ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА РАЗБИЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, II : НАКОПЛЕНИЯ a–ТОЧЕК И СВОЙСТВО ЛИТТЛВУДА

Г. А. Барсегян, Г. А. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 4, 1997

В настоящей статье представлено применение принципа разбиения [3], связанное с принципом разбиения и свойством Литтлвуда. Показано, что существуют классы мероморфных функций, a-точки которых в основном содержатся в произвольно малых множествах, тогда как сферические производные в этих точках являются произвольно большими.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Замечательное свойство Литтлвуда [1] изучает множество G в z-плоскости, где скапливается "большинство" a-точек целой функции $f(z)$ для "почти всех" значений $a \in C$ и устанавливает, что для любой целой функции $f(z)$ существует такое множество G с "сравнительно малой" площадью. Площадь $S(G)$ множества G не может быть произвольно малой для целых функций. Это заключение вытекает из оценок $M(r, f')$ в терминах классических характеристик $M(r, f)$, $T(r, f)$ или $A(r, f)$. (Определения и результаты теории распределения значений мероморфных функций предполагаются известными [2]). С другой стороны, это показывает, что классические характеристики описывают малость $S(G)$ для целых функций.

Справедливо ли то же самое для мероморфных функций $w(z)$ в C?

В настоящей работе мы даем отрицательный ответ на этот вопрос. В частности, мы указываем некоторые классы мероморфных функций с предписанной малостью $S(G)$ и роста их характеристик. Используя принцип разбиения мероморфных функций [2], мы легко приходим к оценкам площади $S(G)$ (свойство Литтлвуда) и, более того, получаем подробное описание геометрии множеств G.

Кроме того, мы показываем, что наибольший рост сферических производных $w(z)$ достигается на множествах G с наименьшей площадью G и наоборот. Отсюда, в частности, следует существование мероморфных функций с произвольно большими сферическими производными па множествах G.

Все это приводит к следующему важному заключению : в случае мероморфных функций значения сферических производных и размер множества G не могут быть описаны в терминах классических характеристик. Для выяснения ситуации нужны новые понятия. Мы намереваемся возвратиться к этой задаче позже.

§2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через M класс мероморфных функций в $\mathbb{C}$, отображающих верхнюю полуплоскость на себя (см. [4]). Как установлено М. Г. Крейном [4], функции $w(z) \in M$ имеют представление

$$w(z) = c\,\frac{z - z_0(0)}{z - z_0(\infty)} \prod_{n \neq 0} \frac{1 - z/z_n(0)}{1 - z/z_n(\infty)},$$

где $z_n(\infty) < z_n(0) < z_{n+1}(\infty)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $z_{-1}(0) < 0 < z_1(\infty)$, c – константа.

Мы будем использовать обозначения принципа разбиения и теоремы 1 из [3] такие, как $\varphi(r)$, $D(r)$, $A(r)$, $E_i^c(r)$, $d(E_i^c(r))$, $A(\widetilde{w}(E_0^c(r)))$, $\Phi^c(r)$, Δ, E.

Теорема 1. *Пусть $\tau(r)$ – положительная монотонная функция, стремящаяся к нулю при $r \to \infty$ и $0 \leq \rho \leq \infty$. Существует мероморфная функция $w(z) \in$ $\in M$ заданного порядка ρ такая, что для $\varphi^{35}(r) < A(r)$ и для произвольного $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \Phi^c(r)$ такие, что :*

для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ – удобные однолистные накопители с тотальным дефектом

$$\Delta \leq 4; \tag{1}$$

для $i = 0$ отображение $(E_0^c(r), w(E_0^c(r)))$ – расширенный накопитель особенностей, причем

$$A(\widetilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \to 0, \quad r \to \infty, \quad r \notin E \tag{2}$$

и, одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{3}$$

Диаметры $d(E_i^c(r))$ удовлетворяют неравенству

$$d(E_i^c(r)) \leq \tau(r), \quad i \geq 1, \tag{4}$$

и для каждого $z \in E_i^c(r)$, $i \geq 1$

$$\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2} \geq \frac{1}{\tau(r)}. \tag{5}$$

Благодаря формулам (1) — (3) большинство простых a-точек для большинства значений $a \in C$ содержится в объединении областей $E_i^c(r)$, $i \geq 1$, играющей роль множества G во введении (см. [3]). Неравенство (4) в теореме 1 показывает, что диаметры удобных однолистных накопителей могут быть произвольно малыми, и, следовательно, объединение может быть произвольно малым. Это означает, что мы имеем пример мероморфных функций с произвольно малым множеством G и, соответственно, с произвольно большими сферическими производными на множестве G.

Следующий результат описывает расположение областей и дает оценки снизу для сферических производных $w \in M$, зависящих от расстояний между нулями и полюсами.

Теорема 2. *Пусть $w(z) \in M$ и $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда для любого $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \Phi^c(r)$ такие, что :*

для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ – удобные однолистные накопители с тотальным дефектом

$$\Delta \leq 4; \tag{6}$$

для $i = 0$ отображение $(E_0^c(r), w(E_0^c(r)))$ – расширенный накопитель особенностей, причем

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \to 0, \quad r \to \infty, \quad r \notin E \tag{7}$$

и одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{8}$$

Для каждого $E_i^c(r)$, $i \geq 1$ существует индекс n_i (соответствие между i и n_i взаимно однозначно) такой, что $E_i^c(r) \cap (z_{n_i}(\infty); z_{n_i}(0)) \neq \emptyset$ и

$$E_i^c(r) \subset \left\{ z: \quad \left| z - \frac{z_{n_i}(\infty) + z_{n_i}(0)}{2} \right| \leq 10^{C\varphi^7(r)} |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| \right\}, \qquad (9)$$

где C – абсолютная константа;

для любого $z \in E_i^c(r)$, $i \geq 1$

$$\frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \geq \frac{1}{10^{C\varphi^7(r)} |z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)|}. \qquad (10)$$

Следующий результат имеет самостоятельный интерес в изучении функций $w \in M$.

Теорема 3. *Пусть $w \in M$. Тогда*

$$|A(r) - n(r, 0)| = o(A(r)), \quad r \to \infty, \quad r \notin E, \qquad (11)$$

$$|A(r) - n(r, \infty)| = o(A(r)), \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \qquad (12)$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Мы будем использовать следующие обозначения из [3] : $\widetilde{w}$ – сферический образ w ; $\widetilde{w}(X)$ – сферический образ $w(X)$; $\widetilde{l}(\Gamma)$ – сферическая длина кривой Γ ; $D(\rho, w_0)$ – сферическая ρ–окрестность точки w_0, т.е. множество точек, расположенных на сферическом расстоянии, меньшем чем ρ, от точки w_0.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\widetilde{l}(r, \Gamma)$ – суммарная сферическая длина кривых на римановой поверхности $F_r = \{w(z): |z| \leq r\}$, проекции которых лежат на кривой Γ.

Согласно первой фундаментальной теореме Альфорса (см. [2], гл. XIII)

$$\left| A(r) - \frac{\widetilde{l}(r, \Gamma)}{\widetilde{l}(\Gamma)} \right| = o(A(r)), \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \qquad (13)$$

Для кривой Γ возьмем полуось $(-\infty, 0)$. Тогда $\widetilde{l}(\Gamma) = \dfrac{\pi}{2}$. Заметим, что интервалы в определении $\widetilde{l}(r, \Gamma)$ в точности являются w–образами интервалов $\{\cup_{(n)}(z_n(\infty), z_n(0))\} \cap \{z: |z| \leq r\}$. Действительно, ясно, что w–образ каждого интервала $(z_n(\infty), z_n(0))$ отображается на полуось $(-\infty, 0)$. w–образ любой прямой вне $\cup_{(n)}(z_n(\infty); z_n(0))$ не может лежать в $(-\infty, 0)$. Это следует из того, что

1) w–образы интервалов $[z_n(0); z_{n+1}(\infty)]$ лежат на положительной полуоси; 2) если w–образ некоторой прямой из $C\setminus(-\infty;+\infty)$ принадлежит $(-\infty;0)$, то любая окрестность этой прямой содержит значения как из верхней, так и из нижней полуплоскостей. А это противоречит тому, что функция $w(z)$ отображает верхнюю полуплоскость на себя.

Остается показать, что соответствие между этими интервалами на F_r и интервалами $(z_n(\infty), z_n(0))$ взаимно однозначно. В противном случае, существовали бы точки $z_n^{(i)} \in (z_n(\infty), z_n(0))$, в которых $w'(z_n^{(i)}) = 0$. Следовательно, для любого $\rho > 0$ w–образ полукруга $\{z\colon\ |z - z_n^{(i)}| < \rho\} \cap \{z\colon\ \mathrm{Im} z > 0\}$ содержал бы точки из $\{\mathrm{Im} w < 0\}$. Мы пришли к противоречию.

Сферическая длина w–образа каждого интервала $(z_n(\infty), z_n(0)) \subset [-r; r]$ равна $\frac{\pi}{2}$, а для интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$, пересеченных с $[-r; r]$, меньше $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, отношение $\frac{\tilde{l}(r,\Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)}$ получает целый вклад из интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$, целиком находясь в $[-r; r]$. Каждый такой вклад равен числу $B(r)$ этих интервалов. Положим

$$\frac{\tilde{l}(r,\Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)} = B(r) + B_0(r),$$

где $B_0(r) \leq 2$ – вклад из $(z_n(\infty), z_n(0)) \cap [-r; r]$.

Следовательно, из (13) имеем

$$|A(r) - B(r)| \leq \left| A(r) - \frac{\tilde{l}(r,\Gamma)}{\tilde{l}(\Gamma)} \right| + B_0(r) = o(A(r)), \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{14}$$

Поскольку $0 \leq n(r,\infty) - B(r) \leq 1$ и $0 \leq n(r,0) - B(r) \leq 1$, то (11) и (12) следуют из (14). Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 2. Пусть γ – сферический образ полуоси $(-\infty;0)$. Тогда, в силу утверждения $5'$ из [3], можно указать точку $\tilde{w}^* \in \gamma$ такую, что сферический круг $\mathcal{D}(C_6\varphi^{-6}(r), w^*)$ принадлежит всем $\tilde{w}(E_i^c(r))$, $i = 1, ..., \Phi^c(r)$, $r > r_1$. Обозначим через $m(r)$ дугу кривой γ, целиком лежащую в круге $\mathcal{D}(C_6\varphi^{-6}(r), w^*)$. Сферическая длина $m(r)$ равна $2\,C_6\varphi^{-6}(r)$. Полуось $(-\infty;0)$ в точности является w–образом каждого из интервалов $(z_n(\infty), z_n(0))$. Поэтому, для каждого $E_i^c(r)$, $i = 1, ..., \Phi^c(r)$ существует индекс n_i (соответствие между i и

n_i взаимно однозначно) такой, что множество $\widetilde{w}\,(E_i^c(r)\cap(z_{n_i}(\infty),z_{n_i}(0)))$ содержит дугу $m(r)$ так, что

$$\int_{E_i^c(r)\cap(z_{n_i}(\infty),z_{n_i}(0))}\frac{|w'(x)|}{1+|w(x)|^2}\,dx\geq 2\,C_6\varphi^{-6}(r).$$

Для некоторого $x_{n_i}^*\in E_i^c(r)\cap(z_{n_i}(\infty),z_{n_i}(0))$, согласно теореме о среднем значении, имеем

$$\frac{|w'(x)|}{1+|w(x)|^2}\geq\frac{2\,C_6\varphi^{-6}(r)}{\operatorname{mes}(E_i^c(r)\cap(z_{n_i}(\infty),z_{n_i}(0)))}\geq\frac{2\,C_6\varphi^{-6}(r)}{|z_{n_i}(\infty),z_{n_i}(0)|}. \tag{15}$$

Пусть $z\in E_i^c(r)$. Из утверждения $3'$ работы [3] следует, что существует кривая $\widetilde{\Gamma}(\widetilde{w}(z),\widetilde{w}(x_{n_i}^*))\subset\widetilde{w}(E_i^c(r))$, соединяющая точки $\widetilde{w}(z)$ и $\widetilde{w}(x_{n_i}^*)$, длина которой $\widetilde{l}(\widetilde{\Gamma}(\widetilde{w}(z),\widetilde{w}(x_{n_i}^*)))$ меньше, чем $C_3\,\varphi(r)$. Применяя соотношения (0.17) теоремы 1 из [3] и (15), получаем

$$|z-x_{n_i}^*|\leq\int_{w^{-1}(\widetilde{\Gamma}(\widetilde{w}(z),\widetilde{w}(x_{n_i}^*)))}ds=$$

$$=\int_{w^{-1}(\widetilde{\Gamma}(\widetilde{w}(z),\widetilde{w}(x_{n_i}^*)))}\frac{1+|w(x)|^2}{|w'(x)|}\,\frac{|w'(x)|}{1+|w(x)|^2}\,ds\leq$$

$$\leq\varphi_1(r)\,\frac{1+|w(x_{n_i}^*)|^2}{|w'(x_{n_i}^*)|}\,\widetilde{l}(\widetilde{\Gamma}(\widetilde{w}(z),\widetilde{w}(x_{n_i}^*)))\leq\frac{C_3}{2\,C_6}\varphi^7(r)\,\varphi_1(r)\,|z_{n_i}(\infty)-z_{n_i}(0)|,$$

$r\notin E$, откуда следует

$$E_i^c(r)\subset\left\{z:\quad\left|z-\frac{z_{n_i}(\infty)+z_{n_i}(0)}{2}\right|\leq\left(\frac{C_3}{2\,C_6}+1\right)\varphi^7(r)\,\varphi_1(r)|z_{n_i}(\infty)-z_{n_i}(0)|\right\},$$

$r\notin E$. Аналогичнм образом получаем, что для любого $z\in E_i^c(r)$

$$\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\geq\frac{2\,C_6\,\varphi^{-6}(r)\,\varphi_1^{-1}(r)}{|z_{n_i}(\infty)-z_{n_i}(0)|},\quad r\notin E.$$

Таким образом, утверждения теоремы 2 доказаны с некоторой абсолютной константой C.

Доказательство теоремы 1. Теорема 1 вытекает из теоремы 2. Рассмотрим функцию $w(z)\in M$ с положительными нулями и полюсами, удовлетворяющими условиям :

1) $N(r,\infty)$ имеет порядок ρ;
2) $|z_{n_i}(\infty)-z_{n_i}(0)|=\dfrac{1}{\Psi(n)}$, $n=1,2,...$,

где $\Psi(r)$ – положительная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$, для которой при $r > r_2$ справедливо неравенство

$$\Psi(n^{1/2}(r,\infty)) \geq \frac{2\,10^{C\varphi^7(r)}}{\tau(r)}.$$

Покажем, что для функции $w(z)$ все утверждения теоремы 1 справедливы. Мы выносим из рассмотрения те области $E_i^c(r)$ из теоремы1, для которых соответствующий индекс $n_i \leq [n^{1/2}(r,\infty)] + 1$, где $[x]$ – целая часть x. Согласно теореме 3, число таких областей $o(A(r))$, $r \to \infty$, $r \notin E$. Сохраняя обозначения теоремы 2 для остальных областей, мы получаем соотношения (1) — (3) теоремы 1 и неравенство

$$d\,(E_i^c(r)) \leq 2\,10^{C\varphi^7(r)}\,|z_{n_i}(\infty) - z_{n_i}(0)| = 2\,10^{C\varphi^7(r)}\,\frac{1}{\Psi(n_i)} \leq \frac{2\,10^{C\varphi^7(r)}}{\Psi(n^{1/2}(r,\infty))} \leq \tau(r),$$

$r \notin E$, которое следует из соотношения (9) теоремы 2.

Из неравенства (10) теоремы 2 для произвольного $z \in E_i^c(r)$, $i \geq 1$, имеем

$$\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2} \geq \frac{1}{\tau(r)}, \quad r \notin E.$$

Остается заметить, что, согласно соотношению $m(r,w) = O(\ln r)$, $r \to \infty$ (см. [5], гл. VI), функция имеет порядок ρ. Теорема 1 полностью доказана.

ABSTRACT. Present article gives an application of the Principle of Partitioning [3] related to the Principle of partitioning and to the Littlewood Property. It is shown that there exist classes of meromorphic functions whose a-points mainly occur in arbitrarily small sets, while spherical derivatives considered at these points are arbitrarily big.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Littlewood, "On some conjectural inequalities with applications to the theory of integral", J. London Math. Soc., 27, 1952, p. 387-393.
2. R. Nevanlinna, Eindeutige analitische Funktionen, Berlin, Springer. 1934.
3. Г. А. Барсегян, "Применения принципа разбиения мероморфных функций, 1 : свойство сравнимости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 3, стр. 2 – 45, 1997.
4. Б. И. Левин, Распределение корней целых функций, Гос. тех. издат., М., 1956.
5. А. А. Гольдберг, Распределение значений мероморфных функций, Наука, М., 1970.

3 июня 1997

Институт математики
НАН Армении
E–mail : barseg@instmath.sci.am