные переменные. Сан Даочун [2] доказал это, когда X_n – непрерывные случайные переменные или если $f_\omega(Z)$ удовлетворяет

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\log \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}{-\log(1-r)} = \infty.$$

Задача 2. Существует ли мероморфная функция $f(Z)$, $|Z| < 1$ с $\overline{\lim}_{n\to\infty} T(r,f) =$ $= \infty$ такая, что $f(Z)$ не принимает трех различных комплексных значений ?

Если мы докажем, что число исключительных значений конечно, то задача 1 будет решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. J-P. Kahane, Some Random Series of Functions, Second Edition, London, Cambridge University Press, 1985.
2. Daochun Sun, "Value distribution of random series", Bull. Hong Kong Math. Soc, vol. 1, 1997.

§9. ЗАДАЧИ С. П. ВАНГА (swang@math.uno.edu)

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z) f^{(n-1)} + \cdots + p_0(z) f = 0, \tag{9.1}$$

где $n \geq 2$ и $p_0(z), \ldots, p_{n-1}(z)$ – многочлены с $p_0(z) \not\equiv 0$. Для любого нетривиального решения f уравнения (9.1) обозначим порядок роста f через $\rho(f)$, а экспоненту сходимости нулей f – через $\lambda(f)$. Нами доказано, что уравнение (9.1) допускает множество фундаментальных решений $\{f_1, \ldots, f_n\}$ с тем свойством, что

$\lambda(f_k) < \rho(f_k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$ тогд и только тогда, когда существует ненулевая постоянная b и положительное целое число α такие, что для $j = 0, 1, \ldots, n-1$

$$p_j(z) = \binom{n}{j} b^{n-j} z^{\alpha(n-j)} + \cdots, \qquad (9.2)$$

где $\binom{n}{j}$ – биномиальный коэффициент. Отсюда следует, что если один из коэффициентов уравнения (9.1) не имеет представления (9.2), то для любого множества фундаментальных решений $\{f_1, \ldots, f_n\}$ уравнения (9.1) по крайней мере один из них удовлетворяет равенству $\lambda(f) = \rho(f)$. Уместен следующий вопрос : сколько таких решений может существовать во множестве решений ?

Банк и Франк [Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, vol. 33, pp. 143 – 151, 1984] показали, что для уравнений вида

$$f^{(n)} + p_0(z)f = 0,$$

где $n \geq 2$ и $p_0(z) \not\equiv 0$ – многочлен, в любом множестве фундаментальных решений $\{f_1, \ldots, f_n\}$ существуют по крайней мере $n-1$ решений, удовлетворяющих равенству $\lambda(f) = \rho(f)$.

§10. ЗАДАЧИ С. С. ЯНГА (mayang@uxmail.ust.hk)

1. О теории факторизации мероморфных функций. Обозначим через $f(z)$ мероморфную функцию в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Выражение $f(z) = g(h(z))$ с g мероморфной и h целой или g рациональной и h мероморфной называется факторизацией f с левым фактором g и правым фактором h. $f(z)$ называется первичной (псевдо-первичной), если в каждой факторизации f либо h либо g билинейна (либо h либо g рациональна). Определение "первичной функции" впервые введено П. К. Розенблюмом [9] в 1952 году как результат количественного изучения фиксированных точек composite целой функции. После 1968 года теория факторизации широко изучалась F. Гроссом, М. Озавой, Ч.-Ч. Янгом, В. Бергвейлером, Х. Урабе и т.д. (см. [3] и [5]. Недавно, подобные исследования успешно были проведены для мероморфных функций нескольких комплексных переменных, а более общие – для мероморфных отображений – мной и соавторами, см. ([2], [6] – [8] и [10]).

Несмотря на усилия комплексных аналитиков в течение трех десятилетий (см. [3] и [4]), в теории факторизации пока что нет значительных и важных достижений. Ниже мы приводим два наиболее важных результата :

Теорема 1. *(Стейнмец [11]). Всякое мероморфное решение линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами должно быть псевдопервичным.*

Теорема 2. *(Бергвейлер [1]). Всякая трансцедентная целая функция, имеющая только конечное число фиксированных точек, должна быть первичной.*

Задача 1. Найти другие интересные критерии того, что целая функция является первичной или псевдо-первичной.

Задача 2. Следует ли из псевдо-первичности F, что для любого многочлена p $F(p)$ псевдо-первично ?

Замечание. Эта задача некорректна в случае $p(F)$, см., например, [3], стр. 181.

2. Эквивалентность двух факторизаций. Мы называем две факторизации $f_1 \circ \cdots \circ f_n$ и $g_1 \circ \cdots \circ g_m$ эквивалентными тогда и только тогда, когда имеют место следующие три условия :

(i) $m = n$;

(ii) все факторы f_i и g_j – трансцедентные первичные целые функции ;

(iii) существуют $n-1$ линейных преобразований $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ такие, что

$$f_1 = g_1 \circ \lambda_1, \quad f_2 = \lambda_1^{-1} \circ g_2 \circ \lambda_2, \quad \ldots, \quad f_n = \lambda_{n-1}^{-1} \circ g_n.$$

Определение. Говорят, что трансцедентная целая функция F обладает *свойством единичной факторизуемости* тогда и только тогда, когда любые две факторизации F в трансцедентные первичные целые факторы эквивалентны друг другу.

Замечание. Показано, что существуют определенные классы трансцедентных целых функций, которые обладают свойством единичной факторизуемости, см., например, [12] и [13].

Задача 3. Найти критерии единичной факторизуемости функции.

Задача 4. Существует ли трансцедентная целая функция, не являющаяся единично факторизуемой?

3. Наибольший простой правый фактор и наименьший простой правый множитель двух функций.

Обозначения. Пусть f, g и h – три целые функции такие, что $f = g \circ h$. Тогда h – правый фактор f и должен быть обозначен через $h|f$.

Определение. Целая функция h называется *наибольшим простым правым фактором* двух целых фукнций f_1 и f_2 тогда и только тогда, когда

(i) $h|f_1$ и $h|f_2$,

(ii) для любой целой функции k такой, что $k|f_1$ и $k|f_2$, имеем $k|h$.

Замечание. Еременко и Рубель [4] показали, что для любого набора целых функций наибольший простой правый фактор всегда существует.

Задача 5. Каков критерий сравнительной первичности двух целых функций (т.е. их наибольшие простые правые факторы – линейные функции)?

Замечание. В [15] даны некоторые критерии для этой задачи.

Определение. Целая функция H называется *наименьшим простым множителем* двух функций f и g тогда и только тогда, когда

(i) $f|H$, $g|H$,

(ii) если для любой целой функции K $f|K$ и $g|K$, то $H|K$.

Замечание. Не всякая пара целых функций имеет наименьший простой множитель, см. [15].

Задача 6. Найти необходимое и достаточное условие существования наименьшего простого множителя пары функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Bergweiler, "On proof of a conjecture of Gross concerning fix-points", Math. Zeit, vol. 204, pp. 381 – 390, 1990.
2. D. C. Chang, B. Q. Li, C. C. Yang, "On composition of meromorphic functions in several complex variables", Forum Math., vol. 7, pp. 77 – 94, 1995.
3. C. T. Chuang, C. C. Yang, Fix-points and Factorization of Meromorphic Functions [in Chinese], Peking University Press, 1988 [English translation : World Scientific, 1990].
4. A. Eremenko, L. A. Rubel, "The arithmetic of entire functions under composition", Advances in Mathematics, vol. 124, pp. 334 – 354, 1996.

5. F. Gross, Factorization of Meromorphic Functions, U.S. Govern. Printing Office, Washington D.C., 1972.
6. P. C. Hu, C. C. Yang, "Factorization of holomorphic mappings", Complex Variables, vol. 27, pp. 235 – 244, 1995.
7. P. C. Hu, C. C. Yang, "Fix-points and factorization of meromorphic mappings", Complex Variables, (to appear).
8. B. Q. Li, C. C. Yang, "Factorization of meromorphic functions in several complex variables", AMS Contemporary Math. Series, vol. 142 (edited by Yang-Gong), pp. 61 – 74, 1993.
9. P. C. Rosenbloom, "The fix-points of entire functions", Medd Lunds, Univ. Mat. Sem. Supp. Bd. M. Riesz, pp. 186 – 192, 1952.
10. L. Rubel, C. C. Yang, "The factorization of $A(z) + B(w)$ under composition", Illinois Math. J., vol. 39, pp. 258 – 270, 1995.
11. N. Steinmetz, "Über die faktorizierbaren Lösungen gewöhnlichen Differentialgleichungen", Math. Zeit., vol. 170, pp. 169 – 186, 1980.
12. H. Urabe, C. C. Yang, "Uniquely factorizable entire functions under composition", Forum Math. vol. I, pp. 309 – 313, 1989.
13. C. C. Yang, "On unique factorizability of certain composite entire functions", JMAA (2), vol. 175, pp. 499 – 513, 1993.
14. C. C. Yang, Factorization Theory of Meromorphic Functions and Related Topics, Lecture Notes in Math., Marcel Dekker, New York, 1983.
15. C. C. Yang, "On common right factor and common right multiple of two entire functions", Chinese Journal of Contemporary Mathematics (to appear).