Посвящается памяти профессора В. И. Белого

ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА РАЗБИЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, I : СВОЙСТВО СРАВНИМОСТИ

Г. А. Барсегян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 3, 1997

Работа посвящена изучению некоторых новых явлений равнораспределения в теории мероморфных функций и расположений a-точек мероморфных в комплексной плоскости функций, что является продолжением теории Р. Неванлинны, описывающей число a-точек. Вначале мы изучаем взаиморасположения a-точек и оцениваем расстояния между ними.Так назызаемый принцип разбиения мероморфных функций показывает, что a и b-точки в основном попарно близки. Это приводит к новому типу разложений мероморфных функций в простейшие компоненты. Устанавливается некоторое равнораспределение, названное свойством сравнимости, которое показывает, что расстояния между a и b-точками и b и c-точками в основном сравнимы. Кроме того, мы показываем, что величины сферических производных, рассмотренные на множествах a-точек, сравнимы для различных значений a. В последующих работах мы предполагаем использовать принцип разбиения и свойство сравнимости для доказательства того, что местоположения большинства a-точек для почти всех значений $a \in \mathbf{C}$ могут быть описаны, если известны расположения a-точек хотя бы для одного "хорошего" значения a. Это согласуется с основным заключением теории Неванлинны, которую качественно можно изложить совершенно аналогично : число a-точек мероморфных в комплексной плоскости функций могут быть описаны для почти всех значений $a \in \mathbf{C}$, если известно количество a-точек хотя бы для одного "хорошего" значения a.

ВВЕДЕНИЕ

Вначале был вопрос : "Каково количество a-точек целой или мероморфной функции ?".

Начальной здесь была известная теорема Пикара (1889), которая явилась предвестником теории Бореля-Адамара и последовавшей ей теории Р. Неванлинны [1] в 1920-х.

Теория Р. Неванлинны усилила предыдующие результаты, обобщила их распрстранив на мероморфные функции, получила законченные описания количеств a-точек мероморфных функций $w(z)$ в $\mathbb{C}$. Характеристические функции Неванлинны стали широко используемым инструментом, сама же теория была признана как "одна из самых значительных достижений века" (Герман Вейль).

В 1935 году Л. Альфорс [2] создал теорию поверхностей наложения – метрико-топологический аналог теории Неванлинны. Несмотря на общепризнанность эта теория не нашла многих применений. Тем не менее, она имеет одно неоспоримое преимущество : она применима там, где неприменимы аналитические методы. Думаю, что многие применения этой теории все еще впереди.

Естественно, что наряду с изучением количвств a-точек непрестанно возникали вопросы, касающиеся взаиморасположений a-точек. Здесь двойником теоремы Пикара явилась известная теорема Г. Жулиа о лучах (1907). В 20-х годах Л. Бибербах [3], Х. Мийю [4], Р. Неванлинна [5], Г. Валирон [6] открыли новые пути. Эти исследования были продолжены многими школами.

В конце 70-х вырисовывалась следующая картина. Детальное знание некоторых аспектов взаиморасположений a-точек было достигнуто только для частных классов функций (Л. Бибербах, Ф. Эдрей, У. Фукс, А. А. Гольдберг, С. Хеллерстейн, Р. Неванлинна, И. В. Островский, Й. Уинклер). Внимание было сосредоточено на изучении лучей Жулиа и Бореля, "кругов наполнения", множеств Пикара, zero-one-infinity множеств (И. Н. Бейкер, Л. Бернацкий, Б. Е. Кейн, М. Картрайт, П. Колуэлл, А. Дингхас, Д. Дрейсин, Й. Дюфренуа, П. М. Готье, В. И. Гаврилов, Г. Гюндерсон, У. Хайман, К. Л. Хионг, Й. С. Хуанг, Кечун Ли, Куанхео Чанг, Л. Х. Ланге, О. Лехто, С. Линден, К. Мацумото, Х. Мийю, П. Монтель, М. Озава, А. Раух, Л. А. Рубель, Ф. Сунье Балагуер, А. Содин, Н. Тода, С. Топпила, М. Цуджи, Г. Валирон, А. Вейцман, Дж. Уинклер, С. С. Янг, Янг Ло).

Однако описания взаиморасположений этого периода касались только "малых" подмножетсв a-точек и не было общей теории. Впечатление было таково, что мы долго стоим у порога и не можем перешагнуть его. Чтобы сделать этот шаг нужно было ответить на следующие два вопроса. Существует ли общая закономерность, описывающая взаиморасположения основной части a-точек? И если да, то как она соотносится с предыдущими фундаментальными результатами?

Ответы на эти вопросы были получены с помощью так называемого свойста близости a-точек мероморфных функций и в особенности принципа разбиения мероморфных функций, которые, качественно выражаясь, показывают, что множества a-точек должны быть геометрически близки друг к другу для различных значений a (см. [7] – [10]). Более того, эти закономерности включают в себя основные заключения теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса ([7] – [10]), усиливая основные результаты относящиеся к лучам Жулиа-Бореля и "кругам наполнения", см. [9].

В настоящей работе мы показываем ряд новых применений. Установлены новые закономерности, показывающие, что величины сферических производных для большинства простых a-точек функции $w(z)$ сравнимы. В частности, новый тип равнораспределенности показывает, что расстояния между большинством различных a и b-точек функции $w(z)$ сравнимы для большинства значений a и $b \in \mathbf{C}$.

Теперь, одно из основных заключений теории, описывающий местоположения, утверждает, что местоположения большинства a-точек для почти всех $a \in \mathbf{C}$ могут быть описаны, если известны местоположения a-точек для одного "хорошего" значения a. Таким образом, подходим к новому перекрестку, где переходим от изучения взаиморасположений к изучению местоположений a-точек.

§0.1. СВОЙСТВО БЛИЗОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Предварительно рассмотрим вторую фундаментальную теорему теории поверхностей наложения Альфорса. Мы слегка изменим изложение свойства близости [8] и теории Альфорса [1] (см. также [7],[9]).

Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbf{C}$; $a_1, \ldots, a_q$ – попарно различные комплексные значения; $\Omega(r)$ – подмножество множетсва $\{z_i(a_\nu)\}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, \ldots, q$, где $z_i(a_\nu)$ являются a_ν-точками в $\{z : |z| \leq r\}$; $n(\Omega(r), a_\nu)$ – число

a_ν-точек (исключаются кратности), принадлежащих $\Omega(r)$.

Определение 1. Для произвольной монотонно возрастающей функции $\varphi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$ множества $\Omega(r)$ назовем ***альфорсовыми***, если для любой $r \notin E$

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(\Omega(r), a_\nu) \geq (q-2)A(r) - Q(r), \tag{0.1}$$

где

$$Q(r) = \frac{A(r)}{\varphi(r)} + \varphi^{17}(r)A^{2/3}(r), \quad r \notin E,$$

а E является множеством конечной логарифмической меры. Очевидно, что если $\varphi^{17}(r) < A^{1/4}(r)$, то имеем $Q(r) = o(A(r))$, $r \to \infty$, $r \notin E$, так что (0.1) почти совпадает со второй фундаментальной теоремой Альфорса, которую теперь сформулируем следующим образом :

Теорема А. *Для любой мероморфной функции в* $\mathbf{C}$ *и любых попарно различных значений* $a_1, \ldots, a_q$ *существуют альфорсовы множества* $\Omega(r)$ *в кругах* $\{z : |z| \leq r\}$, $r \notin E$.

Обозначим через $\Omega_i(a_1, \ldots, a_q, r)$, $i = 1, 2, \ldots$ подмножества $a_1, \ldots, a_q$-точек в $\{z : |z| \leq r\}$ такие, что в любом Ω_i для каждого $\nu = 1, \ldots, q$ имеется не более чем одна a_ν-точка, обозначаемая через $z_i(a_\nu)$.

Определение 2. Будем говорить, что для заданной функции $\psi(r) > 0$ множество $\Omega_i(a_1, \ldots, a_q, r)$ является ***скоплением ψ-близких $a_1, \ldots, a_q$-точек***, если для любой $z_i(a_\nu), z_i(a_\mu) \in \Omega_i(a_1, \ldots, a_q, r)$ имеем

$$|z_i(a_\nu) - z_i(a_\mu)| \leq \psi(r), \quad \nu, \mu \in \{1, 2, \ldots, q\}. \tag{0.2}$$

Если

$$\psi(r) = \frac{\varphi(r) r}{A^{1/2}(r)}, \tag{0.3}$$

где $\varphi(r)$ и $A(r)$ имеют вышезаданный вид, то скопление назовем ***близким***. Таким образом, для близких пар имеем

$$|z_i(a_\nu) - z_i(a_\mu)| \leq \frac{\varphi(r) r}{A^{1/2}(r)}, \quad \nu, \mu \in \{1, 2, \ldots, q\}. \tag{0.4}$$

Расстояния между $z_i(a_\nu)$ и $z_i(a_\mu)$ стремятся к нулю при $r \to \infty$, если порядок функции $A(r)$ больше 2 (заметим, что $\varphi(r)$ может иметь произвольно медленный рост). Если же порядок $A(r)$ меньше или равен 2, то, во всяком случае, угол, под которым видны точки $z_i(a_\nu)$, $z_i(a_\mu)$, стремится к нулю при $r \to \infty$ так, что (0.4) означает близость в любом случае.

Перейдем теперь к свойству близости.

Теорема Б. . *Для любой мероморфной функции в* $\mathbf{C}$ *и любых попарно различных фиксированных значений* $a_1, \dots, a_q$ *существуют альфорсовы множества* $\Omega(r)$ *в кругах* $\{z : |z| \le r\}$, $r \notin E$, *обладающие следующими свойствами :*

1) множество $\Omega(r)$ *является объединением скоплений* $\Omega_i(a_1, \dots, a_q, r)$ *близких a-точек,*

2) число $\Phi(r)$ *множеств* Ω_i *в этом объединении удовлетворяет условию* $\dfrac{\Phi(r)}{A(r)} \to 1$ *при* $r \to \infty$.

Начало теоремы Б совпадает с теоремой А Альфорса и, следовательно, описывает количество a-точек. Рассмотрим свойства 1) и 2) в теореме Б. Поскольку $\Omega(r)$ – альфорсово множество, обладающее свойствами 1) и 2), то в каждом $\Omega_i(a_1, \dots, a_q, r)$ содержится (в среднем) не меньше чем $q-2$ $a_1, \dots, a_q$-точек, которые должны быть взаимно близки ввиду (0.4). Следовательно, $a_1, \dots, a_q$-точки в основном должны быть геометрически близки.

Важно уяснить, что большинство $a_1, \dots, a_q$-точек принадлежат $\Omega_i(r)$. Покажем это. Применяя теорему Б, с учетом первой фундаментальной теоремы в виде Шимизу-Альфорса и очевидного неравенства $n(r, a_\nu) \ge n(\Omega(r), a_\nu)$, получим

$$(q + o(1))T(r) \ge \sum_{\nu=1}^{q} \int_0^r \frac{n(t, a_\nu)}{t}\, dt \ge \sum_{\nu=1}^{q} \int_0^r \frac{n(\Omega(t), a_\nu)}{t}\, dt \ge (q - 2 + o(1))T(r), \tag{0.5}$$

где $r \to \infty$, $r \notin E^*$, E^* – множество, удовлетворяющее условию $\int\limits_{E^*} d\ln\ln t < \infty$. В то же время, из теоремы Б следует неравенство

$$\sum_{\{a\}} \delta_\Omega(a) \le 2, \tag{0.6}$$

где

$$\delta_\Omega(a) \equiv 1 - \limsup_{r \to \infty} \frac{1}{T(r)} \int_0^r \frac{n(\Omega(t), a_\nu)}{t}\, dt, \tag{0.7}$$

что является усовершенствованной формой соотношения дефектов Р. Неванлинны

$$\sum_{\{a\}} \delta(a) \leq 2.$$

§0.2. ПРИНЦИП РАЗБИЕНИЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

0.2.1. Предмет. Этот принцип является обобщенной формой свойства близости и описывает новый тип разложения мероморфных функций в $\mathbf{C}$ и мероморфных функций в единичном круге с "быстрым" ростом на простейшие компоненты. Из принципа следуют :

а) основные заключения теорий Р. Неванлинны и Л. Альфорса, касающиеся числа a-точек [1] – [2] ;

б) основные результаты Г. Жулиа, Г. Валирона, М. Мийю, Й. Дюфренуа о лучах Жулиа–Бореля и "кругах наполнения" [4], [6], [11] ;

в) свойство близости a-точек мероморфных функций, описывающее взаиморасположения a-точек [9].

С другой стороны, этот принцип связан с одним захватывающим вопросом. Со времен Римана всегда осознавалась важность разложения римановых поверхностей в листы. Однако неоднократно замечалось, что в общем случае такие разложения римановых поверхностей вряд ли возможны. С помощью принципа совершается разложение для римановой поверхности $F_r = \{w(z) : |z| \leq r\}$, где $w(z)$ мероморфна в $\mathbf{C}$, после выбрасывания из F_r малой части $s_r \subset F_r$. В результате поверхность $F_r \setminus s_r$ распадается на определенное число листов, и функция $w(z)$ разбивается, соответственно, на одинаковое число взаимно однозначных отображений.

0.2.2 Терминология и принцип разбиения. Будем говорить, что для заданной в области D функции $f(z)$ отображение $(D, f(D))$ *разбивается на простейшие компоненты* $(E_i, f(E_i))$, $i = 0, 1, \ldots, \Phi$, если $\bigcup_{i=0}^{\Phi} E_i = D$.

Множество $f(E_i)$ рассмотрим на римановой сфере s. Обозначим через $\widetilde{f}$ (или $\widetilde{a}$) те точки на s, проекции которых на комплексную плоскость совпадают с f (соответственно, a). Мы хотим построить простейшие компоненты $(E_i, f(E_i))$, $i > 0$ такие, что

1) $f(z)$ однолистна в E_i,

2) замыкания $\tilde{f}(E_i)$ совпадают с $s \setminus s_i$, где s_i – некоторая (возможно малая) часть s.

Если часть s_i, исключенная из s, есть объединение Δ_j^i, $j = 1, \ldots, k_i$, где Δ_j^i – односвязные области на s, сферические диаметры $\rho(\Delta_j^i)$ которых меньше чем $1/\varphi$, то отображения $(E_i, f(E_i))$ назовем *однолистными накопителями*[1].

Поэтому для любой $\tilde{a} \in s$ замыкание области E_i содержит хотя бы одну a-точку (т.е. a-точки накоплены в E_i) при условии, что $\tilde{a} \in s_i$. Геометрически очевидно, что малость множеств E_i и s_i взаимосвязано со свойством близости a-точек. Действительно, если диаметры $d(E_i)$ множеств E_i малы, то все a-точки, накопленные в E_i, попарно близки. Из малости s_i следует, что E_i содержит большинство a-точек, поскольку замыкание $\tilde{f}(E_i)$ совпадает с $s \setminus s_i$. Размеры s_i описываются диаметрами $\rho(\Delta_j^i)$ и числом

$$\delta = \Phi^{-1} \sum_{i=1}^{\Phi} k_i.$$

Отображение $(E_0, f(E_0))$, $E_0 = D \setminus \bigcup_{i=1}^{\Phi} E_i$ назовем *накопителем особенностей*, поскольку благодаря простой природе (однолистности) $(E_i, f(E_i))$, $i = 1, \ldots, \Phi$ все "плохие свойства" накоплены в $(E_0, f(E_0))$. Обозначения $E_i(r)$, $\Phi(r)$, $k_i(r)$, $\Delta_j^i(r)$, $\delta(r)$ относятся к случаю $D = D(r) = \{z : |z| \le r\}$, а $\varphi = \varphi(r)$ является монотонной функцией, $\varphi(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ (или при $r \to 1$, если рассматривать $w(z)$ в $D(1)$).

Пусть теперь $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbb{C}$. Вспомним, что характеристической функцией Альфорса $A(r)$ является $A(\tilde{w}(D(r)))/\pi$, где

$$A(\tilde{w}(G)) = \iint\limits_G \frac{|w'(z)|^2}{(1 + |w(z)|^2)^2}\, d\sigma$$

– сферическая площадь $\tilde{w}(G)$. Характеристику малости объединения $\Delta_j^i(r)$, $i = 1, \ldots, \Phi$, $j = 1, \ldots, k_i(r)$,

$$\Delta = \lim_{r \to \infty} \sup_{r \notin E} \delta(r), \qquad \int_E d \ln t \le \infty$$

[1] Если E_i и Δ_j^i – круги, $k_i < 2$ и условие однолистности опущено, то E_i становится обыкновенным "кругом наполнения" [4], [6].

(множество E то же, что и в теории Альфорса) назовем *суммарным дефектом* совокупности однолистных накопителей.

После этих предварительных замечаний перейдем к принципу разбиения мероморфных функций.

Теорема B. *Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbf{C}$, $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда для любого $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ распадается на простейшие компоненты $(E_i(r), w(E_i(r)))$, $i = 0, 1, \ldots, \Phi(r)$ такие, что для $i \geq 1$ отображения $(E_i(r), w(E_i(r)))$ – однолистные накопители с тотальным дефектом*

$$\Delta \leq 2 \tag{0.8}$$

и диаметрами

$$d(E_i(r)) \leq \varphi^7(r) r A^{-1/2}(r), \; i \geq 1; \tag{0.9}$$

для $i = 0$ отображение $(E_0(r), w(E_0(r)))$ – накопитель особенностей с

$$A(\widetilde{w}(E_0(r)))A^{-1}(r) \to 0, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{0.10}$$

Кроме того, для числа $\Phi(r)$ разбиений имеем

$$\Phi(r)A^{-1}(r) \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{0.11}$$

Формулу (0.11) легко вывести из (0.8) и (0.10).

Согласно теореме B отображение $(D(r), w(D(r)))$ распадается на отображения $(E_i(r), w(E_i(r)))$ с геометрически ясными метрико–топологическими свойствами, а число этих отображений примерно равно $A(r)$. Одновременно риманова поверхность $\widetilde{F}_r \setminus \widetilde{w}(E_0(r))$ разбивается примерно на $A(r)$ "листы" $\widetilde{w}(E_i(r))$, $i \geq 1$, почти совпадающие со всей сферой.

Утверждения (0.8) и (0.10) показывают, что $\widetilde{w}$-образ всех a-точек, $a \in \in C$, не принадлежащих однолистным накопителям, имеет относительно малую сферическую площадь. Следовательно, большинство a-точек для почти всех a принадлежат однолистным накопителям. Более того, все a-точки, накопленные в $E_i(r)$, $i \geq 1$, близки друг к другу, что следует из (0.9). Это отражает свойство близости a-точек. Из теоремы B следует "свойство близости a-точек" мероморфных функций, открытых в [5] и, стало быть, вытекают все результаты, отмеченные во введении (см. [5]).[2]

§0.3. СВОЙСТВО СРАВНИМОСТИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно теореме В мероморфные функции разбиваются на определенное число взаимно однозначных отображений $(E_i(r), w(E_i(r)))$. Конформные (взаимно однозначные) отображения $f(z)$ в единичном круге $D(1)$ являются простейшим и наиболее изученным классом функций. Поэтому интересно остановиться на описании тех характерных черт поведения $(E_i(r), w(E_i(r)))$, которые аналогичны поведению взаимно однозначных отображений $f(z)$.

Простоту однолистных отображений отражает следующая теорема исключения : *$f(z)$ если взаимно однозначна в области D, то для любых z_1 и z_2*

$$|f'(z_1)| \overset{\varphi(z_1,z_2,D)}{\Longleftrightarrow} |f'(z_2)|,$$

где символ $X \overset{\varphi}{\Longleftrightarrow} Y$ означает двойное неравенство $(X/\varphi \le Y \le \varphi X)$ (сравнимость X и Y через φ) и $\varphi(z_1, z_2, D)$ зависит от геометрии z_1, z_2 и D.

Мы покажем, что аналогичное свойство имеет место для наших мероморфных функций $w(z)$ в областях $E_j^c \subset \{E_i\}_{i=1}^{\Phi}$, $j = 1, ..., \Phi^c$, для которых каждая граничная точка $z \in \partial E_j^c$ является центром круга, в котором функция $w(z)$ однолистна. Такие накопители $(E_j^c(r), w(E_j^c(r)))$, $j = 1, ..., \Phi^c$, назовем *удобными однолистными накопителями*. Соответственно, $E_0^c = D \setminus \cup_{j=1}^{\Phi} E_j^c$ назовем *расширенным накопителем* особенностей (так как все кратные a-точки попадут в E_0^c).

Следующая теорема выявляет некоторое подобие поведения мероморфных функций и однолистных отображений.

---

[2]Вторая основная теорема теории Л. Альфорса следует из неравенств (0.8) и (0.11) теоремы В

$$\sum_{\nu=1}^{q} n(r, a_\nu) \ge (q-2)A(r) - o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \notin E,$$

где $n(r, a)$ – число a-точек в круге $|z| \le r$ без учета кратностей. Согласно определениям и формуле (0.8) замыкание каждой области $E_i(r)$ содержит не меньше чем $q - k_i$ $a_1, \ldots, a_q$-точек. Следовательно, предыдущее неравенство непосредственно вытекает из (0.11) и определений.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\mathbf{C}$; $\varphi^{35}(r) < A(r)$. Тогда для любой $r \notin E$ отображение $(D(r), w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$, $i = 0, 1, \dots, \Phi^c(r)$ такие, что для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ – удобные однолистные накопители с тотальным дефектом*

$$\Delta \leq 4 \tag{0.12}$$

и диаметрами

$$d(E_i^c(r)) \leq \varphi^7(r) r A^{-1/2}(r), \ i \geq 1; \tag{0.13}$$

для $i = 0$ отображение $(E_0^c(r), w(E_0^c(r)))$ – расширенный накопитель особенностей с

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \to 0, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{0.14}$$

Одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \to 1, \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{0.15}$$

Для произвольной $z \in E_i^c(r)$

$$\frac{1}{d(E_i^c(r))} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z)|}{1 + |w(z)|^2} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{S^{1/2}(E_i^c(r))}, \tag{0.16}$$

где $S(X)$ – площадь X, $\varphi_1(r) = 10^{K\varphi(r)}$, $K < \infty$ – абсолютная константа; для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in E_i^c(r)$

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}, \tag{0.17}$$

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_2), \tilde{w}(z_3))}{|z_2 - z_3|} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}, \tag{0.18}$$

где $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))$ – сферическое расстояние между $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$.

Из (0.13) и (0.16) следует, что для любых $z_1, z_2, z_3 \in E_i^c(r)$

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \geq \frac{A^{1/2}(r)}{\varphi^7(r)\varphi_1^2(r) r} \tag{0.19}$$

и

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \geq \frac{A^{1/2}(r)}{\varphi^7(r)\varphi_1^2(r) r}. \tag{0.20}$$

Дадим краткие комментарии к утверждениям (0.16) – (0.18), полезные для дальнейших применений. Сначала заметим, что наши области $E_i^c(r)$ не "узки" (так как благодаря (0.16) значения $d(E_i^c(r))$ и $S^{1/2}(E_i^c(r))$ сравнимы). Большинство a-точек для почти всех $a \in \mathbf{C}$ накоплено в $\cup E_i^c(r)$ так, что для большинства a-точек благодаря (0.16) и (0.17) значения

$$\frac{|w'(z_j(a))|}{1+|a|^2}, \quad \frac{1}{d(E_i^c(r))}, \quad \frac{1}{S^{1/2}(E_i^c(r))}$$

сравнимы. Утверждения (0.16) и (0.17) назовем *свойством сравнимости производных*, утверждение (0.18) – *свойством сравнимости расстояний*. Отметим, что теорема 1 объединяет и усиливает основные результаты работ [12] и [13].[3]

§1. О ПОСТОЯННЫХ В ТЕОРИИ АЛЬФОРСА

Краеугольным камнем в доказательстве наших результатов является построение областей с определенными свойствами, зависящими от $w(z)$ и заданного значения r $(z = re^{i\varphi})$. При этом мы используем теорию Альфорса и нам нужны значения постоянных, фигурирующих в его теоремах. Для круговых областей, рассматриваемых в теоремах Альфорса, эти постоянные подсчитаны в работе [14]. Однако этот подсчет не достаточен в нашем случае, поскольку области у нас в основном многоугольники.

Ниже мы будем использовать подсчеты, проведенные в работах [8] – [9]. Предварительно сделаем некоторые допущения, не ограничивающие общность.

А) Под конечносвязной областью будем иметь ввиду область, полученную выбрасыванием из сферы конечного числа односвязных областей с непересекающимися замыканиями и кусочно–аналитическими границами.

Б) Поверхностями наложения рассматриваемых на сфере областей являются w-образы односвязных областей в $|z| < R$ с гладкими границами. Предполагается, что поверхности наложения не имеют алгебраических точек ветвления

---

[3]Аналогично примечанию к теореме B, из (0.12) и (0.14) можно вывести основное заключение теории Альфорса о простых a-точках

$$\sum_{\nu=1}^{q} n_0(r, a_\nu) \geq (q-4)A(r) - o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \notin E,$$

где $n_0(r, a)$ – число простых a-точек в круге $|z| \leq r$.

над линиями, приводимыми в доказательствах Этого всегда можно добиться небольшой деформацией поверхности (что эквивалентно деформации области в z-плоскости), произвольно мало меняющей фигурирующие в теоремах величины.

Пусть F_0 – конечносвязная область на римановой сфере s (в частности, сама сфера s); F – конечная поверхность наложения над F_0 и $S(F_0) = \frac{J}{J_0}$, где J – площадь поверхности наложения над F_0, J_0 – площадь области F_0; D – область, лежащая внутри F_0, $S(D) = \frac{J(D)}{J_0(D)}$, где $J(D)$ – сумма площадей всех частей поверхности наложения, лежащих над D, $J_0(D)$ – площадь D.

Теорема А(1) (Первая основная теорема Альфорса для областей). *Существует конечное число $h_1(F_0)$, зависящее только от F_0 такое, что*

$$|S(F_0) - S(D)| \leq \frac{h_1(F_0)}{J_0(D)} L,$$

где L – длина относительной границы F, а

$$h_1(F_0) = \max\left\{\sup_\gamma \frac{C(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{\pi}{2\chi}\right\},$$

где γ – кривая длины $|\gamma| < \chi$, целиком лежащая в области F_0, кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0; $C(\gamma)$ – меньшая из площадей двух областей, на которые γ делит область F_0, χ – минимальное расстояние между граничными компонентами области F_0 (положим $\chi = \pi$, если область F_0 односвязна).

Скажем, что простая (замкнутая или открытая) кривая $\beta \subset s$ *сильно регулярна*, если существуют такие числа $k > 1$ и $d < \chi/2$, что для любой точки $P \in s$ и любого $d' < d$ суммарная длина частей кривой β, лежащих в $U_P(d')$, мажорируется величиной kd'. Здесь через $U_P(d')$ обозначено множество точек сферы s, отстоящих от P на расстоянии d'.

Пусть F_0 – конечносвязная область на римановой сфере s (в частности, сама сфера s), притом полагаем, что если $F_0 \neq s$, то граничные кривые области F_0 сильно регулярны; $\beta \subset F_0$ – кусочно аналитическая и сильно регулярная дуга; $S(\beta) = \frac{L(\beta)}{L_0(\beta)}$, где $L(\beta)$ – сумма длин всех лежащих над β дуг поверхности F; $L_0(\beta)$ – длина кривой β;

$$h'(F_0, \beta) = \max\left\{\sup_\gamma \frac{c(\gamma)}{|\gamma|}, \frac{L_0(\beta)}{2d}, k\right\},$$

где γ – кривая длины $|\gamma| < d$, целиком лежащая в области F_0, кроме двух концов, расположенных на одной из связных компонент границы F_0, $c(\gamma)$ – меньшая из длин частей кривой β, лежащих в двух областях, на которые γ разделяет область F_0.

Теорема A(2) (Первая основная теорема Альфорса для кривых). *Существует такая постоянная h_2, зависящая только от F_0 и β, что выполняется неравенство*

$$|S(F_0) - S(\beta)| \leq h_2(F_0, \beta)L,$$

а h_2 следующим образом зависит от F_0 и β :

1) если β – кривая, разбивающая область F_0 на две части и D – та из ограничиваемых кривой β частей F_0, которая имеет меньшую площадь, то

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,1}(F_0, \beta) = \frac{3h_1(F_0)h'(F_0, \beta)}{J_0(D)};$$

2) если β не разбивает область F_0, то дополнив ее до кривой β', удовлетворяющей условию 1), имеем

$$h_2(F_0, \beta) = h_{2,2}(F_0, \beta) = \frac{3h_1(F_0)h'(F_0, \beta')}{J_0(D)} + \frac{h'(F_0, \beta')}{L_0(\beta)}.$$

Теорема A(3) (Вторая основная теорема Альфорса). *Пусть D_i ($i = 1, \ldots, q \geq 3$) – односвязные области на s, ограниченные кусочно-аналитическими сильно регулярными кривыми, $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда для любой конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой s имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{q}[S(s) - n(D_i)] + \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leq 2S(s) + h_0(D_1, \ldots, D_q)L,$$

где $n(D_i)$ – количество островов поверхности F над D_i, с учетом кратности, $n_1(D_i)$ – сумма порядков всех островов над D_i, а h_0 определяется следующим образом. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_q$ – кусочно аналитические, сильно регулярные кривые на s, соединяющие области $D_1, \ldots D_q$ так, что после проведения сечений по $\beta_1, \ldots, \beta_q$ область $F_0 = s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{D_i}$ распадается на две односвязные области F_0' и F_0''. Тогда

$$h_0(D_1, \ldots, D_q) =$$

$$= 6q \max \left\{ \left[J_0 \left(s \setminus \bigcup_{i=1}^{q} \overline{D}_i \right) \right]^{-1}; \max_i h_2(F_0', \beta_i); \max_i h_2(F_0'', \beta_i); \max_i h_2(F_0, \beta_i) \right\}.$$

§2. ПОСТРОЕНИЕ "СКЕЛЕТОВ ДРАКОНА" $B(n,i)$

Пусть $n_0(X)$ – количество простых (с кратностью единица) островов поверхности F над областью X. Наряду со второй основной теоремой Альфорса мы используем следующее неравенство :

$$\sum_{i=1}^{q}[S(s) - n_0(D_i)] \leq 4S(s) + \left[q\frac{h_1(s)}{\min_i J_0(D_i)} + 2h_0(D_1, ..., D_q) \right] L. \tag{2.1}$$

Докажем его. Из теоремы A(3), учитывая очевидное неравенство $n(X) - n_0(X) \leq$ $\leq 2n_1(X)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{q}[S(s) - n_0(D_i)] - \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leq 2S(s) + h_0(D_1, ..., D_q)L.$$

Учитывая, что

$$S(s) - n(D_i) \geq \frac{h_1(s)}{J_0(D_i)}L, \quad i = 1, ..., q,$$

из теоремы A(3) имеем

$$\sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leq 2S(s) + \left[q\frac{h_1(s)}{\min_i J_0(D_i)} + h_0(D_1, ..., D_q) \right] L,$$

так что из последних соотношений получаем неравенство (2.1).

Точке a на римановой сфере сопоставим то же значение, в которое она проектируется при стереографическом отображении сферы на плоскость, ρ-окрестность точки a на сфере, т.е. множество точек, отстающих от точки a на сферическом расстоянии, меньшем числа ρ, обозначим через $D(\rho, a)$.

Для описания областей на сфере будем пользоваться полярными координатами в трехмерном пространстве R^3 с началом, совпадающим с центром римановой сферы $(0, 0, \frac{1}{2})$ в декартовых координатах. Полярными координатами будут $\{\varphi, \theta, \rho\}$, где φ – угол в горизонтальной плоскости, θ – угол в вертикальной плоскости, ρ – полярный радиус. В дальнейшем у нас n – четное число ($n > 100$). Определим $\Gamma(k, \varphi_1)$ как кривые со следующими параметрическими представлениями : $\Gamma(k, \varphi_1) = \{\varphi(t), \theta(t), \rho(t)\}$, где $\varphi_1 > 1$ – целое число

$$\varphi(t) = \varphi(k, \varphi_1, t) = 2\pi t + \frac{\pi k}{n^{\varphi_1 - 1} - 1}, \quad \theta(t) = \theta(k, \varphi_1, t) = \frac{\pi}{2n}t,$$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}, \quad t \in [-(n-5), n-5], \quad k = 0, 1, ..., n^{\varphi_1 - 1} - 1.$$

Пусть

$$\Gamma^*(k, \varphi_1) = \Gamma(k, \varphi_1) \setminus \left\{ D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \cup D\left(\frac{9}{n}, 0\right) \right\}, \quad k = 0, 1, ..., n^{\varphi_1 - 1} - 1.$$

Рассмотрим две односвязные области на сфере, ограниченные кривыми $\Gamma^*(0, \varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1} - 1, \varphi_1)$ и части границы $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, соединяющие концы кривых $\Gamma^*(0, \varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1}, \varphi_1)$. Пусть G – та из двух областей, которая содержит кривые $\Gamma^*(k, \varphi_1)$, $k = 1, ..., n^{\varphi_1-1} - 2$. Обозначим через G_m, $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ области, которые принадлежат области G и ограничены кривыми $\Gamma^*(2m-2, \varphi_1)$, $\Gamma^*(2m-1, \varphi_1)$ и частями границы $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$ и $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, соединяющими концы кривых $\Gamma^*(2m-2, \varphi_1)$, $\Gamma^*(2m-1, \varphi_1)$.

Подсчитаем теперь для заданной конечной односвязной поверхности наложения F над римановой сферой и областями G_m, $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$ постоянные, фигурирующие во второй основной теореме Альфорса. При этом мы вместо кривых β_m, $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1-1}}{2} - 1$ (см. §1) выберем участки границы $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющие концы кривых $\Gamma^*(2m-1, \varphi_1)$, $\Gamma^*(2m, \varphi_1)$ и являющиеся граничными для области G. В качестве кривой $\beta_{\frac{n^{\varphi_1-1}}{2}}$ выберем участок границы $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, соединяющий концы кривых $\Gamma^*(0, \varphi_1)$, $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1} - 1, \varphi_1)$, и не являющейся граничной дугой области G.

В качестве области F_0' (фигурирующей в теореме A(3)) у нас выступает область $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, а F_0'' – область

$$S \setminus \left\{ \bar{D}\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \cup \left\{ \bigcup_{m=1}^{n^{\varphi_1-1}/2} \overline{G}_m \right\} \right\}.$$

Далее, через K_1, K_2 будем обозначать постоянные, не зависящие от n. Заметим, что минимальное расстояние между граничными компонентами области

$$F_0 = s \setminus \left\{ \bigcup_{m=1}^{n^{\varphi_1-1}/2} \overline{G}_m \right\}$$

есть величина, большая чем $\frac{K_1}{n^{\varphi_1}}$ и меньшая чем $\frac{K_2}{n^{\varphi_1}}$, где K_1 и K_2 – некоторые постоянные. С другой сотроны, все рассмотренные кривые *сильно регулярны*, если d взять равным $\frac{K_3}{n^{\varphi_1}}$ (где K_3 $(K_3 < K_2)$ – некоторая постоянная), а число

k, фигурирующее в определении сильной регулярности, взять равным некоторой постоянной K_4.

Для подсчета $h_2(F_0'', \beta_m)$, $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}$ нужно сначала дополнить кривую β_m до некоторой замкнутой кривой β_m'. В качестве β_m' возьмем границу односвязной области D_m, окруженной облостями $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$, G_m, G_{m+1}, притом при $m < \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}$ полагаем $D_m \subset G$ и при $m = \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}$ полагаем D_m вне G. Легко убедиться в существовании таких постоянных K_5, K_6, K_7, что

$$J_0(D_m) \geq \frac{K_5}{n^{\varphi_1 - 1}}; \quad L_0(\beta_m') \leq K_6 n; \quad L_0(\beta_m) \geq \frac{K_7}{n^{\varphi_1}}.$$

Заметим еще, что для области F_0'' величина $\sup\limits_{\gamma} \frac{c(\gamma)}{|\gamma|}$ не превосходит числа 2, так что имеем

$$h'(F_0'', \beta_m') = \max\left\{2, \frac{K_6}{2K_3} n^{\varphi_1 + 1}, K_4\right\} \leq K_8 n^{\varphi_1 + 1},$$

где K_8 не зависит от n (будем помнить, что n предполагается достаточно большим). Из геометрических рассмотрений видим, что $h_1(F_0'') \leq K_9 n$, так что с учетом предыдущего неравенства и оценок величин $J_0(D_m)$ и $L_0(\beta_m)$, получим

$$h_2(F_0'', \beta_m) \leq \frac{3K_9 K_8}{K_5} n^{2\varphi_1 + 1} + \frac{K_8}{K_7} n^{2\varphi_1 + 1} \leq K_{10} n^{2\varphi_1 + 1}.$$

Проведем аналогичные построения для области F_0. Поскольку F_0 – многосвязная область, притом $\chi > \frac{K_1}{n^{\varphi_1}}$, то легко убедиться в существовании постоянной K_{11}, с которой верно неравенство $h_1(F_0) \leq K_{11} n^{\varphi_1}$. Возьмем в качестве кривой β_m', $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}$ граничную кривую области $D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$. Поскольку $L_0(\beta_m') \leq \frac{K_{12}}{n}$, легко придем к оценке

$$h'(F_0, \beta_m') = \max\left\{2, \frac{K_{12}}{2K_3} n^{\varphi_1 - 1}, K_4\right\} \leq K_{13} n^{\varphi_1 - 1}.$$

Учитывая еще, что $J_0\left(D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)\right) \geq \frac{K_{14}}{n^2}$ и подставив оценки для $L_0(\beta_m)$ и $h_1(F_0)$ в выражение для $h_2(F_0, \beta_m)$, будем иметь

$$h_2(F_0, \beta_m) \leq \frac{3K_{11} K_{13}}{K_{14}} n^{2\varphi_1 + 1} + \frac{K_{13}}{K_7} n^{2\varphi_1 - 1} \leq K_{15} n^{2\varphi_1 + 1}, \ m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}.$$

Очевидно, для области $F_0' = D\left(\frac{9}{n}, \infty\right)$, более просто устроенной, чем области F_0'' и F_0, величина $h_2(F_0', \beta_m)$ значительно меньше, чем в случае областей F_0'' и F_0 и уж во всяком случае

$$h_2(F_0', \beta_m) \leq K_{16} n^{2\varphi_1 + 1}, \quad m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1 - 1}}{2}.$$

Из предыдущих оценок и очевидной оценки $J_0(F_0) > \frac{\pi}{4}$ теперь получим

$$h_0(G_1, ..., G_{n^{\varphi_1-1}/2}) \leq 3n^{\varphi_1-1} \max\{\frac{4}{\pi}, K_{10}, K_{15}, K_{16}\} \, n^{2\varphi_1+1} \leq K_{17} n^{3\varphi_1}.$$

Так как, к тому же, с некоторой постоянной K_{18} справедливы неравенства

$$J_0(G_m) \geq \frac{K_{18}}{n^{\varphi_1-1}}, \quad m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1-1}}{2},$$

то, записав неравенство (2.1) для областей G_m, с учетом последних двух соотношений, получим неравенство

$$\sum_{m=1}^{n^{\varphi_1-1}/2} [S(s) - n_0(G_m)] \leq 4S(s) + K_{19} n^{3\varphi_1} L.$$

Обозначим через $B_0'(n,1)$ ту из областей G_m, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(G_m)$, $m = 1, ..., \frac{n^{\varphi_1-1}}{2}$. Если таких областей несколько, обозначим через $B_0'(n,1)$ произвольную из них. Из последнего неравенства имеем

$$S(s) - n_0(B_0'(n,1)) \leq \frac{8S(s)}{n^{\varphi_1-1}} + 2K_{19} n^{2\varphi_1+1} L. \tag{2.2}$$

Пусть

$$B_0'(n,1) = G_{m_0}, \quad \Gamma' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{2}{3}, \varphi_1\right), \quad \Gamma'' = \Gamma^*\left(2m_0 - 2 + \frac{1}{3}, \varphi_1\right).$$

Кривые Γ' и Γ'' делят область $B_0'(n,1)$ на три “подобные” области. Обозначим через $B_0(n,1)$ (см. Рис. 1) среднюю из них, граничными дугами которой являются кривые Γ' и Γ''.

Далее нам удобно пользоваться символом $\sqcup$. *Соединением* $C = A \sqcup B$ двух открытых множеств A и B назовем множество $C = int(\overline{A \cup B})$, где черта сверху обозначает замыкание, а *int* – внутренность множества. Символ $\sqcup$ и термин “соединение” введены А. А. Гольдбергом и А. Е. Еременко. Пусть

$$B_0^*(n) = s \setminus \left\{B_0(n,1) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, \infty\right) \sqcup D\left(\frac{9}{n}, 0\right)\right\}.$$

Рассмотрим компоненты пересечения $B_0^*(n)$ с большой окружностью, проходящей через точки ∞ и $\{0, 0, \frac{1}{2}\}$. Через M_0 обозначим ту компоненту, которая содержит $\{0, 0, \frac{1}{2}\}$.

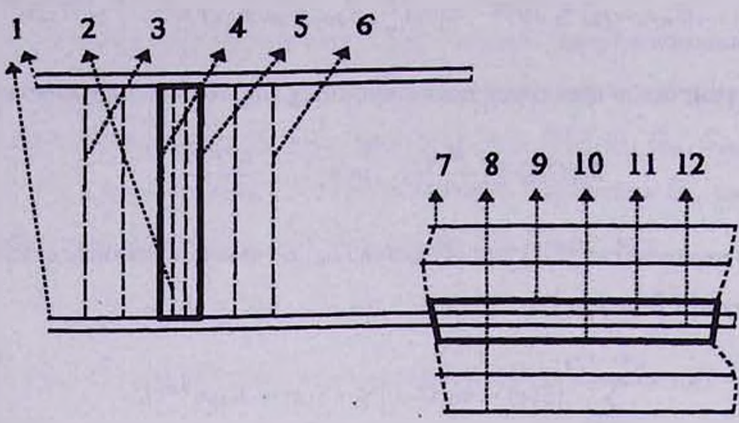

Рис. 1. Число 1 обозначает $B_0(n,1)$; 2 – $\bar{B}_p(n)$; 3 – $M_{n^{\varphi_1-1}}(p)$; 4 – $M_{2t}(p)$; 5 – $M_{2t-1}(p)$; 6 – $M_1(p)$; 7 – $\Gamma^*(0,\varphi_1)$; 8 – $\Gamma^*(n^{\varphi_1-1},\varphi_1)$; 9 – $\Gamma^*(2m_0-2,\varphi_1)$; 10 – $\Gamma^*(2m_0-1,\varphi_1)$; 11 – $\Gamma'' = \Gamma^*\left(2m_0-2+\frac{1}{3},\varphi_1\right)$; 12 – $\Gamma' = \Gamma^*\left(2m_0-2+\frac{2}{3},\varphi_1\right)$. Жирная линия на правой стороне ограничивает часть области $B_0'(n,1)$. Жирная линия на левой стороне ограничивает область $\bar{B}_p'(n)$.

Отложим на кривой Γ'' точки $w_0, w_1, ..., w_{\tau'}$ (величина τ' будет ясна из дальнейшего) таким образом, чтобы длина дуги кривой Γ'', лежащая между произвольными последовательными точками w_{j-1} и w_j, $j = 1, ..., \tau'$ равнялась бы $1/n$, притом, чтобы координаты θ_i' точек w_i (в представлении полярными координатами $\{\varphi,\theta,\rho\}$) возрастали вместе с i. Таким же образом отложим на Γ'' точки $w_0, w_{-1}, ..., w_{-\tau''}$, с той лишь разницей, что координаты θ_i'' точек w_{-i} убывали при возрастании i.

Пусть M_i (M_{-i}) – дуга большой окружности сферы, проходящей через точки ∞ и w_i (w_{-i}) и целиком лежащая в области $B_0^*(n)$, кроме двух концов, принадлежащих границе $B_0^*(n)$ $(w_i \in \overline{M}_i,\ w_{-i} \in \overline{M}_{-i})$.

Дуги M_{2p} и M_{2p+1} при $p = 0, 1, ..., \tau^*$ делят область $B_0^*(n)$ на три односвязные области. Обозначим через $\tilde{B}_p^*(n)$ среднюю из этих трех областей, т.е. область, частями границы которой являютя и M_{2p} и M_{2p+1}. Число τ^* определяется следующим образом. Очевидно, найдутся номера p, при которых частью границы области $\tilde{B}_p^*(n)$ является некоторый участок грапицы области $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$. Пусть p_0

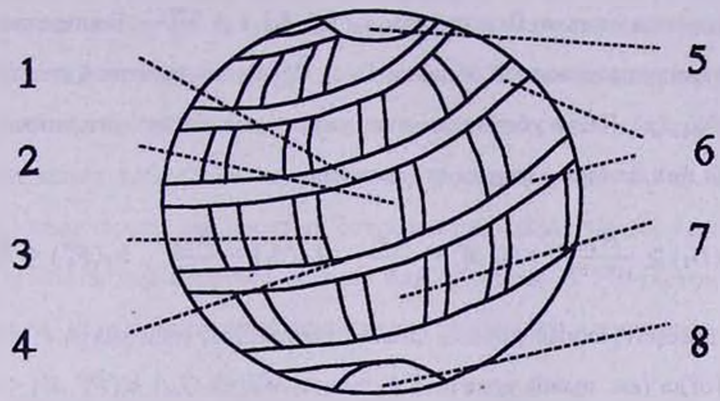

Рис. 2. **Число 1 обозначает d'_m ; 2 – d^-_m ; 3 – d^+_m ; 4 – d''_m ; 5 – $D(\frac{9}{n},\infty)$; 6 – $B_0(n,1)$; 7 – D_m ; 8 – $D(\frac{9}{n},0)$.**

– первый встретившийся при возрастании p номер, при котором это так (см. Рис. 4). Тогда $\tau^* = p_0 - 2$. Области $\widetilde{B}^*_p(n)$, $p = -1, ..., -\tau^{**}$ определим аналогичным образом с заменой M_{2p} и M_{2p+1} на M_{2p+1} и M_{2p}, соответственно. Очевидно, найдутся номера $p < 0$, при которых частью границы области $\widetilde{B}^*_p(n)$ является некоторый участок границы $D\left(\frac{9}{n}, 0\right)$. Пусть p_0 – первый встретившийся при убывании p номер, при котором это так. Тогда $-\tau^{**} = p_0 + 2$.

Разделим дугу P''_p кривой Γ'', лежащую между точками w_{2p} и w_{2p+1} на n^{φ_2-1} равных частей. Пусть $w_i(p)$, $i = 1, ..., n^{\varphi_2-1}$ – точки этих делений, притом $w_1(p) = w_{2p}$, а $w_{n^{\varphi_2}-1}(p) = w_{2p+1}$; $M_i(p)$ – дуги большой окружности сферы, проходящие через точки ∞ и $w_i(p)$ и целиком лежащие в области $\widetilde{B}^*_p(n)$ кроме двух концов, принадлежащих границе $\widetilde{B}^*_p(n)$.

Обозначим через $B^*_{p,t}(n)$, $t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$ односвязные области, являющиеся частью области $\widetilde{B}^*_p(n)$, заключенной между дугами $M_{2t-1}(p)$ и $M_{2t}(p)$ (Рис. 1).

Подсчитаем постоянную

$$h_0\left(B^*_{p,1}(n), ..., B^*_{p,\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}}(n)\right).$$

Соединим точки $w_1(p)$ и $w_{n^{\varphi_2}-1}(p)$ дугой $\beta_{\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}}$ на сфере, являющейся частью окружности радиуса 1/4 и не имеющей общих точек с $\bigcup_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}} B^*_{p,t}(n)$. Эта дуга совместно с дугой P''_p ограничивает некоторую область F'_0, не имеющую общих точек с $B^*_{p,t}(n)$, $t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве дуг β_t, $t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2} - 1$ возьмем дуги кривой P_p'', лежащие между точками $w_{2t}(p)$ и $w_{2t+1}(p)$. Области F_0'' и F_0 определяются однозначно. Подсчитаем $h_2(F_0'', \beta_t)$, $t \neq \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. В качестве кривой β_t' возьмем границу односвязной области $D_t \subset \widetilde{B}_p^*(n)$, заключенной между кривыми $M_{2t}(p)$ и $M_{2t+1}(p)$. Легко убедиться, что существуют такие постоянные K_{20}–K_{25}, с которыми при любых n верны неравенства

$$J_0(D_t) \geq \frac{K_{20}}{n^{\varphi_2+1}}, \quad L_0(\beta_t') \leq \frac{K_{21}}{n}, \quad L_0(\beta_t) \geq \frac{K_{22}}{n^{\varphi_2}}, \quad h_1(F_0'') \leq K_{23}$$

и что все рассмотренные кривые сильно регулярны, если взять $d = K_{24}/n^{\varphi_2}$ и $k = K_{25}$. Тогда (см. вывод подсчета h_2 для областей G_m) $h'(F_0'', \beta_t') \leq K_{26}n^{\varphi_2-1}$. С учетом предыдущих неравенств получим

$$h_2(F_0'', \beta_t') \leq K_{27}n^{2\varphi_2}, \quad t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2} - 1.$$

Так же, как и в случае областей G_m убедимся, что с соответствующими постоянными K_{28}, K_{29}, K_{30} последнее неравенство верно, если в нем заменить β_t, $t < \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$ на β_{n_2} и область F_0'' заменить на F_0' или F_0.

В итоге, согласно подсчету постоянной во второй основной теореме Л. Альфорса

$$h_0\left(B_{p,1}^*(n), ..., B_{p,\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}}(n)\right) \leq K_{31}n^{3\varphi_2-1}.$$

С другой стороны, выполняется, очевидно, неравенство

$$J_0(B_{p,t}^*(n)) \geq \frac{K_{32}}{n^{\varphi_2+1}}, \quad t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}.$$

Из неравенства (2.1), с учетом последних двух неравенств, вытекает

$$\sum_{t=1}^{\frac{n^{\varphi_2-1}}{2}} [S(s) - n_0(B_{p,t}^*(n))] \leq 4S(s) + K_{33}n^{3\varphi_2-1}L.$$

Обозначим через $\widetilde{B}_p'(n)$ (см. Рис. 1) ту из областей $B_{p,t}^*(n)$, для которой достигается минимум выражения $S(s) - n_0(B_{p,t}^*(n))$, $t = 1, ..., \frac{n^{\varphi_2-1}}{2}$. Если таких областей несколько, то обозначим через $\widetilde{B}_p'(n)$ произвольную из них. Из последнего неравенства вытекает оценка

$$S(s) - n_0(\widetilde{B}_p'(n)) \leq \frac{8S(s)}{n^{\varphi_2-1}} + 2K_{33}n^{2\varphi_2}L.$$

Проведем сечения сферы двумя такими большими окружностями сферы, проходящими через точку ∞, что точки пересечения этих окружностей с линией $\partial\widetilde{B}'_p(n)\cap\Gamma''$ делят эту линию на три равные части. Такие сечения делят область $\widetilde{B}'_p(n)$ на три "подобные" области, среднюю из которых, т.е. ту, для которой граничными являются дуги обеих окружностей, обозначим через $\widetilde{B}_p(n)$. Обозначим через $n'_0(X)$ количество тех простых островов над областью X, каждая из которых является частью простого острова над областью X'. С учетом того, что $n'_0(\widetilde{B}_p(n)) = n_0(\widetilde{B}'_p(n))$, последнее неравенство перепишем следующим образом :

$$S(s) - n'_0(\widetilde{B}_p(n)) \leq \frac{8S(s)}{n^{\varphi_2-1}} + 2K_{33}n^{2\varphi_2}L. \tag{2.3}$$

Пусть t_{τ^*} – t-индекс той из областей $B^*_{\tau^*,t}(n)$, которую мы приняли за область $\widetilde{B}'_{\tau^*}(n)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и $w_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$ и содержащая кривую $M_{2t_{\tau^*}}(\tau^*)$ рассекает область $B'_0(n,1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B'_0(n,2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с границей области $D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$.

Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B'_0(n,2)$ получим некоторую область $B'_0(n,3)$. Обозначим $B'_0(n) = B'_0(n,2)\cap B'_0(n,3)$ (см. Рис. 3).

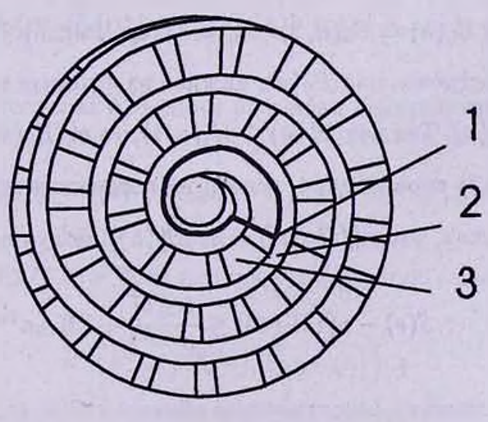

Рис. 3. Вид на сферу сверху. Жирной линией ограничена область $D(\infty)$; 1 обозначает W_{2,τ^*}; 2 – W_{1,τ^*}; 3 – D_{τ^*-1}.

Пусть $W_{1,\tau^*}, W_{2,\tau^*} \in \partial\widetilde{B}_{\tau^*}(n)\cap\Gamma''$ – концы дуг больших окружностей, являющихся граничными дугами областей $\widetilde{B}_{\tau^*}(n)$. Положим при этом, что W_{2,τ^*} лежит между точками W_{1,τ^*} и $w_{2t,\tau^*}(\tau^*)$. Дуга большой окружности, соединяющая точки ∞ и W_{2,τ^*} и содержащая часть границы $\tilde{B}_{\tau^*}(n)$, рассекает область $B_0(n,1)$ на две односвязные области. Обозначим через $B_0(n,2)$ ту из этих двух областей, граница которой не имеет общих точек с $\partial D\left(\frac{9}{n},\infty\right)$. Проделаем ту же процедуру с заменой τ^* на $-\tau^{**}$ и заменой ∞ на 0. В качестве аналога области $B_0(n,2)$ получим некоторую область $B_0(n,3)$.

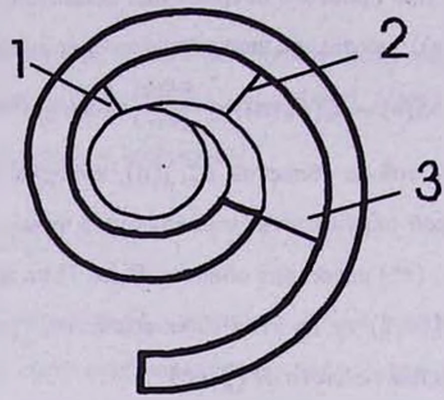

Рис. 4. Фрагмент из Рис. 3. Жирной линией ограничена область $B_0(n)$; 1 – линия, ограничивающая $\tilde{B}^*_p(n)$, $p=p_0$; 2 – кривая, ограничивающая $\tilde{B}^*_p(n)$, $p=p_0-1$; 3 – кривая, ограничивающая $\tilde{B}_p(n)$, $p=\tau^*=p_0-2$.

Обозначим $B_0(n)=B_0(n,2)\cap B_0(n,3)$ (см. Рис. 3). Пусть $n_0'(B_0(n))$ – количество простых островов над $B_0(n)$, каждая из которых является частью простого острова над $B_0'(n)$. Так как $B_0'(n)\subset B_0'(n,1)$, то $n_0'(B_0'(n))\geq n_0(B_0'(n,1))$, так что неравенство (2.2) справедливо, если в нем заменить область $B_0'(n,1)$ на $B_0'(n)$. Отсюда, учитывая, что $n_0'(B_0(n))=n_0(B_0'(n))$, получим утверждение

$$S(s)-n_0'(B_0(n))\leq\frac{8S(s)}{n^{\varphi_1-1}}+2K_{19}n^{2\varphi_1+1}L. \tag{2.4}$$

Теперь можем перейти к построению областей $B(n,1)$. Лежащая над некоторой кривой Г связная часть поверхности F, на замыкании которой не лежит ни одна точка границы F, естественно является аналогом острова (назовем *островом над* Г ; кратность острова – число листов этой связной области ; простой остров над Г – остров с кратностью единица.

В дальнейшем будем помнить, что, как это обусловлено допущением Б) в §1, все острова над линиями рассматриваемых нами конструкций, являются простыми.

Пусть $n_0(\Gamma)$ – количество простых островов над Γ; $n^*(\Gamma, A, B)$ – количество простых островов над отрезком Γ, удовлетворяющих условиям а), каждый простой остров является граничной дугой одновременно и для простого острова над областью A и для простого острова над областью B; б) каждый простой остров над A является одновременно частью простого острова над $A' \supset A$, и каждый простой остров над B является одновременно частью простого острова над $B' \supset B$.

Обозначим $b''_p = \partial\widetilde{B}_p(n) \cap \Gamma''$, $b'_p = \partial\widetilde{B}_p(n) \cap \Gamma'$. Если простой остров над b''_p является, одновременно, граничной дугой и для простого острова $\widetilde{B}_p(n)$ и для простого острова над $B'_0(n)$, то, очевидно, вклад от каждой тройки таких островов в величину

$$n'_0(B_0(n)) + n'_0\left(\widetilde{B}_p(n)\right) - n^*\left(b''_p, B_0(n), \widetilde{B}_p(n)\right)$$

равен единице, так что $n_0(b''_p)$ не меньше последнего выражения : иначе справедливо неравенство

$$n^*\left(b''_p, B_0(n), \widetilde{B}_p(n)\right) \geq n'_0(B_0(n)) + n'_0\left(\widetilde{B}_p(n)\right) - n_0(b''_p). \tag{2.5}$$

Из первой основной теоремы Альфорса вытекает неравенство

$$n_0(b''_p) \leq S(s) + K_{34}n^{2\varphi_2}L, \quad p = -\tau^{**}, ..., \tau^*. \tag{2.6}$$

Пусть $\varphi_1 = \varphi_2 = 6$. Из (2.3) – (2.6) получим следующую оценку :

$$n^*\left(b''_{-\tau^{**}}, B_0(n), \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)\right) \geq$$

$$\geq S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + \frac{8}{n^5}\right\}S(s) - (2K_{19}n^{13} + 2K_{33}n^{12} + K_{34}n^{12})L. \tag{2.7}$$

Рассмотрим простые острова над множеством

$$\left\{B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n)\right\} \setminus b'_{-\tau^{**}},$$

для которых составляющие простые острова над $B_0(n)$ и $\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n)$ являются, в свою очередь, частями простых островов над $B'_0(n)$ и $\widetilde{\widetilde{B}}'_{-\tau^{**}}(n)$, соответственно. Следовательно, количество простых островов не меньше, чем величина в правой части неравенства (2.7). Повторяя эту процедуру с заменой $b''_{-\tau^{**}}$ на $b''_{-\tau^{**}+1}$, заменой $B_0(n)$ на $\{B_0(n) \sqcup \widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n)\} \setminus b'_{-\tau^{**}}$ и заменой $\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n)$ на $\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}+1}(n)$, получим, что количество тех простых островов над множеством

$$\left\{B_0(n) \sqcup \widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}+1}(n)\right\} \setminus b'_{-\tau^{**}} \cup b'_{-\tau^{**}+1},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над $B_0(n)$, $(\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n)$, $\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}+1}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B'_0(n)$, $(\widetilde{\widetilde{B}}'_{-\tau^{**}}(n)$, $\widetilde{\widetilde{B}}'_{-\tau^{**}+1}(n))$, не меньше следующей величины :

$$S(s) - \left\{\frac{8}{n^5} + 2\frac{8}{n^5}\right\} S(s) - (2K_{19}n^{13} + 2 \cdot 2K_{33}n^{12} + 2K_{34}n^{12})L.$$

Повторяя эту процедуру с последующими $p = -\tau^{**} + 2, ..., \tau^*$, в конечном итоге придем к утверждению : количество $\Phi'(n)$ тех простых островов $B'(n, \mu)$, $\mu = 1, ..., \Phi'(n)$ над множеством

$$B(n,*) = \left\{B_0(n) \sqcup \widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{\widetilde{B}}_{\tau^*}(n)\right\} \setminus \left\{\bigcup_{p=-\tau^{**}}^{\tau^*} b'_p\right\},$$

принадлежащий к каждому из которых простой остров над областью $B_0(n)$, $(\widetilde{\widetilde{B}}_{-\tau^{**}}(n), ..., \widetilde{\widetilde{B}}_{\tau^*}(n))$, является, в свою очередь, частью простого острова над $B'_0(n)$, $(\widetilde{\widetilde{B}}'_{-\tau^{**}}(n), ..., \widetilde{\widetilde{B}}'_{\tau^*}(n))$, удовлетворяет неравенству

$$\Phi'(n) \geq S(s) - C(n), \tag{2.8}$$

где

$$C(n) = \left\{\frac{8}{n^5} + \frac{8(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5}\right\} S(s) -$$

$$-(2K_{19}n^{13} + 2(\tau^{**} + \tau^* + 1)K_{33}n^{12} + K_{34}(\tau^{**} + \tau^* + 1)n^{12})L.$$

Далее, учитывая неравенства (2.4), (2.8), а также, что неравенство (2.6) справедливо, если в нем заменить b''_p на b'_p а K_{34} – на некоторое K_{35}, как и при выводе неравенства (2.7), придем к следующему аналогичному утверждению : *количество тех островов $B'(n, \mu)$, к каждому из которых вдоль линии $b'_{-\tau^{**}}$*

примыкает простой остров над $B_0(n)$, являющийся, в свою очередь, частью простого острова над $B'_0(n)$, не меньше, чем

$$S(s) - C(n) - K_{35}n^{12}L - \frac{8}{n^5}S(s) - 2K_{19}n^{13}L.$$

Повторяя эту процедуру с $p = -\tau^{**} + 1, ..., \tau^*$, в конечном итоге придем к заключению : *количество $\Phi(n)$ тех простых островов $B(n, i) \in \{B'(n, \mu)\}_{\mu=1}^{\Phi'(n)}$, $i = 1, ..., \Phi(n)$ к каждому из которых вдоль каждой из линий b'_p, $p = -\tau^{**}, ..., \tau^*$ присоединяется простой остров над $B_0(n)$, являющийся, в свою очередь, частью простого острова над $B'_0(n)$, удовлетворяет неравенству*

$$\Phi(n) \geq S(s) - C(n) - (\tau^{**} + \tau^* + 1)\left[K_{35}n^{12}L - \frac{8}{n^5}S(s) - 2K_{19}n^{13}L\right] \geq$$

$$\geq S(s) - \frac{16(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5}S(s) - (\tau^{**} + \tau^* + 1)K_{36}n^{13})L, \tag{2.9}$$

где K_{36} – некоторая постоянная. Для правильного понимания идеи доказательства, важно заметить и помнить, что хотя области $B(n, *)$ и $B_0(n)$ примыкают друг к другу вдоль произвольной из линий b'_p, но вовсе не обязательно примыкание простого острова над $B(n, *)$ к себе через линию b'_p, а также вовсе не обязательно примыкание простого острова над $B_0(n)$, примыкающие через линии b'_{p_1} и b'_{p_2}, $p_1 \neq p_2$ к простому острову над $B(n, *)$, совпадали бы.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ $B(n, \cup D_m(i))$, $B'(n, \cup D_m(i))$ И ИХ СВОЙСТВА. ОСНОВНОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Обозначим через d_m^+ ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\partial\widetilde{B}_m(n)$, которая ближе к области $\widetilde{B}_{m+1}(n)$; d_m^- – ту из двух дуг больших окружностей, являющихся граничной дугой области $\partial\widetilde{B}_{m+1}(n)$, которая ближе к области $\widetilde{B}_m(n)$. Концы кривых d_m^+ и d_m^- лежат на кривых Γ'', Γ' и делят каждую из них на три части. Обозначим через d''_m среднюю из трех дуг, на которую делится кривая Γ'' ; d'_m – среднюю из трех дуг, на которую делится кривая Γ' (см. Рис. 2).

Пусть D_m, $m = -\tau^{**}, -\tau^{**} + 1, ..., \tau^* - 1$ – та из двух односвязных областей, ограничиваемых кривыми $d_m^+, d_m^-, d''_m, d'_m$, которая не имеет общих точек с $B_0(n)$; $D(\infty)$ ($D(0)$) – та из двух "улиткообразных" областей, составляющих множество

$$S \setminus \left\{B_0(n) \sqcup \widetilde{B}_{-\tau^{**}}(n) \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{B}_{\tau^*}(n) \sqcup D_{-\tau^{**}} \sqcup \cdots \sqcup D_{\tau^*-1}\right\},$$

которая содержит точку $\infty \in D(\infty)$ (точку $0 \in D(0)$) ;

$$d^+(\infty) = \partial D(\infty) \cap \Gamma''; \; d^-(\infty) = \partial D(\infty) \setminus d^+(\infty);$$

$$d^+(0) = \partial D(0) \cap \Gamma'; \quad d^-(0) = \partial D(0) \setminus d^+(0).$$

Примыкающий к $B(n,i)$ по кривой d''_m ($d^+(\infty)$, $d^+(0)$), простой остров над D_m ($D(\infty)$, $D(0)$) обозначим через $D_m(i)$ ($D(\infty,i)$, $D(0,i)$). Соединив с областью $B(n,i)$ все примыкающие к нему по кривым d''_m ($d^+(\infty)$, $d^+(0)$) острова $D_m(i)$ ($D(\infty,i)$, $D(0,i)$), получим некоторую область, удалив из которой множество $\left\{\bigcup\limits_{(m)} d'_m \cup d^-(\infty) \cup d^-(0)\right\}$, получим область $B_i^*(n, \cup D_m(i))$.

Рассмотрим подробнее конструкцию этих областей. Для заданного значения i_0, разобьем множество значений $m = -r^{**}, ..., r^* - 1$ на группы. Первая группа $\mathcal{M}_1 = \{m_1(i_0), m_1(i_0)+1, ..., m'_1(i_0)\}$ определяется из условия, что области $D_{m_1(i_0)}(i_0), ..., D_{m'_1(i_0)}(i_0)$ прмыкают к $B(n, i_0)$, тогда как $D_{m'_1(i_0)+1}$ не обладает этим свойством. Заметим, что $\mathcal{M}_1$ может быть пустой. Если $card\mathcal{M}_1 = 1$, то для индекса $m_1(i_0)+1$ не существует простого острова $D_{m_1(i_0)+1}(i_0)$.

Если $m'_1(i_0) \neq r^* - 1$, то вторая группа $\mathcal{M}_2 = \{m_2(i_0), m_2(i_0)+1, ..., m'_2(i_0)\}$ определяется из условия, что области $D_{m_2(i_0)}(i_0), ..., D_{m'_2(i_0)}(i_0)$ примыкают к $B(n, i_0)$, тогда как $D_{m'_2(i_0)+1}$ не обладает этим свойством. Если $m'_2(i_0) \neq r^* - 1$, то аналогичным образом определим группу $\mathcal{M}_3$ и т.д. Получим некоторое число $\sigma(i_0)$ групп $\mathcal{M}_q = \{m_q(i_0), ..., m'_q(i_0)\}$.

Если область $B(n, i_0)$ соединить с примыкающим к нему по кривой d''_{m_0} простым островом $D_{m_0}(i_0)$, то очевидно :

1) к области $D_{m_0}(i_0)$ примыкает по кривой $d^+_{m_0}$ ($d^-_{m_0}$) область

$$\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0) \subset B(n, i_0) \quad \left(\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0) \subset B(n, i_0)\right),$$

проекция которой на сферу совпадает с областью $\widetilde{B}_{m_0}(n)$ ($\widetilde{B}_{m_0+1}(n)$) ;

2) примыкающие к областям $\widetilde{B}_{m_0}(n, i_0)$ и $\widetilde{B}_{m_0+1}(n, i_0)$ простые острова над $B_0(n)$ совпадают.

Итак, для заданной группы $\mathcal{M}_q$ примыкающие к островам $\widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$, ..., $\widetilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$ (по линиям $b'_{m_q(i_0)}, ..., b'_{m'_q(i_0)+1}$) простые острова над $B_0(n)$, являющиеся, в свою очередь, частью простых островов над $B'_0(n)$), совпадают.

Обозначим этот простой остров над $B_0(n)$ через $B_0(n, i_0, \mathcal{M}_q)$. Будем различать два случая : область $B_0(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ совпадает (соотв. не совпадает) с простым островом, являющимся частью области $B^*_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, проектирующейся в область $B_0(n)$. В записи эти два случая будем отличать, подставляя вместо индекса q^* (соотв. q^{**}) индекс q.

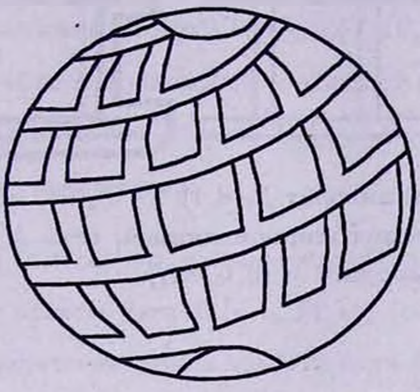

Рис. 5. Вид области $B_0(n)$ с областями $\tilde{B}_p(n)$, присоединенными вдоль линий b''_p.

Обозначим (см. Рис. 5,6)

$$M(n, i_0, \mathcal{M}_q) =$$

$$= \widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0) \sqcup D_{m_q(i_0)}(i_0) \sqcup \cdots \sqcup \widetilde{B}_{m'_q(i_0)}(n, i_0) \sqcup D_{m'_q(i_0)}(i_0) \sqcup B_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0).$$

Пусть $M'(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ – область, которая получится, если в преедыдущей записи заменить $\widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ на $\widetilde{B}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ и заменить $\widetilde{B}_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$ на $\widetilde{B}'_{m'_q(i_0)+1}(n, i_0)$. Здесь $\widetilde{B}'_{m_q(i_0)}(n, i_0)$ – остров над $\widetilde{B}'_{m_q(i_0)}(n)$, содержащий остров $\widetilde{B}_{m_q(i_0)}(n, i_0)$, который существует по построению. Области $M'(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ и $B_0(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ граничат, в частности, по общей дуге

$$l'(n, i_0, \mathcal{M}_q) = \partial M'(n, i_0, \mathcal{M}_q) \cap \Gamma'.$$

Выделим на каждой из двух больших окружностей, проходящих через точку ∞ и конечные точки линии $l'(n, i_0, \mathcal{M}_q)$, участки, которые делят $B_0(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ на три области. Обозначим через $B'_0(n, i_0, \mathcal{M}_q)$ ту из них, которая лежит посредине.

Очевидно

$$l'(n, i_0, \mathcal{M}_q) = \partial M'(n, i_0, \mathcal{M}_q) \cap \partial B'_0(n, i_0, \mathcal{M}_q).$$

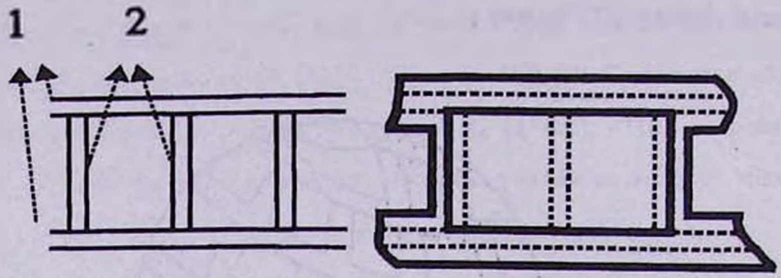

Рис. 6. Число 1 обозначает $B_0(n, 1)$; 2 – $\bar{B}_p(n)$; прямоугольная область справа, ограниченная жирной линией, есть $M(n, i_0, \mathcal{M}_q)$. Обводящая жирная линия содержит $M'(n, i_0, \mathcal{M}_q)$.

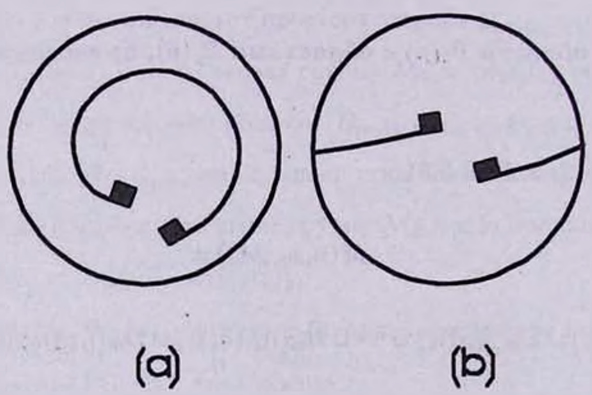

Рис. 7. (а) область $B_i(n, \cup D_m(i))$ показана сверху ; (б) вид сбоку.

Обозначим теперь (см. Рис. 7)

$$l(n, i_0, \mathcal{M}_q) = l'(n, i_0, \mathcal{M}_q) \cap \partial M'(n, i_0, \mathcal{M}_q),$$

$$B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) = B^*_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) \cup \left\{ \bigcup_{q^*} l(n, i_0, \mathcal{M}_{q^*}) \right\},$$

где объединение внутри фигурной скобки ведется по всем q^*, определенным выше. Перечислим некоторые свойства наших областей.

Свойство 1. Область $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$ "однолистна", т.е. в каждую точку сферы проектируется не более одной точки этой области и, вообще говоря, многосвязна.

По построению, каждый остров над $B_0(n)$, (или $\widetilde{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, ..., \tau^*$), являющийся частью $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, является, в то же время, частью простого острова над $B'_0(n)$ ($\widetilde{B}'_p(n)$, $p = -\tau^{**}, ..., \tau^*$ соответсвенно). Присоединив к $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, все те части этих островов над $B'_0(n)$, $\widetilde{B}'_p(n)$, $p = -\tau^{**}, ..., \tau^*$, которые проектируются в множества $B'_0(n) \setminus B_0(n)$, $\widetilde{B}'_p(n) \setminus \widetilde{B}_p(n)$, $p = -\tau^{**}, ..., \tau^*$, получим некоторую область на F. Присоединив к последней области все области $B'_0(n, i_0, \mathcal{M}_{q^{**}})$, получим нужную нам область $B'_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$. Из построений легко вытекают следующие предложения.

Свойство 2. Область $B'_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, вообще говоря, не однолистна. В частности, если она содержит область типа $B'_0(n, i_0, \mathcal{M}_{q^{**}})$, то над каждой точкой сферы, в которую проектируется некоторая точка области $B'_0(n, i_0, \mathcal{M}M_{q^{**}})$, лежат две точки, принадлежащие области $B'_0(n, \cup D_m(i_0))$.

Свойство 3. $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0)) \subset B'_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$.

Для любого i_0 расстояние $\rho(n)$ между границами этих областей, понимаемое как длина кратчайшей кривой, лежащей на $B'_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$ и соединяющей границу этой области и области $B_{i_0}(n, \cup D_m(i_0))$, удовлетворяет, с некоторой постоянной, неравенству

$$\rho(n) \geq \frac{K_{37}}{n^6}. \tag{3.1}$$

Здесь и далее K с индексами – постоянная, зависящая только от геометрических построений. Для каждого i область $B_i(n, \cup D_m(i))$ может быть дополнена некоторыми областями $\widetilde{\Delta}^i_j(n) \subset \{D_m, m = -\tau^{**}, ..., \tau^* - 1, D(\infty), D(0)\}$, таким образом, что замыкание объединения будет сферой. Нам потребуется следующая оценка :

$$\sum_{n=1}^{\Phi(n)} \widetilde{k}_i(n) \leq 4S(s) + \frac{K_{38}}{n} S(s) + K_{39} n^{17} L. \tag{3.2}$$

Докажем его. Если

$$n^*_0(D_m), \quad m = -\tau^{**}, ..., \tau^* - 1, \quad (n^*_0(D(\infty)),\ n^*_0(D(0)))$$

– количество тех простых островов над D_m $(D(\infty), D(0))$, которые не примкнули к островам $B(n,i)$, $i=1,...,\Phi(n)$, то очевидно

$$n_0^*(D_m) \le n_0(d_m'') - \Phi(n), \quad m = -\tau^{**},...,\tau^* - 1, \tag{3.3}$$

$$n_0^*(D(\infty)) \le n_0(d^+(\infty)) - \Phi(n), \quad n_0^*(D(0)) \le n_0(d^+(0)) - \Phi(n).$$

Из теоремы A(2) легко вытекает оценка

$$n_0(d_m''), n_0(d^+(\infty)), n_0(d^+(0)) \le S(s) + K_{40}n^2L, \quad m = -\tau^{**},...,\tau^* - 1.$$

Подставляя последнее неравенство и неравенство (2.9) в (3.3) и суммируя, придем к утверждению

$$P_0 = \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} n_0^*(D_m) + n_0^*(D(\infty)) + n_0^*(D(0)) \le$$

$$\le (\tau^{**} + \tau^* + 2)\left[K_{40}n^2L + \frac{16(\tau^{**} + \tau^* + 1)}{n^5}S(s) + (\tau^{**} + \tau^* + 1)K_{36}n^{13})L\right] \le$$

$$\le \frac{K_{38}}{n}S(s) + K_{41}n^{17}L. \tag{3.4}$$

Здесь мы учли, что $t^{**} + t^* < \pi n^2$. Запишем неравенство (2.1) для совокупности областей $D(\infty), D(0)$, D_m, $m = -\tau^{**},...,\tau^* - 1$. При этом в качестве кривых β_p, $p = -\tau^{**} + 1,...,\tau^* - 1$, соединяющих области D_{p-1} и D_p, возьмем кривые b_p''; в качестве кривых $\beta_{-\tau^{**}}$ (β_{τ^*}), соединяющих области $D(0)$, $D_{-\tau^{**}}$ $(D(\infty)$ и $D_{\tau^*-1})$, возьмем кривые $b''_{-\tau^{**}}$ (b''_{τ^*}); в качестве кривых β_p', $p = -\tau^{**},...,\tau^*$ возьмем границы областей $\widetilde{B}_p(n)$.

Разделим линии $\partial B_0(n) \cap d^-(\infty)$ и $\partial B_0(n) \cap d^-(0)$ на три равные части. Проведем "параллельные" линиям Γ' и Γ'' разрезы, соединяющие соответствующие точки делений. Эти разрезы делят область $B_0(n)$ на три области, границу средней из которых обозначим β'_{τ^*+1}. В качестве кривой β_{τ^*+1} возьмем произвольный из описанных разрезов.

Таким образом, все построения, нужные для подсчета h_0, уже сделаны. Подсчет, аналогичный приведенному выше, приводит к неравенству

$$h_0(D(0), D_{-\tau^{**}},...,D_{\tau^*-1}, D(\infty)) \le K_{42}n^{13}.$$

Учитывая (2.1) и оценки

$$j_0(D(0)) \geq \frac{K_{43}}{n^2}, \quad J_0(D_m) \geq \frac{K_{43}}{n^2}, \quad m = -\tau^{**}, ..., \tau^* - 1, \quad J_0(D(\infty)) \geq \frac{K_{43}}{n^2},$$

получим

$$\sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [S(s) - n_0(D_m)] + 2S(s) - n_0(D(\infty)) - n_0(D(0)) \leq 4S(s) + K_{44}n^{15}L. \quad (3.5)$$

Количество простых островов над $D(0), D(\infty), D_m$, $m = -\tau^{**}, ..., \tau^* - 1$, примыкающих к $B(n, i)$, $i = 1, ..., \Phi(r)$, равно

$$P_1 = \sum_{m=-\tau^{**}}^{\tau^*-1} [n_0(D_m) - n_0^*(D_m)] + +[n_0(D(0)) - n_0^*(D(0))] + [n_0(D(\infty)) - n_0^*(D(\infty))].$$

Из (3.4) и (3.5) получаем оценку

$$P_1 \geq [(\tau^{**} + \tau^* + 2) - 4]S(s) - \frac{K_{38}}{n}S(s) - (K_{41} + K_{44})n^{17}L. \quad (3.6)$$

Общее количество простых островов над $d^+(\infty)$, $d^+(0)$, d_m'', $m = -\tau^{**}, ..., \tau^* - 1$, являющихся, одновременно, граничными участками $B(n, i)$, $i = 1, 2, ..., \Phi(n)$, равно $\Phi(n)(\tau^{**} + \tau^* + 2)$. Очевидно

$$\Phi(n)(\tau^{**} + \tau^* + 2) - P_1 = \sum_{i=1}^{\Phi(n)} \tilde{k}_i(n).$$

Так как согласно неравенству (2.6) для любого p

$$\Phi(n) \leq n_0(b_p'') \leq S(s) + K_{34}n^{12}L, \quad (3.7)$$

то получим

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \tilde{k}_i \leq 4S(s) + \frac{K_{38}}{n}S(s) + (K_{41} + K_{44})n^{17}L + (\tau^{**} + \tau^* + 2)K_{34}n^6 L \leq$$

$$\leq 4S(s) + \frac{K_{38}}{n}S(s) + K_{39}n^{17}L,$$

т.е. получим неравенство (3.2).

Пусть теперь наша поверхность F является образом односвязной области D при отображении некоторой однозначной функцией $w(z)$. Положим, что для функции $w(z)$ существуют все встречающиеся далее интегралы. Пусть

$\bar{E}_i(n) = \bar{E}_i(n, D)$ (или $\bar{E}'_i(n) = \bar{E}'_i(n, D)$) – прообраз области $B_i(n, \cup D_m(i))$ ($B'_i(n, \cup D_m(i))$); $\Phi(x, D)$ (или $\Phi(y, D)$) – количество областей $\bar{E}_i(n)$, имеющих общие точки с отрезком $J_x(D) = \{z : \mathrm{Re}\, z = x\} \cap D$ (соответственно, с отрезком $J_y(D) = \{z : \mathrm{Im}\, z = y\} \cap D$); $L_x(D)$ ($L_y(D)$) – сферическая длина образа отрезка $J_x(D)$ (соответственно, отрезка $J_y(D)$) при отображении функцией $w(z)$. Положим, что при заданном x_0 число $\Phi(x_0, D) \geq 2$. Пусть $\bar{E}_{i_0}(D) \cap J_{x_0}(D) \neq \emptyset$. Тогда для $J_{x_0}(D)$ найдется интервал, w-образ δ_{i_0} которого соединяет граничные кривые областей $\bar{E}'_{i_0}(D)$ и $\bar{E}_{i_0}(D)$. Следовательно, в силу свойства 3) имеем $\rho(\delta_{i_0}) \geq \frac{K_{37}}{n^6}$, где $\rho(X)$ – сферическая длина X. Поскольку

$$\sum_{s=1}^{\Phi(x_0,D)} \rho(\delta_{i_s}) \leq L_{x_0}(D),$$

для таких x_0 получим

$$\Phi(x_o, D) = \sum_{s=1}^{\Phi(x_o,D)} 1 \leq \frac{n^6}{K_{37}} \sum_{s=1}^{\Phi(x_o,D)} \rho(\delta_{i_s}) \leq \frac{n^6}{K_{37}} L_{x_0}(D).$$

Учитывая еще случай $\Phi(x_0, D) \leq 1$, получим неравенство

$$\Phi(x, D) \leq \frac{n^6}{K_{37}} L_x(D) + 1, \tag{3.8}$$

справедливое для всех x. Аналогично получим неравенство

$$\Phi(y, D) \leq \frac{n^6}{K_{37}} L_y(D) + 1. \tag{3.9}$$

Если

$$D_{1,x} = \inf_{z\in D} \mathrm{Re}\, z, \quad D_{2,x} = \sup_{z\in D} \mathrm{Re}\, z, \quad D_{1,y} = \inf_{z\in D} \mathrm{Im}\, z, \quad D_{2,y} = \sup_{z\in D} \mathrm{Im}\, z,$$

то

$$\int_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, n)\, dx = \sum_{i=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z\in \bar{E}_i(n)} \mathrm{Re}\, z - \inf_{z\in \bar{E}_i(n)} \mathrm{Re}\, z \right),$$

$$\int_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, n)\, dy = \sum_{i=1}^{\Phi(n)} \left(\sup_{z\in \bar{E}_i(n)} \mathrm{Im}\, z - \inf_{z\in \bar{E}_i(n)} \mathrm{Im}\, z \right).$$

Очевидно, $d(\bar{E}_i(n))$ меньше суммы выражений в предыдущих скобках, так что

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} d(\bar{E}_i(n)) \leq \int_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} \Phi(x, n)\, dx + \int_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} \Phi(y, n)\, dy,$$

откуда, используя неравенства (3.8) и (3.9), имеем

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} d(\bar{E}_i(n)) \le \frac{n^6}{K_{37}} \left\{ \int_{D_{1,x}}^{D_{2,x}} L_x(D)dx + \int_{D_{1,y}}^{D_{2,y}} L_y(D)dy \right\} + 2d(D), \qquad (3.10)$$

где $d(D)$ – длина границы D.

Обозначив (в терминах функции $w(z)$) величину $S(s)$ через $A(D,w)$ и L – через $L(D,w)$ и подытожив полученные утверждения, получим следующее

Предложение 1. *При заданном четном $n > n_0 > 100$ можно указать области $\bar{E}_i(n) \subset D$, $i = 1, \ldots, \Phi(n)$, для которых выполняются следующие свойства :*

а) Для числа областей $\Phi(n)$ имеем

$$|\Phi(n) - A(D,w)| \le Q_1(D,w), \qquad (3.11)$$

где

$$Q_1(D,w) = \frac{K_{45}}{n^3} A(D,w) + K_{46} n^{15} L(D,w).$$

б) В каждой области $\bar{E}_i(n)$ функция $w(z)$ однолистна; на границе $\bar{E}_i(n)$ эта функция не имеет кратных точек ; $\bar{E}_i(n) \cap \bar{E}_j(n) = \emptyset$, $i \ne j$; замыкание множества $\bar{E}_i(n)$, стереографически отображенное на сферу, совпадает со сферой, из которой исключено множество $\bigcup_{j=1}^{\bar{k}_i(n)} \tilde{\Delta}_j^i(n)$. Множества $\tilde{\Delta}_j^i(n) = \tilde{\Delta}_j^i(n, D)$, $i = 1, \ldots, \Phi(n)$, $j = 1, \ldots, \bar{k}_i(n)$, односвязны и $\tilde{\Delta}_{j_1}^i(n) \cap \tilde{\Delta}_{j_2}^i(n) = \emptyset$, $j_1 \ne j_2$.

в) Для сферических диаметров $\rho(\tilde{\Delta}_j^i(n))$ множества $\tilde{\Delta}_j^i(n)$ имеем

$$\rho(\tilde{\Delta}_j^i(n)) \le \frac{K_{47}}{n}, \quad i = 1, \ldots, \Phi(n), \quad j = 1, 2, \ldots, \bar{k}_i(n). \qquad (3.12)$$

г) Общее количество исключенных областей удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{\Phi(n)} \bar{k}_i(n) \le 4A(D,w) + Q_2(D,w), \qquad (3.13)$$

где

$$Q_2(D,w) = \frac{K_{48}}{n} A(D,w) + K_{49} n^{17} L(D,w).$$

д) Сумма диаметров областей $\bar{E}_i(n)$ удовлетворяет неравенству (3.10).

Здесь предложение а) вытекает из неравенств (2.9) и (3.7); предложение б) вытекает из геометрических построений ; предложение в) вытекает из того, что области $\tilde{\Delta}_j^i(n) \in \{D(\infty), D(0), D_m, m = -\tau^{**}, \ldots, \tau^* - 1\}$, а диаметр каждой из последних областей есть величина порядка $1/n$; предложение г) совпадает с (3.2).

§4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\bar{w}$ – сферический образ w, $\bar{w}(X)$ – сферический образ $w(X)$, $\bar{l}(\Gamma)$ – сферическая длина кривой Γ. Напомним, что через $D(\rho, w_0)$ обозначена сферическая ρ-окрестность точки w_0 (т.е. множество $\{w : \bar{d}(\bar{w}, \bar{w}_0) < \rho\}$, где $\bar{d}(\bar{w}, \bar{w}_0)$ – сферическое расстояние между w и w_0); $D^*(\rho, w_0)$ – наибольший круг с центром w_0, принадлежащий плоской проекции $D(\rho, w_0)$; $z = F(w)$ – обратная к $w(z)$ функция.

Нам понадобятся следующие утверждения, сразу вытекающие из геометрических построений, приведших к предложению 1.

Утверждение 1. Существует постоянная K_{50} такая, что для произвольной $w_0 \in \tilde{E}_i(n) \cup \partial\tilde{E}_i(n)$ сферический круг $D(K_{50}n^{-6}, w_0)$ лежит в $\bar{w}(D)$, а функция $z = F(w)$ взаимно однозначна в $D(K_{50}n^{-6}, w_0)$.

Утверждение 2. Если множество $\bar{w}(\tilde{E}_i(n))$ содержит хотя бы одну точку, принадлежащую области $D(n^{-1}, \infty)$, то
$D(9n^{-1}, \infty) \subset \bar{w}(\tilde{E}_i(n))$. Если множество $\bar{w}(\tilde{E}_i(n))$ не содержит точек, принадлежащих $D(9n^{-1}, \infty)$, то $D(9n^{-1}, \infty) \cap \bar{w}(\tilde{E}_i(n)) = \emptyset$. Это также верно, если $D(9n^{-1}, \infty)$ заменить на $D(9n^{-1}, 0)$.

Утверждение 3. Любые две точки $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in \bar{w}(\tilde{E}_i(n))$ могут быть соединены кривой $\bar{\Gamma}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2} \subset \bar{w}(\tilde{E}_i(n))$ такой, что сферическая длина $\bar{l}\left(\bar{\Gamma}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2}\right)$ кривой $\bar{\Gamma}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2}$ меньше чем $K_{51}n$. Если $\bar{w}_1$ и $\bar{w}_2 \notin D(n^{-1}, \infty)$, то можно выбрать кривую $\bar{\Gamma}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2}$ так, чтобы $\bar{\Gamma}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2} \cap D(n^{-1}, \infty) = \emptyset$.

Утверждение 4. Каждая из областей $\bar{w}(\tilde{E}_i(n))$ содержит область $B_0(n)$ со свойствами

1) $B_0(n)$ содержит замыкание некоего сферического круга $D(K_{52}n^{-6}, w(z^*))$;
2) сферическая площадь $B_0(n)$ не меньше чем $K_{53}n^{-5}$.

Утверждение 5. Пусть γ – фиксированная кривая на римановой сфере. Тогда для произвольного i существует число n_0, зависящее от γ такое, что $\bar{w}(\tilde{E}_i(n)) \cap$ $\cap \gamma \neq \emptyset$ при $n > n_0$. На кривой γ можно указать точку $\bar{w}_1$ такую, что сферический круг $D(10^{-1}n^{-6}, w_1)$ принадлежит всем $\bar{w}(\tilde{E}_i(n))$, $i = 1, ..., \Phi(n)$, $n > n_1$.

Пусть теперь $w(z)$ – мероморфная функция в D. Выберем n таким, что

$$\frac{K_{50}}{n^6} < \frac{1}{n^2}. \tag{4.1}$$

Сделаем следующие замечания. Пусть $k(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ – хордальное расстояние между точками $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ на сфере. Тогда

$$k(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = \frac{|w_1 - w_2|}{(1 + |w_1|^2)^{1/2}(1 + |w_2|^2)^{1/2}}, \quad \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \neq \infty,$$

и

$$k(\tilde{w}_1, \infty) = \frac{1}{(1 + |w_1|^2)^{1/2}}, \quad \tilde{w}_1 = \infty.$$

Если $\tilde{w} \in D(n^{-1}, \infty)$, то $k(\tilde{w}, \infty) < n^{-1} < 100^{-1}$ и, следовательно

$$\frac{1}{|w|} \overset{100/99}{\Longleftrightarrow} k(\tilde{w}_1, \infty). \tag{4.2}$$

Если $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \notin D(n^{-1}, \infty)$ и $\tilde{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) < K_{50} 9^{-1} n^{-6}$, то

$$|k(\tilde{w}_1, \infty) - k(\tilde{w}_2, \infty)| \leq \tilde{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) < K_{50} 9^{-1} n^{-6} < 9^{-1} n^{-2}.$$

Поскольку

$$k(\tilde{w}_1, \infty) \geq 2\pi^{-1} \tilde{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \geq 2\pi^{-1} n, \quad k(\tilde{w}_2, \infty) > 2\pi^{-1} n^{-1},$$

то

$$k(\tilde{w}_1, \infty) < k(\tilde{w}_2, \infty) + 9^{-1} n^{-2} \leq k(\tilde{w}_2, \infty) \left(1 + \pi 18^{-1} n^{-1}\right), \tag{4.3}$$

и, следовательно

$$k(\tilde{w}_2, \infty) < k(\tilde{w}_1, \infty) \left(1 + \pi 18^{-1} n^{-1}\right). \tag{4.4}$$

Из предыдущих неравенств имеем

$$k(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) = |w_1 - w_2| k(\tilde{w}_1, \infty) k(\tilde{w}_2, \infty) < |w_1 - w_2| k^2(\tilde{w}_1, \infty) \left(1 + \frac{\pi}{18n}\right)$$

и

$$|w_1 - w_2| k^2(\tilde{w}_1, \infty) \left(1 + \frac{\pi}{18n}\right)^{-1} < k(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2).$$

Поэтому, применяя очевидное утверждение

$$2\pi^{-1} \tilde{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \leq k(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \leq \tilde{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2), \tag{4.5}$$

получим

$$|w_1 - w_2| \overset{2(1+\pi 18^{-1} n^{-1})}{\Longleftrightarrow} (1 + |w_1|^2)\, \bar{d}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2). \tag{4.6}$$

Лемма 1. *Для любых $z_1, z_2 \in \bar{E}_i(n)$*

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \overset{\varphi_1(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}, \quad \varphi_1(n) = 10^{K_{44} n^7}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1 : $\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \in D(n^{-1}, \infty)$. Сначала предположим, что $\tilde{w}(z_1) \notin \infty$ или $\tilde{w}(z_2) \neq \infty$. Из утверждения 2 имеем $D(9n^{-1}, \infty) \subset \tilde{w}(\tilde{E}_i(n))$ и, следовательно, функция $F(w)$, обратная к $w(z)$, взаимно однозначна в области $\{w : |w| > R_1\}$. $\tilde{w}$-образ последней области совпадает с $\tilde{D}(9n^{-1}, \infty)$. Очевидно, имеем

$$\frac{1}{|w(z_1)|} < \frac{1}{4R_1}, \quad \frac{1}{|w(z_2)|} < \frac{1}{4R_1}.$$

Согласно утверждению 2 область $\bar{E}_i(n)$ содержит в точности один простой полюс. Обозначим его через z_0. Нам нужна классическая "$\frac{1}{4}$-теорема Кёбе" : если $\psi(w)$ – регулярная однолистная функция в круге $|w - w_0| < t$, то для любой w из этого круга

$$\frac{t^2(t - |w - w_0|)}{(t + |w - w_0|)^3} \le \frac{|\psi'(w)|}{|\psi'(w_0)|} \le \frac{t^2(t + |w - w_0|)}{(t - |w - w_0|)^3}. \tag{4.8}$$

Применяя (4.8) к функции $F(W)$, $W = 1/w$ в точках $1/w(z_1)$ и $1/w(z_2) \subset \{W : |W| < R_1^{-1}\}$, получим

$$\frac{27}{80}\frac{|w^2(z_i)|}{|w'(z_i)|} \le \frac{|w^2(z_0)|}{|w'(z_0)|} \le \frac{125}{48}\frac{|w^2(z_i)|}{|w'(z_i)|}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\frac{|w^2(z_0)|}{|w'(z_0)|} = \lim_{z \to z_0} \frac{|w^2(z)|}{|w'(z)|}.$$

Отсюда следует

$$\frac{|w'(z_1)|}{|w(z_1)|^2} \overset{625/81}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{|w(z_2)|^2}.$$

Если z_1 или z_2 совпадают с полюсом z_0, то, очевидно, предыдущее утверждение также справедливо. Учитывая (4.2), получим

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \overset{10}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}. \tag{4.9}$$

Случай 2 : $\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \notin D(n^{-1}, \infty)$. Сперва предположим, что $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) < < K_{50}9^{-1}n^{-6}$. Пусть τ определено условием

$$D^*(K_{50}n^{-6}, w(z_2)) = \{w : |w - w(z_2)| < \tau\}.$$

Из вышеприведенного утверждения получим, что $|w(z_1) - w(z_2)| < \tau/4$. Согласно утверждению 1 функция $F(w)$ регулярна и взаимно однозначна, следовательно, с учетом (4.8), получим

$$|F'(w(z_1))| \overset{80/27}{\Longleftrightarrow} |F'(w(z_1))|$$

или

$$|w'(z_1)| \overset{80/27}{\Longleftrightarrow} |w'(z_2)|.$$

Так как $n > 100$, то из (4.3), (4.4) получим

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \overset{10}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}, \tag{4.10}$$

при $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) < K_{50}9^{-1}n^{-6}$.

Если $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) \geq K_{50}9^{-1}n^{-6}$, то двигаясь вдоль кривой $\tilde{\Gamma}_{\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)}$ из $\tilde{w}(z_1)$ к $\tilde{w}(z_2)$, отложим точки $\tilde{w}_1 = \tilde{w}(z_1)$, $\tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_n = \tilde{w}(z_2)$ так, чтобы $\tilde{d}(\tilde{w}_i, \tilde{w}_{i+1}) < K_{50}9^{-1}n^{-6}$. Согласно утверждению 3 существуют постоянная K_{54} и кривая $\tilde{\tilde{\Gamma}}_{\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)}$ такие, что число точек $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n$ меньше чем $K_{54}n^7$. Следовательно, применяя (4.10) к парам $(\tilde{w}(z_1) = \tilde{w}, \tilde{w}_2), (\tilde{w}_2, \tilde{w}_3), \ldots, (\tilde{w}_{n-1}, \tilde{w}_n = \tilde{w}(z_2))$, получим

$$\frac{|w'(z_1)|}{1 + |w(z_1)|^2} \overset{\varphi_1(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}. \tag{4.11}$$

Случай 3 : $\tilde{w}(z_1) \notin D(n^{-1}, \infty), \tilde{w}(z_2) \in D(n^{-1}, \infty)$. Предположим, что значение $\tilde{w}_0$ лежит на границе области $D(n^{-1}, \infty)$. Применяя (4.10) и (4.11), получим (4.7). Таким образом, утверждение (4,7) справедливо во всех случаях.

Лемма 2. *Для любых z_1 и $z_2 \in \bar{E}_i(n)$ имеем*

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{\varphi_2(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1 + |w(z_2)|^2}, \quad \varphi_2(n) = 10^{K_{55}n^7}. \tag{4.12}$$

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1 : $\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \in D(n^{-1}, \infty)$. Согласно утверждению 2 функция $F(W)$, $W = 1/w$ взаимно однозначна в круге $|W| < 1/R_1$ (см. доказательство предыдущей леммы) и

$$\frac{1}{|w(z_1)}<\frac{1}{4R_1}, \quad \frac{1}{|w(z_2)}<\frac{1}{4R_1}.$$

Применяя "$\frac{1}{4}$-теорему" Кёбе в круге $|W - W(z_2)| < 1/2R_1$ к функции

$$\frac{F(W(z))-F(W(z_2))}{F'(W(z_2))},$$

получим

$$|z_1 - z_2| = |F(W(z_1)) - F(W(z_2))| \geq \frac{1}{4}|F'(W(z_2)|d\left(\frac{1}{w(z_1)}, \frac{1}{w(z_2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}d\left(\frac{1}{w(z_1)}, \frac{1}{w(z_2)}\right),$$

где $d(x, y)$ – обыкновенное расстояние между x и y. Учитывая (4.2) и очевидное неравенство

$$\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \leq d\left(\frac{1}{w(z_1)}, \frac{1}{w(z_2)}\right),$$

получим

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{1}{4}\left(\frac{99}{100}\right)^2 \frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)). \tag{4.13}$$

Далее, пусть $\gamma \subset \tilde{E}_i(n)$ – кривая, соединяющая z_1 и z_2, w-образом которой является кратчайшая кривая в $\tilde{w}(\tilde{E}_i(n))$, соединяющая $\tilde{w}(z_1)$ и $\tilde{w}(z_2)$. Поскольку $\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \in D(n^{-1}, \infty)$, то применяя (4.9), получим

$$|z_1 - z_2| \leq \int_\gamma ds = \int_\gamma \frac{1+|w(z)|^2}{2|w'(z)|}\frac{2|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,ds \leq 10\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)). \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) следует

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{10}{=} \frac{|w'(z_2)|}{1+|w(z_2)|^2}. \tag{4.15}$$

Случай 2 : $\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \notin D(n^{-1}, \infty)$. Функция $F(w)$ однозначна в круге $D^*(K_{50}n^{-6}, w(z_2))$ с радиусом r, определенным выше и с центром $w(z_2)$. Если $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) < K_{50}9^{-1}n^{-6}$, то $|w(z_1) - w(z_2)| < r/4$ и согласно "$\frac{1}{4}$-теореме" Кёбе, примененной к функции $F(w)$ в круге $|w - w(z_2)| < r/4$, получим

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{1}{4}|F'(w(z_2))| \cdot |w(z_1) - w(z_2)|.$$

Вместе с (4.6) это дает следующее :

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{1}{8}(1+\pi/18n)^{-1}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)).$$

Действуя как выше, получим

$$|z_1 - z_2| \leq 10\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))$$

так, что

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{10}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1+|w(z_2)|^2}. \tag{4.16}$$

Пусть теперь $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2) \geq K_{50}9n^{-6}$. Выберем z' таким, чтобы одновременно 1) $|w(z') - w(z_2)| = r_1/2$, где r_1 – радиус круга $D^*(K_{50}9^{-1}n^{-6}, w(z_2))$, и 2) для z' модуль $|z' - z_2|$ достигает своего минимума. Применяя теорему Кёбе в круге $|w - w(z_2)| < r_1/2$, получим

$$|z_1 - z_2| > |z_2 - z'| \geq \frac{1}{4}|F'(w(z_2))| \cdot |w(z') - w(z_2)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z'), \tilde{w}(z_2)(1+|w(z')|^2)^{1/2}(1+|w(z_2)|^2)^{1/2}.$$

Так как $\tilde{d}(\tilde{w}(z'), \tilde{w}(z_2)) < K_{50}9^{-1}n^{-6}$, то применяя (4.3) и (4.4), получим

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{1}{2\pi}(1+\pi/18n)^{-1}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{d}(\tilde{w}(z'), \tilde{w}(z_2)).$$

Из 1) имеем $\tilde{d}(\tilde{w}(z'), \tilde{w}(z_2)) > \frac{1}{2\pi}K_{50}9^{-1}n^{-6}$ так, что

$$|z_1 - z_2| \geq K_{56}n^{-6}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}. \tag{4.17}$$

С другой стороны

$$|z_1 - z_2| \leq \int\limits_{w^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\tilde{w}(z_1),\tilde{w}(z_2)})} ds = \int\limits_{w^{-1}(\tilde{\Gamma}_{\tilde{w}(z_1),\tilde{w}(z_2)})} \frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\, ds,$$

где $\tilde{\Gamma}$ – кривая из утверждения 3. Учитывая (4.7), получим

$$|z_1 - z_2| \leq \varphi_1(n)\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\tilde{l}\left(\tilde{\Gamma}_{\tilde{w}(z_1),\tilde{w}(z_2)}\right) \leq K_{51}n\varphi_1(n)\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}. \tag{4.18}$$

Поскольку $K_{50}9^{-1}n^{-6} \leq \tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) \leq \frac{\pi}{2}$, то согласно (4.17) и (4.18) имеем

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{K_{57}n^7\varphi_1(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1+|w(z_2)|^2}. \tag{4.19}$$

Случай 3 : $\tilde{w}(z_1) \in D(n^{-1}, \infty)$ и $\tilde{w}(z_2) \notin D(n^{-1}, \infty)$. Пусть $\tilde{w}^*$ - граничная точка $D(n^{-1}, \infty)$, ближайшая к точке $\tilde{w}(z_2)$ и $w(z^*) = w^*$. Тогда, очевидно

$$\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z^*)) + \bar{d}(\tilde{w}(z^*), \tilde{w}(z_2)) \le 2\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)).$$

Далее, из (4.11), (4.15) и (4.19) следует

$$|z_1 - z_2| \le |z_1 - z^*| + |z^* - z_2| \le 10\frac{1+|w(z^*)|^2}{|w'(z^*)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z^*)) +$$

$$+ K_{57} n^7 \varphi_1(n) \frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_2), \tilde{w}(z^*)) \le$$

$$\le \left(10\varphi_1(n) + K_{57} n^7 \varphi_1(n)\right) \frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z^*)) + \bar{d}(\tilde{w}(z^*), \tilde{w}(z_2)) \le$$

$$\le K_{58} n^7 \varphi_1(n) \frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)). \tag{4.20}$$

Если $\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) < K_{50} 9^{-1} n^{-6}$, то действуя как и в случае 2, получим

$$|z_1 - z_2| \ge \frac{1}{8}(1 + \pi/18n)^{-1}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w(z_2)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)),$$

а если $\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)) \ge K_{50} 9^{-1} n^{-6}$, то

$$|z_1 - z_2| \ge K_{56} n^{-6}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|} \ge \frac{2}{\pi} K_{56} n^{-6}\frac{1+|w(z_2)|^2}{|w'(z_2)|}\bar{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2)).$$

Из (4.20) и последних двух неравенств следует (4.12). Итак, лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого* $z \in \bar{E}_i(n)$ *имеем*

$$\frac{1}{d(\bar{E}_i(n))} \overset{\varphi_3(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}, \quad \varphi_3(n) = 10^{K_{59} n^7} \tag{4.21}$$

и

$$\frac{1}{S^{1/2}(\bar{E}_i(n))} \overset{\varphi_3(n)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}, \quad \varphi_3(n) = 10^{K_{60} n^7}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Согласно утверждению 4 существует сферический круг $D(K_{52} n^{-6}, w(z^*))$, замыкание которого лежит в области $\tilde{w}(\bar{E}_i(n))$ и значение $\tilde{w}(z') \in \partial D(K_{52} n^{-6}, w(z^*))$. Согласно леммам 1 и 2 для любого $z \in \bar{E}_i(n)$ имеем

$$d(\bar{E}_i(n)) \ge |z' - z^*| \ge \frac{1}{\varphi_2(n)}\frac{1+|w(z^*)|^2}{|w'(z^*)|}\bar{d}(\tilde{w}(z'), \tilde{w}(z^*)) \ge$$

$$\geq \frac{K_{52}}{n^6\varphi_1(n)\varphi_2(n)}\frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}.$$

Мы можем выбрать $z_1, z_2 \in \tilde{E}_i(n)$ так, чтобы $d(\tilde{E}_i(n)) < 2|z_1 - z_2|$. Пусть $\tilde{\Gamma}_{\tilde{w}(z_1),\tilde{w}(z_2)}$ была кривой как в утверждении 3. Согласно лемме 1 для любого $z \in \tilde{E}_i(n)$

$$d(\tilde{E}_i(n)) < 2|z_1 - z_2| \leq \int_{w^{-1}(\tilde{\gamma}_{\tilde{w}(z_1),\tilde{w}(z_2)})} \frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\,ds \leq$$

$$\leq 2K_{51}n\varphi_1(n)\frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}.$$

Из этих двух неравенств следует (4.21).

Согласно утверждению 4 и лемме 1 для любого $z \in \tilde{E}_i(n)$

$$S(\tilde{w}(\tilde{E}_i(n))) \geq S(w^{-1}(B_0(n))) =$$

$$= \int\limits_{w^{-1}(B_0(n))}\int \left(\frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}\right)^2 \left(\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\right)^2 d\sigma \geq \frac{K_{53}}{n^5\varphi_1^2(n)}\left(\frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}\right)^2.$$

Из этого неравенства, (4.21) и очевидного неравенства

$$S(\tilde{w}(\tilde{E}_i(n))) \leq d^2(\tilde{E}_i(n)) \leq \varphi_3^2(n)\left(\frac{1+|w(z)|^2}{|w'(z)|}\right)^2, \quad z \in \tilde{E}_i(n)$$

следует (4.22).

Лемма 4 (Л. Альфорс, см [1], гл. 13). *Пусть $w(z)$ – мероморфная функция в $\{z : |z| < R \leq \infty\}$, $A(r)$ – ее обычная альфорсовская характеристика. В случае $R < \infty$ мы предполагаем, что*

$$\lim_{r\to R}\sup(R-r)A(r) = +\infty. \tag{4.23}$$

В случае $R = \infty$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ и для всех $r > 0$ кроме множества E конечной логарифмической меры выполняется следующее неравенство :

$$L(r) \leq A^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(r).$$

При $R < \infty$ существуют монотонно возрастающая функция $\psi(r)$, стремящаяся к ∞ при $r \to R$, и последовательность $r_n \to R$ такая, что

$$L(r_n)\psi(r_n) \leq A(r_n).$$

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Применим предложение 1 и леммы 1 – 4 для $D = D(r)$ и для мероморфных функций $w(z)$ в комплексной плоскости. Для заданных функций $\varphi(r)$, как в теореме 1, мы выбираем $n = n(r)$ так, чтобы для $r > r_0$

$$\frac{n(r)-2}{K_{47}} \le \varphi(r) < \frac{n(r)}{K_{47}},$$

где постоянная K_{47} – та же, что и в утверждении 1. Применяя пункт д) предложения 1, получим следующий результат. Существуют области $\tilde{E}_i(r)$, $i = 1, \ldots, \Phi(r)$ в кругах $|z| \le r$, $r \notin E$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\Phi(r)} d(\tilde{E}_i(r)) \le \frac{2(K_{47}\varphi(r)+2)^6}{K_{37}} \iint\limits_{|z|\le r} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}\, d\sigma + 4\pi r \le$$

$$\le \frac{2(K_{47}\varphi(r)+2)^6}{K_{37}} \left(\iint\limits_{|z|\le r} d\sigma \right)^{1/2} (\pi A(r))^{1/2} + 4\pi r = K_{61}\varphi^6(r) r A^{1/2}(r). \tag{4.24}$$

Если $\varphi(r) \le A^{1/35}(r)$, то, используя лемму 4 и пункты б) – г) предложения 1, мы заключаем, что отображения $(\tilde{E}_i(r), w(\tilde{E}_i(r)))$ однолистные и удобные накопители с $\Delta \le 4$. Используя также пункт а) предложения 1, получим

$$|\Phi(r) - A(r)| = o[A(r)], \quad r \to \infty, \quad r \notin E. \tag{4.25}$$

Итак, при $r > r'$ области $\tilde{E}_i(r)$ удовлетворяют соотношениям (0.16) – (0.18) с абсолютной константой K.

Теперь обозначим через $E_i^c(r)$, $i = 1, \ldots, \Phi^c(r)$ те области из набора $\tilde{E}_i(r)$, $i = 1, \ldots, \Phi(r)$, для которых соотношение (0.13) выполнено. Очевидно, для отображений $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ соотношения (0.12), (0.13), (0.16) – (0.18) выполняются. Более того, из (4.24) следует

$$0 \le \Phi(r) - \Phi^c(r) \le K_{61}\varphi^{-1}(r) A(r),$$

так что из (4.25) вытекает (0.15).

Для доказательства неравенства (0.14) заметим, что

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)) = \pi A(r) - \sum_{i=1}^{\Phi^c(r)} A(\tilde{w}(E_i(r)),$$

откуда следует

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)) = \pi A(r) - \pi\Phi^c(r) - O\left[\sum_{i=1}^{\Phi^c(r)} \frac{\tilde{k}_i(r)}{\varphi^2(r)}\right], \quad r\to\infty.$$

Используя (0.12) и (0.15), получим (0.14).

Заключительные замечания. В некоторых применениях будут использоваться версии утверждений 1 – 5 §4, переформулированные в терминах функции $\varphi(r)$. Как и в доказательстве теоремы 1 мы можем заменить $\varphi(r)$ на n и получить следующие утверждения. В этих формулировках $0 < C_1, C_2, \ldots < \infty$ являются абсолютными константами.

Утверждение 1$'$. Существует постоянная C_1 такая, что для произвольной $w_0 \in E_i^c(r) \cup \partial E_i^c(r)$ сферический круг $D(C_1\varphi^{-6}(r), w_0)$ лежит в $\tilde{w}(D(r))$ и в области $D(C_1\varphi^{-6}(r), w_0)$ функция $z = F(w)$ осуществляет взаимно однозначное отображение.

Утверждение 2$'$. Если множество $\tilde{w}(E_i^c(r))$ содержит хотя бы одну точку, принадлежащую $D(C_2\varphi^{-1}(r), \infty)$, то $D(9C_2\varphi^{-1}(r), \infty) \subset \tilde{w}(E_i^c(r))$. Если множество $\tilde{w}(E_i^c(r))$ не содержит точек, принадлежащих $D(9C_2\varphi^{-1}(r), \infty)$, то

$$D(9C_2\varphi^{-1}(r), \infty) \cap \tilde{w}(E_i^c(r)) = \emptyset.$$

То же справедливо, если заменить $D(9C_2\varphi^{-1}(r), \infty)$ на $D(9C_2\varphi^{-1}(r), 0)$.

Утверждение 3$'$. Любые две точки $w_1, \tilde{w}_2 \in \tilde{w}(E_i^c(r))$ могут быть соединены кривой $\bar{\Gamma}_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2} \subset \tilde{w}(E_i^c(r))$ такой, что сферическая длина $\bar{l}\left(\bar{\Gamma}_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2}\right)$ кривой $\bar{\Gamma}_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2}$ меньше чем $C_3\varphi(r)$. Если $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2 \notin D(C_2\varphi^{-1}(r), \infty)$, то кривую $\bar{\Gamma}_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2}$ можно выбрать так, чтобы иметь $\bar{\Gamma}_{\tilde{w}_1,\tilde{w}_2} \cap D(C_2\varphi^{-1}(r), \infty) = \emptyset$.

Утверждение 4$'$. Каждая из областей $\tilde{w}(E_i^c(r))$ содержит область $B_0(\varphi(r))$ со свойствами

1) $B_0(\varphi(r))$ содержит замыкание некоего круга $D(C_4\varphi^{-6}(r), w(z^*))$;

2) сферическая площадь $B_0(\varphi(r))$ не меньше чем $C_5\varphi^{-6}(r)$.

Утверждение 5$'$. Пусть γ – фиксированная кривая на римановой сфере. Тогда для произвольного i существуют число r_0, зависящее от γ и функция $\varphi(r)$ такие, что $\tilde{w}(E_i^c(r))\cap\gamma\neq\emptyset$ при $r>r_0$. На кривой γ можно указать точку $\tilde{w}_1$ такую, что сферический круг $D(C_6\varphi^{-6}(r),w_1)$ принадлежит всем $\tilde{w}(E_i^c(r))$, $i=1,...,\Phi^c(r)$, $r>r_1$.

§6. МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ С “БЫСТРЫМ” РОСТОМ

Для мероморфной в $D(1)$ функции выполняется следующий аналог принципа разбиения.

Теорема B'. *Пусть $w_1(z)$ является мероморфной в $D(1)$ функцией такой, что $A(r)(1-r)\rightarrow\infty$ при $r\rightarrow 1$; $\varphi(r)$ – положительная монотонная функция, стремящаяся к ∞ при $r\rightarrow 1$, $\varphi^{35}(r)<A(r)$, $r<1$. Тогда для некоторой подпоследовательности $r=r_n\rightarrow 1$ отображение $(D(r),w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i(r),w(E_i(r)))$, $i=0,1,\ldots,\Phi(r)$ такие, что для $i\geq 1$ отображения $(E_i(r),w(E_i(r)))$ однолистные накопители с тотальным дефектом $\Delta\leq 2$ и диаметрами*

$$d(E_i(r))\leq\varphi^7(r)rA^{-1/2}(r),\quad i\geq 1;$$

для $i=0$ отображение $(E_0(r),w(E_0(r)))$ – накопитель особенностей с

$$A(\tilde{w}(E_0(r)))A^{-1}(r)\rightarrow 0,\quad r=r_n\rightarrow 1.$$

Кроме того, для числа $\Phi(r)$ разбиений имеем

$$\Phi(r)A^{-1}(r)\rightarrow 1,\quad r=r_n\rightarrow 1.$$

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для случая мероморфных функций в единичном круге с ”быстрым” ростом. Она доказывается аналогично.

Теорема $1'$. *Пусть $w(z)$ является мероморфной в $D(1)$ функцией такой, что $A(r)(1-r)\rightarrow\infty$ при $r\rightarrow 1$; $\varphi(r)$ – положительная монотонная функция, стремящаяся к ∞ при $r\rightarrow 1$, $\varphi^{35}(r)<A(r)$, $r<1$. Тогда для некоторой подпоследовательности $r=r_n\rightarrow 1$ отображение $(D(r),w(D(r)))$ разбивается на простейшие компоненты $(E_i^c(r),w(E_i^c(r)))$, $i=0,1,\ldots,\Phi^c(r)$ такие, что* *для $i \geq 1$ отображения $(E_i^c(r), w(E_i^c(r)))$ – удобные однолистные накопители с тотальным дефектом $\Delta \leq 4$ и диаметрами*

$$d(E_i^c(r)) \leq \varphi^7(r) r A^{-1/2}(r), \quad i \geq 1, \quad r_n \to 1;$$

для $i = 0$ отображение $(E_0(r), w(E_0(r)))$ – расширенный накопитель особенностей с

$$A(\tilde{w}(E_0^c(r)))A^{-1}(r) \to 0, \quad r_n \to 1.$$

Одновременно

$$\Phi^c(r)A^{-1}(r) \to 1, \quad r_n \to 1.$$

Для произвольного $z \in E_i^c(r)$

$$\frac{1}{d(E_i^c(r))} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{S^{-1/2}(E_i^c(r))},$$

где $S(X)$ – площадь X, $\varphi_1(r) = 10^{K\varphi(r)}$, $K < \infty$ – абсолютная постоянная; для произвольных $z_1, z_2 \in E_i^c(r)$

$$\frac{|w'(z_1)|}{1+|w(z_1)|^2} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1+|w(z_2)|^2};$$

для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in E_i^c(r)$

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))}{|z_1 - z_2|} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{\tilde{d}(\tilde{w}(z_2), \tilde{w}(z_3))}{|z_2 - z_3|} \overset{\varphi_1(r)}{\Longleftrightarrow} \frac{|w'(z_2)|}{1+|w(z_2)|^2},$$

где $\tilde{d}(\tilde{w}(z_1), \tilde{w}(z_2))$ – сферическое расстояние между $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$.

ABSTRACT. The present article studies some novel equidistribution phenomena in the theory of meromorphic functions and locations of *a*-points of meromorphic in the complex plane, extending R. Nevanlinna's theory that describes the numbers of *a*-points. We begin with the study of mutual arrangements of the *a*-points and evaluate distances between them. The so-called Principle of partitioning of meromorphic functions shows that *a* and *b*-points are mainly pairwise close. This leads to a new type of decompositions of meromorphic functions into simplest components. A kind of equidistribution to be called Comparability property is established stating that distances between *a* and *b*-points and *b* and *c*-points are mainly comparable. Additionally we show that magnitudes of spherical derivatives considered on the sets of the *a* -points are comparable for different values of *a*.

In subsequent papers we plan to make use of Principle of partitioning and Comparability property to show that the locations of *a*-points for the

majority of a-points and for almost all values $a \in \mathbf{C}$ can be described if we know the locations of a-points for at least one "good" value a. This accords with the main conclusion of Nevanlinna's theory, that qualitatively can be stated quite similarly : the numbers of the a-points of meromorphic in the complex plane functions can be described for almost all values $a \in \mathbf{C}$, if we know the numbers of a-points for at least one "good" value a.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.
2. L. Ahlfors, "Zur Theory der Überlagerungsflächen", Acta Mathematica, vol. 65, pp. 157 – 194, 1935.
3. L. Biberbach, "Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung", Math. Z., pp. 175 – 190, 1919.
4. H. Millouch, "Le theoreme de Picard. Suites de fonctions holomorphes. Fonctions meromorphes et fonctions entires", J. Math. Pures et Appl., № 3, pp. 345 – 401, 1923.
5. R. Nevanlinna, Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung", Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., № 2, pp. 1 – 7, 1923.
6. G. Valiron, Directions de Borel des Functions Meromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1938.
7. Г. А. Барсегян, "Единый подход к основным результатам о дефектах, лучах Бореля, кругах наполнения", Докл. Акад. Наук СССР, т. 271, № 1, стр. 11 – 14, 1983.
8. Г. А. Барсегян, "Свойство близости a-точек мероморфных функций", Мат. Сборник, т. 120(162), № 1, стр. 42 – 63, 1983.
9. Г. А. Барсегян, "Свойство близости мероморфных функций и структура однолистных областей римановых поверхностей", Изв. Ан АрмССР, Математика, т. 20, № 5,6, стр. 375 – 425, 1985.
10. G. A. Barsegian, "Principle of partitioning of meromorphic functions", Math. Montisnigri, vol. 5, pp. 18 – 26, 1995.
11. J. Dufresnow, "Sur quelques propertes des cercles de remplisage des fonctions meromorphes", Ann. Ecole Norm. Sup., vol. 29, pp. 187 – 209, 1942.
12. Г. А. Барсегян, "Свойство сравнимости производных и свойство сравнимости расстояний между a-точками мероморфных функций", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 1, стр. 52 – 70, 1991.
13. G. A. Barsegian, "Estimates of derivative of meromorphic functions on sets of a-points", Journal of London Math. Soc., vol. 34, no. 2, pp. 534 – 540, 1986.
14. J. Dufresnow, "Sur les domeines courectes par les valeurs d'une fonction meromorphe on algebroide", Ann. Ecole Norm. Sup., vol. 58, pp. 179 – 259, 1941.

28 февраля 1997

Институт математики
НАН Армении
E–mail : barseg@instmath.sci.am