ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ P-АДИЧНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пей-Чу Ху, Чунг-Чун Янг[1]

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 3, 1997

В настоящей работе мы изучаем теорию Неванлинны p-адичных мероморфных функций. Мы доказываем p-адичные аналоги теорем Ру-Столла для соотношения дефектов движущихся мишеней и теоремы Ху-Янга о дифференциальных многочленах типа второй основной теоремы. Мы также находим множество единственности значений для p-адичных целых функций с 4 элементами и множество единственности значений для p-адичных мероморфных функций с 12 элементами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Теория Неванлинны (или теория распределения значений) столь красива, что естественен интерес к выяснению того как будет выглядеть такая теория в p-адичном случае. Существуют две "основные теоремы" и соотношения дефектов, занимающие центральное место в теории Неванлинны. H. H. Khóai [6], H. H. Khóai, M. V. Quang [8] и A. Boutabaa [1] доказали p-адичные аналоги двух "основных теорем" и соотношений дефектов теории Неванлинны. H. H. Khóai [7], W. Cherry и Zh. Ye [2] начали изучать некоторую переменную p-адичную теорию Неванлинны и доказали соотношение дефектов гиперплоскостей в общем случае. В данной работе мы объединяем теории Уимана-Валирона и Неванлинны для p-адичных мероморфных функций и показываем, что представление Столла [14] метода Чуанга-Стейнмеца для доказательства соотношения дефектов малых функций вместе с доказательством Широсаки [13] теоремы Ру-Столла [12] и

[1] В финансировании работы второго автора принимало участие UGC Grant of Hong Kong.

использованием метода Картана могут дать p-адичный аналог теоремы Ру-Столла для движущихся мишеней (см. теорему 3.1).

Распределение значений дифференциальных многочленов является важным пунктом в теории Неванлинны. П. К. Ху и К. К. Янг [5] доказали вторую основную теорему о дифференциальных многочленах, которая является объединением вторых основных теорем Неванлинны, Мийю, Хионга и Ху. Здесь мы получаем p-адичный аналог этого результата (см. теорему 4.1).

Для непостоянной мероморфной функции f на $\mathbf{C}$ и множества $S \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ мы определяем

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{mz : \ f(z) = a \text{ с кратностью } \ m\}$$

и

$$\overline{E}_f(S) = \bigcup_{a \in S} \{z : \ f(z) = a \text{ без учета кратностей }\}.$$

Множество $S \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ называется ***множеством единственности значений для мероморфных функций*** (МЕЗМ), если для любой пары непостоянных мероморфных функций f и g на $\mathbf{C}$ из условия $E_f(S) = E_g(S)$ следует $f = g$. Множество $S \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ называется ***множеством единственности значений для целых функций*** (МЕЗЦ), если для любой пары непостоянных целых функций f и g на $\mathbf{C}$ из условия $E_f(S) = E_g(S)$ следует $f = g$. Классические теоремы Неванлинны показывают, что $f = g$, если $\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j)$ для различных значений $a_1, \ldots, a_5$, и что f – преобразование Мёбиуса функции g, если $E_f(a_j) = E_g(a_j)$ для различных значений $a_1, \ldots, a_4$. Гросс и Янг [4] показали, что множество

$$S = \{z \in \mathbf{C} : \ z + e^z = 0\}$$

является МЕЗЦ. Недавно Йи ([15], [16]), Ли и Янг ([9], [10]), Мюес и Рейндерс [11], Франк и Рейндерс [3] нашли МЕЗЦ и МЕЗМ с конечно-многими элементами. Ли и Янг ввели обозначение

$$\lambda_M = \inf\{\#S : \ S - \text{ МЕЗМ }\},$$

$$\lambda_E = \inf\{\#S : \ S - \text{ МЕЗЦ }\},$$

где $\#S$ – кардинальность множества S. Давно известными лучшими оценками снизу и сверху являются

$$5 \leq \lambda_E \leq 7, \quad 6 \leq \lambda_M \leq 11.$$

Для p-адичной мероморфной (или целой) функции f на $\mathbf{C}_p$ мы можем аналогично определить $E_f(S)$, $\overline{E}_f(S)$ для множества $S \subset \mathbf{C}_p \cup \{\infty\}$ и ввести обозначения λ_M и λ_E. В данной работе мы получаем $\lambda_E \leq 4$ для p-адичных целых функций (см. теорему 5.4) и $\lambda_M \leq 12$ для p-адичных мероморфных функций (см. теорему 5.5). Для двух непостоянных p-адичных мероморфных функций f и g на $\mathbf{C}_p$ мы также доказываем равенство $f = g$, если $\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j)$ для различных значений a_1, a_2, a_3, a_4, или $E_f(a_j) = E_g(a_j)$ для различных значений a_1, a_2, a_3.

§2. ТЕОРИЯ ВИМАНА–ВАЛИРОНА p-АДИЧНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть p – простое число, $\mathbf{Q}_p$ – поле p-адичных чисел, и пусть $\mathbf{C}_p$ – p-адичное пополнение алгебраического замыкания поля $\mathbf{Q}_p$. Абсолютное значение $|\cdot|_p$ в $\mathbf{C}_p$ нормировано таким образом, что $|p|_p = p^{-1}$. Далее мы используем обозначение ord_p для аддитивного значения на $\mathbf{C}_p$.

Напомним, что в метрическом пространстве, метрика которой порождена неархимедовой нормой, последовательность является последовательностью Коши, тогда и только тогда, когда разница между соседними членами стремится к нулю; и если метрическое пространство полно, то бесконечная сумма сходится тогда и только тогда, когда ее главный член стремится к нулю. Так что, если рассмотреть выражения вида

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, \quad (a_n \in \mathbf{C}_p),$$

мы можем приписать значение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ функции $f(z)$, если только для z, заменившей Z, выполняется условие $|a_n z^n|_p \to 0$. Определим "радиус ρ сходимости" из выражения

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \to \infty} \sup |a_n|_p^{1/n}.$$

Тогда ряд сходится, если $|z|_p < \rho$ и расходится, если $|z|_p > \rho$. Функцию $f(z)$ называют p-адично аналитической на $B(\rho)$, где

$$B(\rho) = \{z \in \mathbf{C}_p : \ |z|_p < \rho\}.$$

Если $\rho = \infty$, то функцию $f(z)$ называют p-адично целой на $\mathbf{C}_p$.

Пусть на $B(\rho)$ $(0 < \rho \leq \infty)$ задана p-адично аналитическая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbf{C}_p).$$

Суть метода Вимана-Валирона заключается в анализе поведения функции с помощью ***максимального члена*** :

$$\mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n|_p r^n, \quad 0 < r = |z|_p < \rho,$$

вместе с ***центральным индексом*** :

$$\nu(r, f) = \max_{n \geq 0} \{n : \ |a_n|_p r^n = \mu(r, f)\}.$$

Определим

$$\nu(0, f) = \lim_{r \to 0} \nu(r, f).$$

Лемма 2.1. *Центральный индекс $\nu(r, f)$ возрастает при $r \to \rho$ и удовлетворяет формуле*

$$\log \mu(r, f) = \log |a_{\nu(0,f)}|_p + \int_0^r \frac{\nu(t, f) - \nu(0, f)}{t} dt + \nu(0, f) \log r, \quad 0 < r < \rho.$$

Доказательство. Возьмем $0 < r_1 < r_2 < \rho$ и положим $\nu_1 = \nu(r_1, f)$. Мы докажем неравенство

$$|a_n|_p r_2^n < |a_{\nu_1}|_p r_2^{\nu_1}$$

для $n < \nu_1$, откуда следует $\nu(r_2, f) \geq \nu_1$. Оно чевидно, когда $a_n = 0$. Когда $a_n \neq 0$, из неравенства

$$|a_n|_p r_1^n \leq |a_{\nu_1}|_p r_1^{\nu_1}$$

получаем

$$\log |a_n|_p + n \log r_1 \leq \log |a_{\nu_1}|_p + \nu_1 \log r_1,$$

т.е.

$$\frac{\log|a_n|_p - \log|a_{\nu_1}|_p}{\nu_1 - n} \leq \log r_1 < \log r_2,$$

откуда следует наше утверждение.

Без потери общности мы докажем формулу для случая $|f(0)|_p = |a_0|_p = 1$. Предположим $\nu(t,f) = \nu_{k-1}$ для $t \in [r_{k-1}, r_k)$ $(k = 1, 2, ...)$, где $0 = \nu_0 < \nu_1 < \cdots$; $0 = r_0 < r_1 < \cdots$. Легко можно установить следующие соотношения :

$$|a_{\nu_k}|_p r_k^{\nu_k} = |a_{\nu_{k-1}}|_p r_k^{\nu_{k-1}}, \quad k = 1, 2, ...,$$

исходя из непрерывности функции $|a_{\nu_k}|_p r^{\nu_k}$ в r_k. Заметим, что если $r_n \leq r < r_{n+1}$, то

$$\mu(r,f) = |a_{\nu_n}|_p r^{\nu_n}.$$

Получаем

$$\int_0^r \frac{\nu(t,f)}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{r_{k-1}}^{r_k}\frac{\nu(t,f)}{t}\,dt + \int_{r_n}^{r}\frac{\nu(t,f)}{t}\,dt = \sum_{k=2}^{n}\nu_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}} + \nu_n\log\frac{r}{r_n} =$$

$$= \log\left[\frac{|a_{\nu_n}|_p r^{\nu_n}}{|a_{\nu_n}|_p r_n^{\nu_n}}\prod_{k=2}^{n}\frac{|a_{\nu_{k-1}}|_p r_k^{\nu_{k-1}}}{|a_{\nu_{k-1}}|_p r_{k-1}^{\nu_{k-1}}}\right] = \log[|a_{\nu_n}|_p r^{\nu_n}] = \log\mu(r,f),$$

т.е нашу формулу.

Следующую лемму технического характера можно найти в [2].

Лемма 2.2. *(Подготовительная теорема Вейерштрасса) Существуют единственный многочлен P порядка $\nu(r,f)$ и p-адичная аналитическая функция g на $B[r]$ такие, что $f = gP$, где*

$$B[r] = \{z \in \mathbf{C}_p |\ |z|_p \leq r\}.$$

Далее, g не имеет нулей внутри $B[r]$, а P имеет ровно $\nu(r,f)$ нулей (с учетом кратностей) на $B[r]$.

Через $n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ обозначим количество нулей (с учетом кратностей) функции f с абсолютным значением $\leq r$ и определим *функцию валентности* функции f для 0 из равенства

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f}) - n(0,\frac{1}{f})}{t}\,dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right)\log r, \quad 0 < r < \rho.$$

Лемма 2.2 показывает, что $n(r,\frac{1}{f}) = \nu(r,f)$. Из леммы 2.1 следует *формула Йенсена* :

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right) = \log\mu(r,f) - \log\left|a_{n[0,\frac{1}{f})}\right|_p. \qquad (1)$$

Обозначим количество различных нулей функции f на $B[r]$ через $\overline{n}(r,\frac{1}{f})$ и определим

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,\frac{1}{f}) - \overline{n}(0,\frac{1}{f})}{t}\,dt + \overline{n}\left(0,\frac{1}{f}\right)\log r, \quad 0 < r < \rho.$$

Для каждого n начертим граф $\gamma_n(t)$, который описывает $ord_p(a_nz^n)$ как функцию от $t = ord_p(z)$. Тогда $\gamma_n(t)$ является прямой с наклоном n. Обозначим через $\gamma(t,f)$ границу пересечения всех полуплоскостей, лежащих под кривыми $\gamma_n(t)$. Эта кривая называется многоугольником Ньютона функции $f(z)$ (см. [8]). Точки t, в которых $\gamma(t,f)$ имеет вершины, называются *критическими точками* функции $f(z)$. Конечный отрезок $[\alpha,\beta]$ содержит только конечное множество критических точек. Ясно, что если t – критическая точка, то $ord_p(a_n) + nt$ достигает своего минимума не менее чем для двух значений n. Очевидно, имеем

$$\mu(r,f) = p^{-\gamma(t,f)}, \quad r = p^{-t}.$$

Основным свойством многоугольника Ньютона является то, что если $t = ord_p(z)$ не является критической точкой, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t,f)},$$

откуда следует, что $|f(z)|_p = \mu(r,f)$. Далее, заметим, что если h – другая p-адичная аналитическая функция на $B(\rho)$, то

$$\mu(r,fh) = \mu(r,f)\mu(r,h). \qquad (2)$$

Под *мероморфной функцией* f на $B(\rho)$ будем подразумевать отношение $\frac{g}{h}$ двух p-адичных аналитических функций g и h таких, что g и h не имеют простых факторов в кольце p-адичных аналитических функций на $B(\rho)$. Заметим, что (2) выполняется и, что наибольший простой делитель любых двух p-адичных аналитических функций существует. Мы можем единственным образом расширить μ на мероморфную функцию $f = \frac{g}{h}$, полагая

$$\mu(r,f) = \frac{\mu(r,g)}{\mu(r,h)}.$$

Положим также

$$\gamma(t,f) = \gamma(t,g) - \gamma(t,h).$$

Ясно, что если $t = ord_p(z)$ не является критической точкой для $f(z)$, т.е. t не является критической точкой для $g(z)$ или $h(z)$, то

$$|f(z)|_p = p^{-\gamma(t,f)} = \mu(r,f).$$

Определим *считывающую функцию* $n(r,f)$ и *функцию валентности* $N(r,f)$ функции f для полюсов :

$$n(r,f) = n\left(r,\frac{1}{h}\right), \quad N(r,f) = N\left(r,\frac{1}{h}\right).$$

Применяя (1) для g и h, получим *формулу Йенсена* :

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right) - N(r,f) = \log\mu(r,f) - C_f, \tag{3}$$

где C_f – постоянная, зависящая только от f. Определим

$$m(r,f) = \log^+\mu(r,f) = \max\{0, \log\mu(r,f)\}.$$

Наконец, определим *характеристическую функцию* :

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Ниже мы приводим некоторые основные факты, используемые в следующих параграфах.

Лемма 2.3. *(Первая основаная теорема, [1], [8]). Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда для любого $a \in \mathbf{C}_p$ имеем*

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) + N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1), \quad r \to \rho.$$

Лемма 2.4. *(Лемма о логарифмической производной, [1], [2], [8]) Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$. Тогда*

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right) = O(1), \quad r \to \rho.$$

Лемма 2.5. *(Вторая основная теорема, [1], [2], [8]) Пусть f – непостоянная мероморфная функция в $B(\rho)$, и пусть $a_1, ..., a_q$ – различные номера $\mathbf{C}_p$. Тогда*

$$(q-1)T(r,f) \le N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r,f) - \log r + O(1),$$

где

$$N_1(r,f) = 2N(r,f) - N(r,f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

Далее, имеем

$$N(r,f) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) - N_1(r,f) \le \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right),$$

$$\sum_{a \in \mathbf{C}_p \cup \{\infty\}} \delta_f(a) \le 2,$$

где

$$\delta_f(a) = 1 - \lim_{r\to\infty} \sup \frac{N(r, \frac{1}{f-a})}{T(r,f)}.$$

§3. СООТНОШЕНИЕ ДЕФЕКТОВ ДЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ МИШЕНЕЙ

Обозначим через $\mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p)$ проективное n-пространство над $\mathbf{C}_p$. Под *голоморфной кривой* $f : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p)$ будем иметь ввиду эквивалентный класс из $(n+1)$ p-адичных целых функций

$$\tilde{f} = (f_0, ..., f_n) : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbf{C}_p^{n+1}$$

таких, что $f_0, ..., f_n$ не имеют простых факторов в кольце p-адичных целых функций на $\mathbf{C}_p$ и таких, что не все f_j тождественно равны нулю. Здесь $\tilde{f}$ также называется приведенным представлением функции f. Запишем

$$\| \tilde{f}(z) \| = \max_k |f_k(z)|_p.$$

Тогда *характерстическая функция*

$$T(r,f) = \log \| \tilde{f}(z) \|, \quad |z|_p = r$$

определена с точностью до $O(1)$.

Пусть $g : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p)$ – другая голоморфная кривая с приведенным представлением $\tilde{g} = (g_0, ..., g_n)$. Пара (f, g) называется *свободной*, если

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle = g_0 f_0 + \cdots + g_n f_n \not\equiv 0.$$

Предположим, что пара (f, g) свободна и положим

$$N_f(r, g) = N\left(r, \frac{1}{\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle}\right), \quad m_f(r, g) = -\log \frac{\mu(r, \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle)}{||\tilde{f}(z)|| \cdot ||\tilde{g}(z)||},$$

где $|z|_p = r$. Тогда из формулы Йенсена следует

$$N_f(r, g) + m_f(r, g) = T(r, f) + T(r, g) + O(1).$$

Дефект функции f для g определяется следующим образом :

$$\delta_f(g) = 1 - \lim_{r \to \infty} \sup \frac{N_f(r, g)}{T(r, f) + T(r, g)}.$$

Пусть для $q \geq n$

$$g_j : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p), \quad j = 0, ..., q$$

будут $q+1$-голоморфными кривыми с приведенными представлениями

$$\tilde{g} = (g_{j0}, ..., g_{jn}) : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbf{C}_p^{n+1}.$$

Скажем, что семейство $\{g_j\}$ находится в основном положении, если $det(g_{j_k l}) \not\equiv 0$ для любых $j_0, ..., j_n$ с $0 \leq j_0 < \cdots < j_n \leq q$. Если это так, то мы можем предполагать, что $g_{j0} \not\equiv 0$, $j = 0, ..., q$, при необходимости изменив однородную координатную систему $\mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p)$. Положим

$$\zeta_{jk} = \frac{g_{jk}}{g_{j0}}, \quad \zeta_{j0} = 1.$$

Пусть $\mathcal{G}$ – наименьшее подполе, содержащее

$$\{\zeta_{jk} | \ 0 \leq j \leq q, \ 0 \leq k \leq n\} \cup \mathbf{C}_p$$

мероморфного поля функций на $\mathbf{C}_p$. Голоморфная кривая f называется *невырожденной* над $\mathcal{G}$, если $f_0, ..., f_n$ линейно независимы над $\mathcal{G}$. Имеем следующее *соотношение дефектов* :

Теорема 3.1. *Пусть заданы голоморфные кривые*

$$f, g_j : \mathbf{C}_p \longmapsto \mathbb{P}^n(\mathbf{C}_p), \quad j = 0, ..., q,$$

причем $q \geq n$. Если семейство $\{g_j\}$ находится в основном положении так, что

$$T(r, g_j) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty, \quad j = 0, ..., q,$$

и если f невырождена над $\mathcal{G}$, то

$$\sum_{j=0}^{q} \delta_f(g_j) \leq n + 1.$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$T(r, h) = o(T(r, f)), \quad r \to \infty, \quad h \in \mathcal{G}.$$

Возьмем целое m. Пусть $\mathcal{L}(m)$ – векторное пространство, порожденное над $\mathbf{C}_p$ как

$$\left\{ \prod_{j,k} \zeta_{jk}^{m_{jk}} : m_{jk} \in \mathbb{Z}_+ \ (0 \leq j \leq q,\ 0 \leq k \leq n),\ \sum_{j,k} m_{jk} = m \right\},$$

где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Поскольку $\zeta_{j0} = 1$, то $\mathcal{L}(m) \subset \mathcal{L}(m+1)$. Следовательно, мы можем выбрать базис $\{b_1, ..., b_t\}$ пространства $\mathcal{L}(m+1)$ такой, что $\{b_1, ..., b_s\}$ – базис пространства $\mathcal{L}(m)$, где

$$t = \dim \mathcal{L}(m+1), \quad s = \dim \mathcal{L}(m).$$

Поскольку f невырождена над $\mathcal{G}$, то мы можем заключить, что

$$\varphi = (b_j f_k : 1 \leq j \leq t,\ 0 \leq k \leq n)$$

линейно независимы над $\mathbf{C}_p$. Положим

$$F_k = \frac{\langle \tilde{f}, \tilde{g}_k \rangle}{g_{k0}} = f_0 + \zeta_{k1} f_1 + ... + \zeta_{kn} f_n, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Мы также легко можем показать, что

$$\Phi = (b_j F_k : 1 \leq j \leq s,\ 0 \leq k \leq n)$$

линейно независимы над $\mathbf{C}_p$. Поскольку $b_j F_k$ $(1 \le j \le s,\ 0 \le k \le n)$ является линейной комбинацией векторов $b_j f_k$ $(1 \le j \le t,\ 0 \le k \le n)$ над $\mathbf{C}_p$, то мы можем выбрать

$$\Psi = \left(\sum_{1 \le u \le t, 0 \le v \le n} c_{jk}^{uv} b_u f_v \ :\ c_{jk}^{uv} \in \mathbf{C}_p,\ s+1 \le j \le t,\ 0 \le k \le n \right)$$

так, чтобы $(\Phi, \Psi) = \varphi C$ имело место для некоторого $C \in GL((n+1)t; \mathbf{C}_p)$. Тогда будем иметь равенство детерминантов Вронского :

$$W(\Phi, \Psi) = W(\varphi) \cdot det(C).$$

Выберем мультииндекс $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$ с различными $\{\alpha_0, ..., \alpha_n\} \subset \{0, ..., q\}$. Применим вышесказанное к $F_{\alpha_0}, ..., F_{\alpha_n}$ вместо $F_0, ..., F_n$. Затем введем обозначения Φ_α и Ψ_α для Φ и Ψ, c_α для $det(C)$. Положим

$$W_\alpha = W(\Phi_\alpha, \Psi_\alpha), \quad W = W(\varphi).$$

Тогда будем иметь $W_\alpha = c_\alpha W$. Теперь возьмем различные индексы $\alpha_0, ..., \alpha_n = \beta_0, ..., \beta_{q-n}$ такие, что

$$|F_{\alpha_0}(z)|_p \le \cdots \le |F_{\alpha_n}(z)|_p \le |F_{\beta_1}(z)|_p \le \cdots \le |F_{\beta_{q-n}}(z)|_p \le \infty.$$

Поскольку $\{g_j\}$ находится в основном положении, то мы имеем представления

$$f_k = \sum_{j=0}^{n} A_{kj}^{\alpha} F_{\alpha_j}, \quad A_{kj}^{\alpha} \in \mathcal{G}, \quad k = 0, ..., n.$$

Следовательно

$$|f_k(z)|_p \le \max_j |A_{kj}^{\alpha}(z)|_p |F_{\alpha_j}(z)|_p \le \{\max_j |A_{kj}^{\alpha}(z)|_p\} |F_{\beta_l}(z)|_p$$

для $k = 0, ..., n, l = 0, ..., q - n$. Таким образом, получаем

$$\| \tilde{f}(z) \| \le A(z) |F_{\beta_l}(z)|_p, \quad l = 0, ..., q - n,$$

где

$$A(z) = \max_{k,j} |A_{kj}^{\alpha}(z)|_p.$$

Из $W_\alpha = c_\alpha W$ получим

$$\log \frac{|F_0 \cdots F_q|_p^s}{|W|_p} = \log |F_{\beta_1} \cdots F_{\beta_{q-n}}|_p^s - \log \frac{|W_\alpha|_p}{|F_{\alpha_0} \cdots F_{\alpha_n}|_p^s} + c_1 =$$

$$= \log |F_{\beta_1} \cdots F_{\beta_{q-n}}|_p^s - \log D_\alpha - (n+1)(t-s) \log \| \tilde{f} \| + c_1$$

для некоторой постоянной c_1, где

$$D_\alpha = \frac{|W_\alpha|_p}{|F_{\alpha_0} \cdots F_{\alpha_n}|_p^s \| \tilde{f} \|^(n+1)(t-s)}.$$

Затем

$$\log |F_{\beta_1} \cdots F_{\beta_{q-n}}|_p^s \leq \log \frac{|F_0 \cdots F_q|_p^s}{|W|_p} + \log^+ D_\alpha + (n+1)(t-s) \log \| \tilde{f} \| + c_1.$$

Следовательно, получим

$$s(q-n) \log \| \tilde{f} \| \leq$$

$$\leq \log \frac{|F_0 \cdots F_q|_p^s}{|W|_p} + \log^+ D_\alpha + (n+1)(t-s) \log \| \tilde{f} \| + s(q-n) \log^+ A + c_1.$$

Используя лемму о логарифмических производных (см. [2]), мы можем доказать, что

$$\log^+ D_\alpha(z) = o(T(r, f)), \quad |z|_p = r.$$

Заметим, что

$$\log^+ A(z) = o(T(r, f)).$$

Получим

$$s(q-n) T(r, f) \leq$$

$$\leq s \sum_{j=0}^{q} \left\{ N_f(r, g_j) - N\left(r, \frac{1}{g_{j0}}\right) \right\} - N\left(r, \frac{1}{W}\right) + (n+1)(t-s) T(r, f) + o(T(r, f)),$$

откуда следует формула

$$\left\{ q + 1 - (n+1)\frac{t}{s} \right\} T(r, f) \leq \sum_{j=0}^{q} N_f(r, g_j) + o(T(r, f)). \tag{4}$$

Используя лемму Стейнмеца, получим

$$\lim_{m \to \infty} \inf \frac{t}{s} = 1.$$

Таким образом, теорема следует из формулы (4).

§4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть для непостоянной p-адичной мерморфной функции f на $\mathbf{C}_p$

$$L = L[f] = \sum_{i\in I} c_i f^{i_0}(f')^{i_1}\cdots(f^{(n)})^{i_n}$$

является дифференциальным многочленом от f, где I – конечное множество, $i = (i_0, ..., i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, а $c_i \not\equiv 0$ – мероморфные функции на $\mathbf{C}_p$ такие, что

$$T(r, c_i) = o(T(r, f)), \quad i \in I.$$

Для $i = (i_0, ..., i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ положим $|i| = i_0 + \cdots + i_n$. Определим

$$\deg(L) = \max_{i\in I}\{|i|\}, \quad \deg_*(L) = \min_{i\in I}\{|i|\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть f – непостоянная p-адичная мероморфная функция на $\mathbf{C}_p$, и пусть $L[f]$ – непостоянный дифференциальный многочлен от f с $\deg_*(L) \geq 1$. Выберем различные точки $\{a_1, ..., a_{q+1}\} \subset (\mathbf{C}_p - \{0\}) \cup \{\infty\}$ с $q \geq 1$. Тогда*

$$q\deg_*(L)T(r, f) \leq q\deg_*(L)N\left(r, \frac{1}{f}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{q+1} N\left(r, \frac{1}{L[f]-a_j}\right) - (q-1)N\left(r, \frac{1}{L[f]}\right) - N_1(r, L[f]) + o(T(r, f)). \quad (5)$$

Доказательство. Положим $d = \deg(L), \nu = \deg_*(L)$ и заметим, что

$$\frac{|L[f]|_p}{|f^d|_p} \leq \max_{i\in I}|c_i|_p \frac{1}{|f|^{d-|i|}}\left(\frac{|f'|_p}{|f|_p}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{|f^{(n)}|_p}{|f|_p}\right)^{i_n}.$$

Имеем

$$m\left(r, \frac{L[f]}{f^d}\right) \leq (d-\nu)m\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(T(r, f)).$$

Затем

$$d\cdot T(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f^d}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^d}\right) + O(1) \leq$$

$$\leq m\left(r, \frac{1}{L[f]}\right) + m\left(r, \frac{L[f]}{f^d}\right) + d\cdot N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \leq$$

$$\leq m\left(r, \frac{1}{L[f]}\right) + (d-\nu)m\left(r, \frac{1}{f}\right) + d\cdot N\left(r, \frac{1}{f}\right) + o(T(r, f)).$$

Таким образом, получаем

$$\nu T(r,f) \le m\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) + \nu N\left(r,\frac{1}{f}\right) + o(T(r,f)). \tag{6}$$

Используя вторую основную теорему (см. [1]), находим, что

$$m\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) + \sum_{j=1}^{q+1} m\left(r,\frac{1}{L[f]-a_j}\right) \le 2T(r,L[f]) - N_1(r,L[f]) + O(1).$$

Поэтому из первой основной теоремы следует

$$m\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) + \sum_{j=3}^{q+1} m\left(r,\frac{1}{L[f]-a_j}\right) \le$$

$$\le N\left(r,\frac{1}{L[f]-a_1}\right) + N\left(r,\frac{1}{L[f]-a_2}\right) - N_1(r,L[f]) + O(1). \tag{7}$$

Следовательно, из (6) и (7) получаем

$$\nu T(r,f) + (q-1)T(r,L[f]) \le$$

$$\le \nu N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \sum_{j=1}^{q+1} N\left(r,\frac{1}{L[f]-a_j}\right) - N_1(r,L[f]) + o(T(r,f)). \tag{8}$$

Заметим, что из (6) вытекает

$$\nu T(r,f) + N\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) \le T(r,L[f]) + \nu N\left(r,\frac{1}{f}\right) + o(T(r,f)).$$

Тогда

$$\nu T(r,f) + (q-1)T(r,L[f]) \ge$$

$$\ge \nu T(r,f) + (q-1)\left\{\nu T(r,f) + N\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) - \nu N\left(r,\frac{1}{f}\right) - o(T(r,f))\right\} =$$

$$= \nu q T(r,f) + (q-1)N\left(r,\frac{1}{L[f]}\right) - \nu(q-1)N\left(r,\frac{1}{f}\right) - o(T(r,f)). \tag{9}$$

Теорема следует из (8) и (9).

В частности, возьмем $q=1$, $a_1=1$, $a_2=\infty$, и пусть

$$L[f] = c_0 f + c_1 f' + \cdots + c_n f^{(n)}.$$

Мы получили аналог неравенства Мийю :

$$T(r,f) \le N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{L[f]-1}\right) + o(T(r,f)).$$

§5. ЕДИНСТВЕННОСТЬ p-АДИЧНЫХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Напомним следующий полезный результат (см [2]) :

Лемма 5.1. *Если f – p-адичная целая функция на $\mathbf{C}_p$, не принимающая значения нуль, то f – постоянная.*

Теорема 5.1. *Пусть f и g – две непостоянные p-адичные мероморфные функции на $\mathbf{C}_p$. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – четыре различные точки в $\mathbf{C}_p \cup \{\infty\}$, и пусть*

$$\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j), \quad j = 1, ..., 4.$$

Тогда $f \equiv g$.

Доказательство. Предположим, что, напротив, $f \not\equiv g$. Из второй основной теоремы получим

$$2T(r,f) + \log r \le \sum_{j=1}^{4} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + O(1) \le N\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + O(1) \le$$

$$\le T\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + O(1) = T(r, f-g) + O(1) \le T(r,f) + T(r,g) + O(1),$$

и, аналогично

$$2T(r,g) + \log r \le T(r,f) + T(r,g) + O(1).$$

Следовательно $2\log r \le O(1)$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 5.2. *Предположим, что f и g – две непостоянные p-адичные мероморфные функции на $\mathbf{C}_p$, для которых существуют три различные значения $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}_p \cup \{\infty\}$ такие, что $E_f(a_j) = E_g(a_j)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $f \equiv g$.*

Доказательство. Без потери общности можем предположить, что $a_3 = \infty$. Тогда $\dfrac{f-a_j}{g-a_j}$ $(j = 1, 2)$ – p-адичные аналитические на $\mathbf{C}_p$ функции, нигде не равные нулю. Существуют $c_1, c_2 \in \mathbf{C}_p - \{0\}$ такие, что

$$f - a_j = c_j(g - a_j), \quad j = 1, 2.$$

Если $c_1 = 1$ или $c_2 = 1$, то $f \equiv g$. Если же $c_1 \ne 1$, $c_2 \ne 1$, то

$$(c_1 - c_2)g = a_2(1 - c_2) - a_1(1 - c_1).$$

Поскольку g непостоянна, то $c_1 = c_2$ и, следовательно $a_1 = a_2$. Это противоречие доказывает нашу теорему.

Теорема 5.3. *Если f – непостоянная p-адичная аналитическая функция на $\mathbf{C}_p$, то нет такой $a \in \mathbf{C}_p$, для которой $E_f(a) = E_{f'}(a)$.*

Доказательство. Предположим, что $E_f(a) = E_{f'}(a)$ для некоторой $a \in \mathbf{C}_p$. Мы знаем, что $\dfrac{f'-a}{f-a}$ является p-адичной аналитической функцией на $\mathbf{C}_p$, нигде не равной нулю так, что она является постоянной $c(\neq 0)$. Тогда

$$f' = cf + a(1-c).$$

Поскольку f непостоянна, то $f - a(1-\frac{1}{c})$ должна иметь нули. Однако невозможность этого следует из сравнения кратностей нулей f' и $f - a(1-\frac{1}{c})$.

Лемма 5.2. *Пусть f – непостоянная p-адичная мероморфная функция на $\mathbf{C}_p$. Пусть n – натуральное число такое, что $\{a_0, a_1, ..., a_n\} \subset \mathbf{C}_p$, $a_0 \neq 0$, и положим*

$$L[f] = a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Тогда

$$T(r, L[f]) = nT(r, f) + O(1).$$

Доказательство. Очевидно, имеем $N(r, L[f]) = nN(r, f)$. Положим $|z|_p = r$. Если

$$|f(z)|_p \leq A = \max_k \left\{ \frac{|a_k|_p}{|a_0|_p} \right\},$$

то имеем

$$|L[f](z)|_p \leq \max_k \{|a_k|_p |f(z)|_p^{n-k}\} \leq |a_0|_p A^{n+1}$$

и, следовательно

$$m(r, L[f]) \leq \log^+ |a_0|_p + (n+1)\log A.$$

Если $|f(z)|_p > A \geq 1$, то

$$|a_0|_p |f(z)|_p^n > |a_k|_p |f(z)|_p^{n-k}, \quad k = 1, ..., n$$

и, следовательно

$$|L[f](z)|_p = |a_0|_p |f(z)|_p^n,$$

откуда следует, что

$$nm(r,f) - \log^+ \frac{1}{|a_0|_p} \le m(r, L[f]) \le nm(r,f) + \log^+ |a_0|_p.$$

Таким образом, в любом случае получаем

$$m(r, L[f]) = nm(r,f) + O(1),$$

и лемма доказана.

Теорема 5.4. *Возьмем целое $n \ge 4$ и выберем $a, b \in \mathbf{C}_p - \{0\}$ такими, чтобы множество*

$$S = \{z \in \mathbf{C}_p : \ z^n + az^{n-1} + b = 0\}$$

содержало n различных элементов. Если f и g – непостоянные p-адичные функции на $\mathbf{C}_p$ такие, что $E_f(S) = E_g(S)$, то $f \equiv g$.

Доказательство. Из условия $E_f(S) = E_g(S)$ следует, что $\dfrac{f^n + af^{n-1} + b}{g^n + ag^{n-1} + b}$ является p-адичной аналитической функцией на $\mathbf{C}_p$, нигде не равной нулю. Следовательно, она является постоянной c. Поэтому

$$f^n + af^{n-1} + b = c(g^n + ag^{n-1} + b).$$

Заметим, что согласно лемме 5.2

$$T(r, f^n + af^{n-1} + b) = nT(r,f) + O(1).$$

Имеем $T(r,f) = T(r,g) + O(1)$. Положим

$$f_1 = -\frac{1}{b}(f^n + af^{n-1}), \quad f_2 = \frac{c}{b}(g^n + ag^{n-1}).$$

Тогда $f_1 + f_2 = 1 - c$. Если $c \ne 1$, то

$$nT(r,f) = T(r,f_1) + O(1) \le \overline{N}(r,f_1) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - 1 + c}\right) - \log r + O(1) \le$$

$$\le \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2}\right) - \log r + O(1) \le$$

$$\le 2T(r,f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g + a}\right) - \log r + O(1) \le$$

$$\leq 2T(r,f)+2T(g,f)-\log r+O(1)=4T(r,f)-\log r+O(1).$$

Это невозможно, так как $n \geq 4$.

Итак, имеем $c=1$. Положим $h=\frac{f}{g}$. Имеем

$$g(h^n-1)=-a(h^{n-1}-1).$$

Запишем

$$z^n-1=(z-1)(z-s_1)\cdots(z-s_{n-1}),\quad z^{n-1}-1=(z-1)(z-r_1)\cdots(z-r_{n-2}).$$

Мы видим, что $\{r_1,...,r_{n-2}\}\cap\{s_1,...,s_{n-1}\}=\emptyset$. Заметим, что

$$g=-a\frac{(h-r_1)\cdots(h-r_{n-2})}{(h-s_1)\cdots(h-s_{n-1})}.$$

Если h непостоянна, то

$$\sum_{j=1}^{n-1}\delta_h(s_j)=n-1\geq 3.$$

Возникает противоречие. Поэтому h постоянна. Если $h\neq 1$, то мы видим, что g постоянна. Следовательно, $h=1$, т.е. $f\equiv g$.

Теорема 5.5. *Возьмем целое $n\geq 12$ и выберем $a,b\in\mathbf{C}_p-\{0\}$ такими, чтобы множество*

$$S=\{z\in\mathbf{C}_p:\ z^n+az^{n-2}+b=0\}$$

содержало n различных элементов. Если f и g – непостоянные p-адичные мероморфные функции на $\mathbf{C}_p$ такие, что $E_f(S)=E_g(S)$, то $f\equiv g$.

Доказательство. Пусть $S=\{r_1,...,r_n\}$. Из двух основных теорем мы имеем оценку

$$(n-2)T(r,g)\leq\sum_{k=1}^{n}\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-r_k}\right)+O(1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-r_k}\right)+O(1)\leq nT(r,f)+O(1).$$

Аналогично можно получить оценку

$$(n-2)T(r,f)\leq nT(r,g)+O(1).$$

Определим

$$h_1 = -\frac{1}{b}f^{n-2}(f^2+a), \quad h_2 = \frac{h_3}{b}g^{n-2}(g^2+a), \quad h_3 = \frac{f^n + af^{n-2} + b}{g^n + ag^{n-2} + b}.$$

Тогда будем иметь $h_1 + h_2 + h_3 = 1$. Запишем $f = \frac{f_1}{f_2}$ и $g = \frac{g_1}{g_2}$, где пары f_1, f_2 и g_1, g_2 – p-адичные целые функции на $\mathbf{C}_p$ без простых факторов. Тогда

$$h_3 = c\left(\frac{g_2}{f_2}\right)^n, \quad c = \frac{f_1^n + af_1^{n-2}f_2^2 + bf_2^n}{g_1^n + ag_1^{n-2}g_2^2 + bg_2^n}.$$

Заметим, что c является p-адичной целой функцией на $\mathbf{C}_p$, нигде не равной нулю и, следовательно, постоянной. Итак, имеем

$$\overline{N}(r, h_3) \leq \overline{N}(r, f), \quad \overline{N}\left(r, \frac{1}{h_3}\right) \leq \overline{N}(r, g).$$

Далее мы докажем, что $h_3 \equiv 1$. Предположим, что, напротив, $h_3 \not\equiv 1$. Сначала докажем, что h_1 не может быть линейно выражена через $\{1, h_3\}$ и $\{1, h_2\}$, соответственно. Предположим, что имеется линейное выражение

$$h_1 = a_1 h_3 + a_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{C}_p.$$

Поскольку h_1 непостоянна, то $a_1 \neq 0$, а h_3 непостоянна. Если $a_2 \neq 0$, то из второй основной теоремы следует

$$nT(r,f) = T(r,h_1) + O(1) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{h_1}\right) + \overline{N}(r, h_1) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{h_1 - a_2}\right) + O(1) \leq$$

$$\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^2+a}\right) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{h_3}\right) + O(1) \leq$$

$$\leq 4T(r,f) + \overline{N}(r,g) + O(1) \leq 4T(r,f) + T(r,g) + O(1) \leq \left(4 + \frac{n}{n-2}\right)T(r,f) + O(1),$$

откуда получаем противоречие, поскольку $n \leq 5 + \dfrac{2}{n-2}$. Если $a_2 = 0$, то полагая $z^2 + a = (z - s_1)(z - s_2)$ и из равенства $h_1 = a_1 c\left(\dfrac{g_2}{f_2}\right)^n$ мы видим, что

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \geq 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right), \quad N\left(r, \frac{1}{f - s_j}\right) \geq n\overline{N}\left(r, \frac{1}{f - s_j}\right), \quad j = 1, 2.$$

Следовательно

$$\Theta_f(s_j) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r, \frac{1}{f - s_j})}{T(r,f)} \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \quad \Theta_f(0) \geq \frac{1}{2},$$

и снова из второй основной теоремы получаем

$$\frac{1}{2}+2\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq\Theta_f(0)+\sum_{j=1}^{2}\Theta_f(s_j)\leq 2.$$

Однако это невозможно ввиду $n\geq 12$.

Предположим, что имеется линейное выражение $h_1=b_1h_2+b_2$, $b_1,b_2\in\mathbf{C}_p$. Поскольку h_1 непостоянна, то $b_1\neq 0$, а h_2 непостонна. Если $b_2\neq 0$, то из второй основной теоремы следует

$$nT(r,f)=T(r,h_1)+O(1)\leq\overline{N}\left(r,\frac{1}{h_1}\right)+\overline{N}(r,h_1)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h_1-b_2}\right)+O(1)\leq$$

$$\leq\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^2+a}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{h_2}\right)+O(1)\leq$$

$$\leq 4T(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g^2+a}\right)+O(1)\leq$$

$$\leq 4T(r,f)+3T(r,g)+O(1)\leq\left(4+\frac{3n}{n-2}\right)T(r,f)+O(1),$$

откуда имеем $n\leq 7+\frac{6}{n-2}$, т.е. получаем противоречие. Если $b_2=0$, то имеем $(1+\frac{1}{b_1})h_1+h_3=1$, что невозможно. Теорема доказана.

Как следствие, h_2 и h_3 непостоянны. Определим

$$F=\frac{1}{f^n+af^{n-2}+b},\quad G=\frac{1}{g^n+ag^{n-2}+b}.$$

Если $1,F,G$ линейно независимы, то

$$H=\frac{F''}{F'}-\frac{G''}{G'}=-\frac{W}{F'G'}\not\equiv 0,$$

где W – вронскиан от $1,F,G$. Заметим, что полюсами H могут быть только те точки, в которых F' или G' имеют нули. Запишем $N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)$ для функции валентности нулей F', где F не принимает одно из значений $A_1=0$, $A_2=\frac{1}{b}$. $N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)$ определяется аналогично. Таким образом

$$N(r,H)\leq\sum_{j=1}^{2}\left\{N_{2)}\left(r,\frac{1}{F-A_j}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-A_j}\right)+\right.$$

$$\left.+N_{2)}\left(r,\frac{1}{G-A_j}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-A_j}\right)\right\}+N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)+N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right),$$

где $N_{k)}(r,f)$ – функция валентности функции f, имеющая полюсы, количеством равные ее кратности, если кратность $\le k$ и равные k, если кратность $> k$. Заметим, что H имеет нули во всех тех точках, где F и G имеют простой полюс. Следовательно

$$\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\le N\left(r,\frac{1}{H}\right)+\frac{1}{2}\{N(r,F)+N(r,G)\}.$$

Учитывая первую основную теорему и лемму о логарифмических производных, мы видим, что

$$\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)\le N(r,H)+\frac{1}{2}\{T(r,F)+T(r,G)\}+O(1).$$

Применяя вторую основную теорему к F и G, получаем

$$T(r,F)+T(r,G)+2\log r\le\sum_{j=1}^{2}\left\{\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-A_j}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G-A_j}\right)\right\}+$$

$$+\overline{N}(r,F)+\overline{N}(r,G)-N_0\left(r,\frac{1}{F'}\right)-N_0\left(r,\frac{1}{G'}\right)+O(1).$$

Итак, имеем

$$\frac{1}{2}\{T(r,F)+T(r,G)\}+2\log r\le\sum_{j=1}^{2}\left\{N_{2)}\left(r,\frac{1}{F-A_j}\right)+N_{2)}\left(r,\frac{1}{G-A_j}\right)\right\}+O(1)\le$$

$$\le 2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{2)}\left(r,\frac{1}{f^2+a}\right)+2\overline{N}(r,g)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+$$

$$+N_{2)}\left(r,\frac{1}{g^2+a}\right)+O(1)\le 6\{T(r,f)+T(r,g)\}+O(1)\le\frac{6}{n}\{T(r,F)+T(r,G)\}+O(1),$$

что невозможно, поскольку $n\ge 12$. Следовательно, $1,F,G$ линейно независимы. Тогда существует $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbf{C}_p^3-\{0\}$ такое, что $c_1+c_2F+c_3G=0$ и, следовательно

$$-bc_1h_1+c_3h_3=-bc_1-c_2.$$

Это невозможно. Поэтому $h_3=1$. Положим $h=\frac{f}{g}$. Очевидно

$$g^2(h^n-1)=-a(h^{n-2}-1).$$

Запишем

$$z^n-1=(z-1)(z-t_1)\cdots(z-t_{n-1}),\quad z^{n-2}-1=(z-1)(z-u_1)\cdots(z-u_{n-3}).$$

Тогда

$$\#\{\{t_1, ..., t_{n-1}\} \cap \{u_1, ..., u_{n-3}\}\} \leq 1.$$

Заметим, что

$$g^2 = -a\frac{(h-u_1)\cdots(h-u_{n-3})}{(h-t_1)\cdots(h-t_{n-1})}.$$

Если h непостоянна, то имеем

$$\Theta_h(t_j) \geq \frac{1}{2}, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

кроме не более чем для одной j и, следовательно

$$5 \leq \frac{n-2}{2} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \Theta_h(t_j) \leq 2.$$

Из этого противоречия следует, что h постоянна. Если $h \neq 1$, то g постоянна. Поэтому $h = 1$, т.е. $f \equiv g$.

ABSTRACT. In this paper we study the Nevanlinna theory of p-adic meromorphic functions. We prove p-adic analogs of Ru-Stoll's theorem for the defect relation of moving targets and of the second main theorem type Hu-Yang's theorem dealing with differential polynomials. We also find a unique range set for p-adic entire functions with 4 elements and a unique range set for p-adic meromorphic functions with 12 elements.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Boutabaa, "Applications de la théorie de Nevanlinna p-adic", Collect. Math., vol. 42, pp. 75 – 93, 1991.
2. W. Cherry, Z. Ye, "Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the Non-Archimedean Nevanlinna inverse problem", preprint.
3. G. Frank, M. Reinders, "A unique range set for meromorphic functions with 11 elements", Preprint.
4. F. Gross, C. C. Yang, "On preimage and range sets of meromorphic functions", Proc. Japan Acad., vol. 58, pp. 17 – 20, 1982.
5. P. C. Hu, C. C. Yang, "Uniqueness of meromorphic functions on $\mathbf{C}^m$", Complex Variables, vol. 30, pp. 235 – 270, 1996.
6. Há Huy Khóai, "On p-adic meromorphic functions", Duke Math. J., vol. 50, pp. 695 – 711, 1983.
7. Há Huy Khóai, "Heights for p-adic holomorphic functions of several variables", Max-Planck Institut Für Mathematik, pp. 83 – 89, 1989.
8. Há Huy Khóai, M. V. Quang, "On p-adic Nevanlinna theory", Lecture Notes in Math., Springer, vol. 1351, pp. 146 – 158, 1988.
9. P. Li, C. C. Yang, "On the unique range sets of meromorphic functions", Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
10. P. Li, C. C. Yang, "Some further results on the unique range sets of meromorphic

functions", Preprint.
11. E. Mues, M. Reinders, "Meromorphic function sharing one value and unique range sets", Kodai Math. J., vol. 18, pp. 515 – 522, 1995.
12. M. Ru, W. Stoll, "The second main theorem for moving targets", J. of Geom. Analysis, vol 1, pp. 99 – 138, 1991.
13. M. Shirosaki, "Another proof of the defect relation for moving targets", Tôhoku Math. J., vol. 43, pp. 355 – 360, 1991.
14. W. Stoll, "An extension of the theorem of Steinmetz-Nevanlinna to holomorphic curves", Math. Ann., vol. 282, pp. 185 – 222, 1988.
15. H. X. Yi, "On a question of Gross", Sci. China, Ser. A, vol. 38, pp. 8 – 16, 1995.
16. H. X. Yi, "The unique range sets of entire or meromorphic functions", Complex Variables, vol. 28, pp. 13 – 21, 1995.

22 февраля 1997

Университет Шандонга
Джинан, Шандонг, НР Китай;
Гонк Конгский университет Науки и Технологии Коулун, Гонк Конг