КЛАССИФИКАЦИЯ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С НЕПОСТОЯННОЙ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИЕЙ, ОГРАНИЧЕННОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

М. Хаяши

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 4, 1997

Пусть R – связанная риманова поверхность, и пусть $M^{\infty}(R)$ – множество всех мероморфных функций на R, ограниченных на бесконечности R. В этой заметке мы классифицируем римановы поверхности R, удовлетворяющие условию, что $M^{\infty}(R)$ содержит непостоянный элемент.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть R – произвольная риманова поверхность (связанная), а $H^{\infty}(R)$ – алгебра всех ограниченных аналитических функций на R. Обозначим через $M^{\infty}(R)$ множество всех мероморфных функций на R, ограниченных на бесконечности R. Другими словами, $f \in M^{\infty}(R)$ – мероморфная функция на R, ограниченная вне компактного множества. Мероморфные функции в $M^{\infty}(R)$ вместе со своими полюсами играют ключевую роль в изучении максимального идеального пространства алгебры $H^{\infty}(R)$ (см. [2],[3]), поэтому нас интересует класс функций $M^{\infty}(R)$.

В данной заметке мы классифицируем класс $P_{M^{\infty}}$ римановых поверхностей R, удовлетворяющих тому, что $M^{\infty}(R)$ содержит непостоянный элемент. Это выражается записью $M^{\infty}(R) \neq \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ – означает множество всех комплексных постоянных. Конечно, класс $P_{H^{\infty}}$ римановых поверхностей R, удовлетворяющих свойству $H^{\infty}(R) \neq \mathbf{C}$ более интересен. Однако, характеризовать класс $P_{H^{\infty}}$ – довольно трудная задача.

Если R – замкнутая риманова поверхность, то $M^{\infty}(R)$ совпадает с множеством всех рациональных функций на R. Поэтому $M^{\infty}(R) \neq \mathbf{C}$, согласно теореме Римана-Роха, и $H^\infty(R) = \mathbf{C}$, согласно принципу максимального модуля. Поскольку $H^\infty(R) \subset M^\infty(R)$, то класс P_{M^∞} строго шире класса P_{H^∞}. Используя конструкцию типа Мирберга, можно легко найти риманову поверхность R с бесконечным родом таким, что $R \in P_{M^\infty}$, но $R \notin P_{H^\infty}$. Поэтому, охарактеризовать класс P_{M^∞} так же сложно, как и класс P_{H^∞}. Тем не менее, оказывается возможным охарактеризовать класс P_{M^∞} в терминах P_{H^∞}. Этим мы и займемся в настоящей заметке.

Семейство $\mathcal{A}$ мероморфных функций на R называется ***разделяющим***, если для любых различных точек a, b из R существует функция f в $\mathcal{A}$ такая, что $f(a) \neq \neq f(b)$. Алгебра $\mathcal{A}$ мероморфных функций на R называется ***слабо разделяющей***, если семейство $\{f/g : f, g \in \mathcal{A},\ g \neq 0\}$ разделяющее.

На первом шагу мы ограничиваем наше внимание теми римановыми поверхностями R в P_{M^∞}, для которых $M^\infty(R)$ слабо разделяюще. Основная теорема гласит следующее :

Теорема 1. *Если R – риманова поверхность такая, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, то выполняется одно и только одно из следующих двух :*

1) существует непостоянная ограниченная аналитическая функция на R, т.е. *$H^\infty(R) \neq \mathbf{C}$;*

2) R конформно эквивалентно подобласти замкнутой римановой поверхности и $H^\infty(R) = \mathbf{C}$.

Замкнутое подмножество E на римановой поверхности называется AB-***пренебрегаемым***, если для каждого координатного круга U на R все ограниченные аналитические функции на $U \setminus E$ аналитически продолжаются на U (т.е. $U \cap E$ – множество с нулевой аналитической емкостью). Известно, что для подобласти R замкнутой римановой поверхности $H^\infty(R) = \mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда дополнение R является AB-пренебрегаемым (см. [5]). Для открытых римановых поверхностей с бесконечным родом этот простой факт вообще не имеет места.

Рассматривая компактификации Александрова, говорят, что две открытые римановы поверхности имеют одинаковую идеальную границу, если их бесконечно удаленные точки имеют нектоторую идентичную окрестность (в смысле конформной инвариантности). Свойство римановой поверхности называется *свойством ее идеальной границы*, если любые две римановы поверхности с одинаковой идеальной границей одновременно обладают или не обладают этим свойством. Хорошо известен классический результат [1], гласящий, что свойство $H^\infty(R) \neq \mathbf{C}$ не является свойством идеальной границы. С этой точки зрения интересен следующий результат :

Следствие 1. В категории римановых поверхностей R таких, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, существование непостоянной аналитической функции на R является свойством идеальной границы.

Теорему 1 мы докажем в следующем параграфе. В последнем параграфе §3 мы рассматриваем неслабый разделяющий случай, а также некоторые дальнейшие обобщения следствия 1.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что R – риманова поверхность такая, что $M^\infty(R)$ слабо разделяюще, и такая, что $H^\infty(R) = \mathbf{C}$. Доказательство завершится, когда мы покажем, что R – конформный эквивалент к подобласти замкнутой римановой поверхности.

Лемма 1. *Пусть $f \in M^\infty(R)$ – непостоянная функция. Тогда*

а) $1/(f-\lambda)$ принадлежит множеству $M^\infty(R)$ и все его полюсы простые, если модуль комплексного числа λ достаточно большой ;

б) существует функция g в $M^\infty(R)$ такая, что g разделяет точки полюсного множества $f^{-1}(\infty)$ функции f.

Доказательство. Существует компактное подмножество K такое, что $|f| \leq M$ на $R \setminus K$ для некоторой постоянной M. Поэтому $1/(f-\lambda) \in M^\infty(R)$, если $|\lambda| > M$. Пусть $f^{-1}(\infty) = \{a_1, \ldots, a_L\}$. При необходимости, заменяя постоянную M большей, мы можем предположить, что множество $\{p \in R : |f(p)| > M\}$ состоит из конечного числа раздельных кругов $V_1, \ldots, V_L$ и, что $z = \sqrt[n]{1/f}$

дает координату V_k, где n_k – порядок полюса a_k. Тогда все полюсы $1/(f-\lambda)$ становятся простыми, если $|\lambda| > M$. Этим доказывается пункт а).

Для доказательства пункта (б) рассмотрим алгебру функций, имеющих вид g/h $(g, h \in M^\infty(R),\ h \neq 0)$, согласно предположению, являющуюся разделяющей. Затем находим пару функций g_1 и h_1 в $M^\infty(R)$ таких, что $(g_1/h_1)(a_k) = k$ для $k = 1, \ldots, L$. При необходимости, умножая g_1 и h_1 на ту же самую степень f^n функции f, мы можем предположить, что g_1 имеет полюса во всех $a_1, \ldots, a_L$. Согласно (а), $1/(h_1 - \lambda) \in M^\infty(R)$, если λ достаточно большое. Таким образом, функция

$$g = \frac{g_1}{h_1 - \lambda} = \frac{1}{h_1/g_1 - \lambda/g_1}$$

принадлежит классу $M^\infty(R)$ и разделяет $f^{-1}(\infty)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если Φ – аналитическое отображение R в замкнутую риманову поверхность S, то $\Phi(R)$ плотно в S.*

Доказательство. Пусть g – любая ограниченная аналитическая функция на открытом подмножестве $\Phi(R)$ поверхности S. Тогда $g \circ \Phi$ принадлежит классу $H^\infty(R)$. Следовательно, $g \circ \Phi$ постоянна, и такой же является g. Это показывает, что $H^\infty(\Phi(R)) = \mathbf{C}$. Следовательно, $\Phi(R)$ должно быть плотным в S.

Ключевая идея доказательства содержится в следующей лемме, указывающей нам путь нахождения требуемой замкнутой римановой поверхности.

Лемма 3. *Пусть $f, g \in M^\infty(R)$. Тогда существует непостоянный многочлен P двух переменных такой, что $P(f, g) = 0$.*

Доказательство. Если f не имеет полюсов, то $f \in H^\infty(R)$. Из предположения $H^\infty(R) = \mathbf{C}$ следует, что $f = c(\mathrm{const})$. Поэтому требуемый многочлен задается по формуле $P(z, w) = c - z$. Теперь мы можем предположить, что и f и g имеют полюса. Выберем положительное целое число M такое, чтобы все полюса f и g имели наибольшим порядком M. Пусть $f^{-1}(\infty) \bigcup g^{-1}(\infty) = \{a_1, \ldots, a_L\}$. Для положительного целого N обозначим через $\mathcal{L}_N$ линейное пространство, состоящее из функций вида $f^j g^k$ $(1 \leq j, k \leq N)$. У каждого полюса a_j фиксируя координату, рассмотрим все коэффициенты главных частей в разложениях Лаурента функции

h в $\mathcal{L}_N$. Отсюда мы получаем линейное отображение из линейного пространства $\mathcal{L}_N$ в $2MNL$-мерное комплексное векторное пространство, где $2MNL$-мерность вытекает из того, что каждая функция $h \in \mathcal{L}_N$ имеет не больше L полюсов, и что все ее полюса имеют порядок не больше $2MN$. Заметим, что существуют N^2 функций вида $f^j g^k$ в $\mathcal{L}_N$. Следовательно, если N достаточно велико, то мы находим нетривиальную линейную комбинацию $F = \sum_{1 \leq j,k \leq N} c_{jk} f^j g^k$ в ядре линейного отображения. Из этого следует, что функция F не имеет полюсов, так что F – ограниченная аналитическая функция на R. Поскольку $H^\infty(R) = \mathbf{C}$, то имеем $F = c(\mathrm{const})$. Следовательно, искомый многочлен задается по формуле

$$P(z,w) = c - \sum_{1 \leq j,k \leq N} c_{jk} z^j w^k.$$

Теперь мы можем доказать теорему 1. Поскольку $H^\infty(R) = \mathbf{C}$, то каждая непостоянная функция f в $M^\infty(R)$ имеет полюс. Используя лемму 1, мы находим функцию f в $M^\infty(R)$ такую, что все полюса f простые, и функцию $g \in M^\infty(R)$ такую, что g разделяет точки $f^{-1}(\infty)$. Обозначим через $\hat{\mathbf{C}}$ риманову сферу. Полагая $\varphi(p) = (f(p), g(p))$, получим аналитическое отображение $\varphi: \ R \longmapsto \hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}}$. Согласно лемме 3, существует непостоянный многочлен P такой, что $P(f,g) = 0$. Мы можем предположить, что многочлен P неприводимый. Определим S как подмножество $\hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}}$ по формуле $S = \{(z,w) : P(z,w) = 0\}$, которая может иметь конечное число алгебраических особенностей. Существуют (связанная) замкнутая риамнова поверхность $\bar{S}$ и естественное аналитическое отображение $\pi_S : \bar{S} \to S$, которая биективна везде, кроме особенностей S. С учетом непрерывности отображения ψ теорема Римана об устранимой особенности позволит нам определить аналитическое отображение $\bar{\varphi}: \ R \longmapsto \bar{S}$ такое, что $\varphi = \pi_S \circ \bar{\varphi}$. Из леммы 2 следует, что дополнение образа $\bar{\varphi}(R)$ является AB-пренебрегаемым подмножеством $\bar{S}$. В частности, $\bar{\varphi}(R)$ плотно в $\bar{S}$. Мы утверждаем, что отображение $\bar{\varphi}$ инъективно на R. Пусть $f^{-1}(\infty) = \{a_1, \ldots, a_L\}$. При подходящем выборе f и g существуют раздельные круги V_j с центрами a_j ($j = 1, \ldots, L$) такие, что $\bar{\varphi}$ инъективно на $V = V_1 \cup \cdots \cup V_L$, и такие, что $\bar{\varphi}(V) \cap \bar{\varphi}(R \setminus V) = \emptyset$. Пусть $h \in M^\infty(R)$. Рассмотрим отображение $\psi : R \longmapsto \hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}}$ определяемое из $\psi(p) = (f(p), g(p), h(p))$. Опять существует неприводимый многочлен $Q(w,u)$, а образ лежит в подмножестве

$$T = \{(z,w,u) \in \hat{\mathbf{C}}^3 \ : \ P(z,w) = Q(w,u) = 0\}.$$

Если $\bar{T}$ – замкнутая риманова поверхность, соответствующая T, то мы получаем аналитическое отображение $\bar{\psi}$ из R на $\bar{T}$, и, аналогично, для ψ. Проекция T на S с использованием первых двух координат также порождает аналитическое отображение Π из $\bar{T}$ на $\bar{S}$ такое, что $\Pi \circ \bar{\psi} = \bar{\varphi}$. При необходимости, заменив $\bar{T}$ ее связанной компонентой, содержащей образ $\bar{\psi}(R)$, из леммы 2 получим, что отображение $\bar{\psi}$ имеет плотный образ и инъективно на множестве V. Следовательно, проекция Π должна быть биективной. Отсюда следует, что третья координатная функция u на T является рациональной функцией $R(z,w)$ от переменных z, w, так что $h = R(f,g)$. Поскольку h – любой элемент в $M^\infty(R)$, то точки R слабо разделены алгеброй, порожденной функциями f и g. Это показывает, что $\bar{\psi}$ инъективно на R, и мы завершаем доказательство.

§3. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Предположим, что $M^\infty(R) \neq \mathbf{C}$, где $M^\infty(R)$ необязательно слабо разделяюще. В этом случае (см. [4]) существуют тройка $(\bar{R}, \Phi, \mathcal{M})$ римановой поверхности $\bar{R}$, аналитическое отображение Φ из R в $\bar{R}$ и алгебра $\mathcal{M}$ мероморфных функций на $\bar{R}$ такие, что

а) $\mathcal{M} \circ \Phi = M^\infty(R)$;

б) $\mathcal{M}$ слабо разделяет точки $\bar{R}$;

в) $\bar{R}$ $\mathcal{M}$-максимально; точнее, если риманова поверхность, скажем, R', содержит $\bar{R}$ как свою правильную подобласть, то существует функция в $\mathcal{M}$, которая мероморфно не продолжается в R'.

Риманова поверхность $\bar{R}$ определяется однозначно с точностью до конформной эквивалентности и называется *решением Ройдена* R относительно алгебры $M^\infty(R)$. Легко видеть, что каждая функция в $\mathcal{M}$ принадлежит $M^\infty(\bar{R})$. В частности, $M^\infty(\bar{R})$ слабо разделяет точки $\bar{R}$. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $M^\infty(R) \neq \mathbf{C}$. Если $\bar{R}$ – решение Ройдена R относительно $M^\infty(R)$, то либо $H^\infty(\bar{R}) \neq \mathbf{C}$, либо $\bar{R}$ – замкнутая риманова поверхность. Более того, $M^\infty(R) \subset M^\infty(\bar{R}) \circ \Phi$.*

Для дальнейших обобщений интересно рассмотреть случай, когда $M^\infty(R\setminus K)$ является слабо разделяющим для компактного подмножества K из R. Является ли слабо разделяющим $M^\infty(R)$? Вопреки ожиданиям, ответ отрицателен.

Пример. Существует риманова поверхность R такая, что $H^\infty(R \setminus K)$ слабо разделяюще для компактного подмножества K, и, однако $H^\infty(R) = M^\infty(R) = \mathbf{C}$. Пример, который мы собираемся рассмотреть, является разновидностью примера 1 из работы [3]. Пусть $I_k = [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – последовательность взаимно раздельных интервалов таких, что $1 < a_k < a_{k+1}$ и $a_n \to \infty$. В каждом интервале I_k рассмотрим конечное число взаимно раздельных замкнутых подинтервалов и обозначим через J_k объединение этих подинтервалов. Положим

$$D_0 = \mathbf{C}, \quad D_n = \mathbf{C} \setminus (\cup_{k, k\neq n} I_k) \cup J_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Приступая к нашему построению, мы мысленно представляем определенный рисунок. А именно, мы располагаем лист D_0 внизу, лист D_1 наверху, а остальные D_n так, чтобы они монотонно стремились к нижнему листу D_0 ; Смысл этого рисунка прояснится позже. Вырезая нижний лист D_0 вдоль подинтервалов J_n, мы соединим все D_n с D_0 вдоль подинтервалов J_n. Полученную риманову поверхность обозначим через $S = \bigcup_{n=0}^\infty D_n$, и пусть $\Pi : S \to \mathbf{C}$ – естественное покрывающее отображение. Далее, используя только D_n и D_0, вырежем D_0 вдоль подинтервалов J_n и соединим D_n с D_0 вдоль подинтервалов J_n с тем, чтобы получить риманову поверхность $R_n = D_n \cup D_0$ для каждого n. Тождественно отображая D_n и D_0 из S и отобржая все остальные D_j $(j \neq 0, n)$ из S в нижний лист D_0 из R_n, мы получим аналитическое отображение $\Pi_n : S \to R_n$. Поскольку R_n – подобласть замкнутой римановой поверхности и $H^\infty(R_n) \neq \mathbf{C}$, то $H^\infty(S)$ разделяет точки S. Пусть

$$Q = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1/2\}, \quad \Gamma = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}.$$

В нашей конструкции ни одна из точек ветвления покрытия $\Pi : S \to \mathbf{C}$ не содержится внутри окружностей $\Pi^{-1}(\Gamma)$. Для $a \in \mathbf{C} \setminus \cup_{n=1}^\infty I_n$ имеем $\Pi^{-1}(a) = \{a_0, a_1, \ldots\}$, где мы полагаем, что $a_n \in D_n$. Начиная с верхнего листа D_1, увеличивая число подинтервалов J_n, мы далее можем полагать, что

$$\sup_{a\in\Gamma}\{|f(a_0)-f(a_n)| : f\in H^\infty(S\setminus\Pi^{-1}(Q)),\ |f|\leq 1\} < \frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Условие (3.1) именно то, что мы хотели объяснить рисунком. Теперь, выбирая замкнутый интервал I во внутренности замкнутого круга Q, положим $D_{-1} = \hat{\mathbf{C}}\setminus I$. Вырезая нижний лист D_0 из S вдоль интервала I, мы поперечно соединим лист D_{-1} с S вдоль I и получим новую риманову поверхность $R = S\cup D_{-1}$, обладающую требуемым свойством. Обозначим через $\Pi_* : R\to\hat{\mathbf{C}}$ покрывающее отображение. Тогда $K = (D_0\cap\Pi_*^{-1}(Q))\cup D_{-1}$ – компактное подмножество R. Так как $R\setminus K$ – подобласть S, то $H^\infty(R\setminus K)$ разделюще. Пусть $f\in H^\infty(R\setminus K)$ и $\Delta = \{z\in\mathbf{C} : |z|\leq 1\}$. Положим

$$\Delta_n = D_n\cap\Pi_*^{-1}(\Delta),\quad f_n = f\circ(\Pi_*|\Delta_n)^{-1}.$$

Используя принцип максимума, из (3.1) получим, что f_n равномерно сходится к f_0, и, следовательно, f_0 аналитически продолжается на весь единичный круг Δ. Таким образом, мы можем продолжить f на ограниченную аналитическую функцию на поверхности S. Предположим, что существует непостоянная функция $g\in M^\infty(R)$. При необходимости, заменяя g на $1/(g-\lambda)$ для подходящего комплексного числа λ, мы можем предположить, что g не имеет полюсов на границе компактного множества K. Тогда $g|_{R\setminus K}$ принадлежит $M^\infty(R\setminus K)$. Находя подходящую ненулевую функцию f_1 в $H^\infty(R\setminus K)$ с нулями в полюсах g, мы получим $f_2 = f_1 g\in H^\infty(R\setminus K)$. Как f_1 так и f_2 аналитически продолжаются на поверхность S, и, следовательно, $g|_{R\setminus K}$ продолжается на S мероморфно. Это означает, что для мероморфной функции g на Δ_0 не существует ветвлений. Поэтому имеем $g(a_0) = g(a_{-1})$ для любого $a\in\Delta$. Отсюда, далее, следует, что $g|_{D_{-1}}$ продолжается на непостоянную рациональную функцию G на римановой поверхности $\hat{\mathbf{C}}$. Из теоремы единственности теперь следует, что g совпадает с $G\circ\Pi_*$ на R, который никогда не принадлежит $M^\infty(R)$, так как Π_* бесконечно листная на плотном подмножестве R. Это противоречие показывает, что $M^\infty(R) = \mathbf{C}$.

В связи с вышеприведенным примером и следствием 1 мы делаем следующее

Предположение. Предположим, что существуют компактное подмножество K и открытое подмножество U из R такие, что $M^\infty(U)$ слабо разделяюще, и такие, что $R = K \cup U$ и $\partial K \subset \mathcal{P}(U)$. Тогда $M^\infty(R)$ является слабо разделяющим.

Здесь $\mathcal{P}(U)$ обозначает множество всех точек U, в которых функция в $M^\infty(U)$ существует и имеет полюс. Для вышеприведенного примера имеем $\mathcal{P}(S) = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$. Если мы соединим лист D_{-1} с листом D_n $(n \geq 1)$ на месте D_0, то $H^\infty(R)$ на полученной поверхности будет разделяющим. Этот пример обосновывает наше предположение.

С основными свойствами множества $\mathcal{P}(U)$ читатель может ознакомиться в работах [2] и [3].

Автор выражает благодарность профессору Т. В. Гамелину за его полезные советы и особенно за упрощение доказательства теоремы 1. Вначале автор обнаружил идею теоремы 1 в связи с теорией Бишопа-Ройдена, и его первоначальное доказательство основывалось на этом.

ABSTRACT. Let R be a connected Riemann surface and $M^\infty(R)$ be the set of all meromorphic functions on R bounded at the infinity of R. In this note we classify the Riemann surfaces R satisfying the property that $M^\infty(R)$ contains a nonconstant element.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ahlfors, "Remarks on the classification of open Riemann surfaces", Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I., vol. 87, p. 8, 1951.
2. T. W. Gamelin, M. Hayashi, "The algebra of the bounded analytic functions on a Riemann surface", J. Reine Angew. Math., vol. 382, pp. 49 – 73, 1987.
3. M. Hayashi, "The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann surface", J. Math. Soc. Japan, vol. 39, pp. 337 – 344, 1987.
4. H. L. Royden, "Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces", Acta Math., vol. 114, pp. 113 – 142, 1965.
5. L. Sario, M. Nakai, Classification Theory of Riemann Surfaces, Springer, NY-Berlin, 1970.

22 апреля 1997

Университет Хоккайдо,
Саппоро, Япония