О НУЛЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МАЛОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дж. Майлс, Дж. Росси

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 3, 1997

§1. ВВЕДЕНИЕ

Если f – целая функция, вещественная на вещественной оси, с только вещественными нулями, то очевидным следствием теоремы Ролля является то, что считывающая функция нулей функции f' асимптотически не меньшего порядка, чем считывающая функция нулей функции f. Рассматривая неопределенные интегралы от e^P, где P непостоянный многочлен, мы видим, что, вообще говоря, это не так.

В этой заметке мы получаем связь между считывающими функциями нулей f и f', когда порядок функции f достаточно мал. Согласно результату, полученному в работе [2], если f – целая функция с порядком, меньшим чем 1/2, то дефект Неванлинны нуля функции f'/f удовлетворяет формуле

$$\delta(0, f'/f) \leq 1 - \cos\pi\rho. \tag{1.1}$$

Поэтому тем более для случая, когда нули функции f простые, имеем

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,0,f')}{N(r,0,f)} \geq \cos\pi\rho. \tag{1.2}$$

(В данной работе мы предполагаем знакомство читателя с терминами теории Неванлинны.) Константа $\cos\pi\rho$ получается в ходе доказательства, оценка же (1.1) не являетая точной. (Действиельно У. Х. Дж. Фуксом установлено, что $\delta(0, f'/f) = 0$, если $\rho < 1/2$.) В данной замете мы получаем улучшенную оценку для неинтегрированной версии (1.2), когда ρ достаточно мало.

Теорема 1.1. *Если f – целая функция положительного порядка $\rho < \dfrac{1}{32\sqrt{2e}}$, то*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n(r,0,f')}{n(r,0,f)} \geq 1 - 32\sqrt{2e}\,\rho e^{-1/256\rho}. \tag{1.3}$$

Некоторые замечания естественны. Заметим, что выбор ρ делает правую часть (1.3) положительной. Для малых $\rho > 0$

$$1 - 32\sqrt{2e}\,\rho e^{-1/256\rho} > \cos \pi\rho,$$

и поэтому мы можем рассматривать теорему 1.1 как неинтегрированное улучшение формулы (1.2).

§2. ЛЕММЫ

Нам понадобятся две леммы, доказанные также в других работах.

Лемма 2.1. *(см. [4]) Пусть $n(t)$ – неубывающая, принимающая целые значения функция положительно-конечного порядка ρ, непрерывная справа. Пусть $M > 3$, $R_0 > 0$ такое, что $n(R_0) > 0$ и $n(t) = 0$ при $0 \leq t < R_0$. Тогда существует множество $E = E_M \subset [R_0, \infty)$ с логарифмической плотностью не меньшей чем $1 - 3/M$ и такое, что если $r \in E$, то*

$$n(t) \leq n(r)(t/r)^{2M(2\rho)}, \quad t \geq r \tag{2.1}$$

и

$$n(t) \geq n(r)(t/r)^{2M(2\rho)}, \quad R_0 \leq t \leq r. \tag{2.2}$$

Отметим, что лемма 2.1 слегка изменена по сравнению с леммой в [4], стр. 198. Та лемма установлена для функций конечных порядков, включая 0. Постоянная 2ρ в нашей лемме 2.1 играет ту же роль, что $\rho + 1$ в той лемме.

Следущая лемма – неравенство (2.7) в работе [3] (см. также лемму 3 в [1]).

Лемма 2.2. *Пусть f – целая функция, и пусть $[c,d] \subset [0, 2\pi]$. Тогда*

$$\int_c^d \left| \mathrm{Re} \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_c^d \left| \mathrm{Re} \left(1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right) \right| d\theta + 2\pi \leq$$

$$\leq \int_c^d \left| \mathrm{Re} \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right| d\theta + 2\pi + (d - c).$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Запишем f' в виде канонического произведения

$$f'(z) = z^p \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right).$$

Хорошо известно, что если $r \neq |z_\nu|$ для всех ν, то

$$\log|f'(re^{i\theta})| = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m(r, f')e^{im\theta}, \tag{3.1}$$

где $c_0(r, f') = N(r, 0, f')$ и

$$c_m(r, f') = \begin{cases} -\frac{1}{2m} \sum\limits_{|z_\nu|>r} (r/z_\nu)^m - \frac{1}{2m} \sum\limits_{0\neq|z_\nu|<r} (\overline{z_\nu}/r)^m & \text{при } m \geq 1, \\ \overline{c_{-m}(r, f')} & \text{при } m \leq -1. \end{cases}$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\arg f'(re^{i\theta})) = r\frac{\partial}{\partial r}(\log|f'(re^{i\theta})|) = \mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}.$$

Поэтому почленно дифференцируя (3.1) (ср. с [4], (2.10)), получаем

$$\mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_m(r, f')e^{im\theta}, \tag{3.2}$$

где $b_0(r, f') = n(r, 0, f')$ и

$$b_m(r, f') = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum\limits_{|z_\nu|>r} (r/z_\nu)^m + \frac{1}{2} \sum\limits_{|z_\nu|<r} (\overline{z_\nu}/r)^m & \text{при } m \geq 1, \\ -\overline{b_{-m}(r, f')} & \text{при } m \leq -1. \end{cases}$$

Теперь оценим b_m для $m \geq 1$. Записывая $n(t) = n(t, 0, f') - n(0, 0, f')$, получим

$$|b_m(r, f')| \leq \frac{1}{2}\left(\int_r^\infty (r/t)^m\, dn(t) + \int_0^r (t/r)^m\, dn(t)\right).$$

Положим $M = 4$ в лемме 2.1 и заметим, что множество E неограничено. Применяя лемму 2.1 к $n(t)$ и интегрируя по частям, для $r \in E$ получим

$$|b_m(r, f')| \leq \frac{m}{2}\, n(r)\left(\int_r^\infty (r/t)^{(m-16\rho)}\frac{dt}{t} - \int_{R_0}^r (t/r)^{(m+16\rho)}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{m}{2}n(r)\left(\frac{32\rho}{m^2 - (16\rho)^2} + \frac{(R_0/r)^{(m+16\rho)}}{m + 16\rho}\right) \leq \frac{32\rho\, n(r, 0, f')}{m},$$

где на последнем шагу мы взяли r достаточно большим и учли, что $(16\rho)^2 < 1/2$.

Таким образом, для всех $m \neq 0$

$$|b_m(r, f')| < \frac{128\rho n(r, 0, f')}{|m|}. \tag{3.3}$$

Пусть $k = e^{-1+1/128\rho}$, перепишем (3.2) в виде

$$\mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

где

$$\mathrm{I} = n(r,0,f'), \quad \mathrm{II} = \sum_{0<|m|\le k} b_m(r,f')e^{im\theta}, \quad \mathrm{III} = \sum_{|m|>k} b_m(r,f')e^{im\theta}.$$

Из (3.3) имеем, что для $r \in E$ и $0 \le \theta \le 2\pi$ справедливы неравенства

$$|\mathrm{II}| \le 32\rho\, n(r,0,f') \sum_{0<|m|\le k} \frac{1}{|m|} \le 64\rho\, n(r,0,f')(1+\log k).$$

Поэтому согласно определению k

$$\sum_{|m|\le k} b_m(r,f')e^{im\theta} > \frac{n(r,0,f')}{2} > 0 \tag{3.4}$$

и, таким образом

$$||\mathrm{I}+\mathrm{II})||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{|m|\le k} b_m(r,f')e^{im\theta}\, d\theta = n(r,0,f'). \tag{3.5}$$

(Все нормы взяты относительно нормированной лебеговой меры на $(0,2\pi)$.) Из (3.3) для $r \in E$ также имеем

$$||\mathrm{III}||_1 \le ||\mathrm{III}||_2 = \left(\sum_{|m|>k} |b_m(r,f')|^2\right)^{1/2} \le 32\sqrt{2e}\,\rho\, n(r,0,f')e^{-1/256\rho}.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что $\sum_{|m|>k} \frac{1}{m^2} < \frac{2}{k}$. Отсюда и из (3.5) получим, что для $r \in E$

$$\left\|\mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\|_1 \le n(r,0,f')(1+32\sqrt{2e}\,\rho e^{-1/256\rho}). \tag{3.6}$$

Применяя лемуу 2.2 и формулу (3.6) для $r \in E$, получим

$$n(r,0,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\, d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| d\theta \le$$

$$\le 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| d\theta \le 2 + n(r,0,f')(1+32\sqrt{2e}\,\rho e^{-1/256\rho}),$$

завершая доказательство теоремы 1.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Barsegian, "On geometric structure of image of disks under mappings by meromorphic functions", Math. Sbornic, vol. 106(148), no. 1, p. 35 – 43, 1978.
2. A. Eremenko, J. Langley, J. Rossi, "On the zeros of meromorphic functions of the form $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z-z_k}$", J. Analyse Math., vol. 62, pp. 271 – 286, 1994.
3. S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi, "On the growth of solutions of certain linear differential equations", Anal. Acad. Sci. Fenn., vol. 17, pp. 343 – 365, 1992.
4. J. Miles, J. Rossi, "Linear combinations of logarithmic derivatives of entire functions with applications to differential equations", Pacific J. Math., vol. 174, pp. 195 – 214, 1996.

22 апреля 1997

Университет Иллинойса
Урбана, ИЛ, США;
joe@math.uiuc.edu

Вирджиниа Тех,
Блэксбург, ВА, США
rossi@math.vt.edu