О p–ЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ПО ОКРУЖНОСТИ ФУНКЦИЯХ

Г. А. Сукиасян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 3, 1997

В работе изучаются p-листные в среднем по окружности функции и поучаются точные оценки сверху длин Г–линий, когда Г – концентрические окружности или лучи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $w = f(z)$ регулярна в единичном круге $\Delta = \{z\colon\ |z| < 1\}$ и p – положительное число.

Функция $f(z)$ называется p-листной в среднем по окружности, если

$$p(\Delta, R) = p(\Delta, R, f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(\Delta, Re^{i\theta}, f)\, d\theta \le p, \qquad R > 0, \tag{1}$$

где $n(\Delta, a, f)$ – число решений уравнения $f(z) = a$ в Δ с учетом кратности. Этот класс был изучен многими авторами, см. [1].

Пусть Г – кривая в комплексной плоскости. По аналогии с a-точками $w^{-1}(a)\cap\cap\Delta$, прообразы $w^{-1}(\Gamma)\cap\Delta$ называются Г–линиями функции w (терминология Г. Барсегяна). Обозначим через $\Gamma(R)$ окружность $\{w\colon\ |w| = R\}$, а через $\Gamma(\theta)$ – луч $\{w\colon\ \arg w = \theta\}$. Пусть $L(r, \Gamma)$ – суммарная длина Г–линий, лежащих в $\{z\colon\ |z| < r\}$.

Некоторые оценки $L(r, \Gamma)$ для произвольных мероморфных функций w в комплексной плоскости и в единичном круге были даны для достаточно широкого класса Г в работах [2 — 4]. Эти оценки являются точными для мероморфных функций в комплексной плоскости и для мероморфных функций "быстрого" роста в единичном круге. Для конформных отображений в единичном круге точные оценки впервые даны в работах Хеймана и Ву [5], а позже в работах К.

Астала, К. Бишопа, Л. Карлсона, Дж. Фернандеса, Дж. Гарнета, Д. Гамильтона, Дж. Хейнонена, П. Джонса, О. Мартио, К. Ойма, С. Рохде, Дж. Вайсалла, М. Зинсмейстера, см. [6 — 15].

Оценки интегралов от $L(r, \Gamma(R))$, встречающиеся в формулировках принципов длины и площади Альфорса [1], используются во многих исследованиях. Точные оценки для интегралов

$$l(r, \lambda) = \int_0^{+\infty} L(r, \Gamma(R))\, R^\lambda\, dR, \quad \lambda \in (-\infty, +\infty)$$

даны в работе автора [16] в случае, когда $f(z)$ – однолистная функция в единичном круге.

В настоящей работе мы устанавливаем точные оценки сверху величин $l(r, \lambda)$, $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ для p–листных в среднем по окружности функций.

Условимся впредь обозначать через $K(\lambda, p)$, $K(p)$ положительные постоянные, зависящие, соответственно, только от λ и p или от p.

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ p–листна в среднем по окружности и $f(z) \neq 0$ в круге Δ. Тогда для любого $0 < r < 1$ справедливы неравенства*

$$l(r, \lambda) \leq K(\lambda, p)\, |f(0)|^{\lambda+1} \frac{1}{(1-r)^{2p(\lambda+1)-1}}, \qquad -1 + \frac{1}{2p} < \lambda < +\infty, \tag{2}$$

$$l(r, \lambda) \leq K(\lambda, p)\, |f(0)|^{\lambda+1}, \qquad -1 - \frac{1}{2p} < \lambda < -1 + \frac{1}{2p}, \tag{3}$$

$$l(r, \lambda) \leq K(\lambda, p)\, |f(0)|^{\lambda+1} \ln \frac{1}{1-r}, \qquad \lambda = -1 \pm \frac{1}{2p}, \tag{4}$$

$$l(r, \lambda) \leq K(\lambda, p)\, |f(0)|^{\lambda+1} \frac{1}{(1-r)^{-2p(\lambda+1)-1}}, \qquad -\infty < \lambda < -1 - \frac{1}{2p}. \tag{5}$$

Точность оценок (2) — (5), с точностью до постоянных, проверяется посредством p–листной в среднем по окружности функции $f(z) = a_0 \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2p}$.

Теорема 2. *Пусть p –натуральное число, и функция $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$ p–листна в среднем по окружности. Тогда для любого $0 < r < 1$ справедливы неравенства*

$$l(r, \lambda) \leq K(\lambda, p) \frac{1}{(1-r)^{2p(\lambda+1)-1}}, \qquad -1 + \frac{1}{2p} < \lambda < +\infty, \tag{6}$$

$$l(r,\lambda) \le K(\lambda,p)\ln\frac{1}{1-r}, \qquad \lambda = -1+\frac{1}{2p}, \tag{7}$$

$$l(r,\lambda) \le K(\lambda,p), \qquad -1-\frac{1}{p} < \lambda < -1+\frac{1}{2p}. \tag{8}$$

Для $\lambda \le -1 - 1/p$ можно указать такое $r_0 = r_0(f) > 0$, что

$$l(r,\lambda) = \infty, \qquad r \ge r_0. \tag{9}$$

Здесь же точность оценок (6) — (9) проверяется функцией $f(z) = \dfrac{z^p}{(1-z)^{2p}}$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2. Тогда для любого $0 < r < 1$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} L(r,\Gamma(\theta))\,d\theta \le K(p). \tag{10}$$

Доказательства теорем 1 – 2 основаны на установленной Г. А. Барсегяном ([3], [4]) "модификации принципа длины и площади", согласно которой, если $w(z)$ – мероморфная в области D функция и $\varphi(R)$ – непрерывная положительная функция при $R \in (0;+\infty)$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{L(D,\Gamma(R))}{\varphi(R)}\,dR = \iint_D \frac{|w'(z)|}{\varphi(|w(z)|)}\,d\sigma, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} L(D,\Gamma(\theta))\,d\theta = \iint_D \left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right|\,d\sigma, \tag{12}$$

где через $L(D,\Gamma(R))$ $(L(D,\Gamma(\theta)))$ мы обозначили суммарную длину кривых $w^{-1}(\Gamma(R)) \cap D$ $(w^{-1}(\Gamma(\theta)) \cap D)$, а через $d\sigma$ – элемент площади.

Отметим, что при надлежащем выборе функции $\varphi(R)$, используя известные неравенства, можно получить различные соотношения, в частности, принцип длины и площади Альфорса (см. подробно [3], [4]).

Неравенство (10) непосредственно следует из (11), (12) для $\varphi(R) = R$ и оценок (3) и (8) для $\lambda = -1$.

Для доказательства теорем 1, 2 предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Допустим, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда при $0 < r < 1$ будем иметь ($z = r\,e^{i\varphi}$)*

$$\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\varphi})|^\lambda\,d\varphi \le \begin{cases} K(\lambda,p)\,|f(0)|^\lambda\,\dfrac{1}{(1-r)^{2p\,\lambda-1}}, & \dfrac{1}{2p} < \lambda < +\infty, \\ 2\pi\,|f(0)|^\lambda \ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}+1\right), & \lambda = \dfrac{1}{2p}, \\ K(\lambda,p)\,|f(0)|^\lambda, & 0 < \lambda < \dfrac{1}{2p}. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Для p-листных в среднем по окружности функций $f(z)$, не обращающихся в нуль в Δ, справедлива оценка (см. [1], теорема 5.1)

$$|f(0)|\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^{2p} \le |f(z)| \le |f(0)|\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{2p}. \tag{14}$$

Используя это неравенство и тождество Харди–Штейна–Спенсера (см. [1], теорема 3.1), получаем

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} |f(t\,e^{i\varphi})|^\lambda\,d\varphi = \frac{\lambda^2}{t}\iint_{|z|\le t} |f'(z)|^2\,|f(z)|^{\lambda-2}\,d\sigma =$$
$$= \frac{2\pi\lambda^2}{t}\int_{\min_{|z|\le t}|f(z)|}^{\max_{|z|\le t}|f(z)|} p(t,R)\,R^{\lambda-1}\,dR \le \frac{2\pi\lambda p|f(0)|^\lambda}{(1-t)^{2p\lambda}}\,\frac{(1+t)^{4p\lambda}-(1-t)^{4p\lambda}}{t}.$$

Здесь $p(t,R)$ определется так же, как и $p(\Delta,R)$, только вместо Δ нужно рассматривать круг $|z|<t$, и поэтому $p(t,R)\le p(\Delta,R)\le p$. Так как функция $\dfrac{(1+t)^{4p\lambda}-(1-t)^{4p\lambda}}{t}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} |f(t\,e^{i\varphi})|^\lambda\,d\varphi \le K(\lambda,p)\,|f(0)|^\lambda\,\frac{1}{(1-t)^{2p\lambda}},$$

откуда, интегрируя обе части последнего неравенства по t от 0 до r, получим (13).

Замечание 1. Для функции $|f(z)|$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, используя вместо (14) следующую оценку (см. [1], теорема 5.3)

$$\frac{|z|^p}{1+|z|^{2p}} \le |f(z)| \le \frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}, \tag{15}$$

аналогичным образом получим

$$\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{i\varphi})|^\lambda\,d\varphi \le \begin{cases} K(\lambda,p)\,\dfrac{1}{(1-r)^{2p\lambda-1}}, & \dfrac{1}{2p}<\lambda<+\infty, \\ 2\pi\,\dfrac{1}{\sqrt{r}}\,\ln\dfrac{1}{1-r}, & \lambda=\dfrac{1}{2p}, \\ K(\lambda,p), & 0<\lambda<\dfrac{1}{2p}. \end{cases} \tag{16}$$

Лемма 2. *Если для функции $f(z)$ выполняются условия теоремы 1 или 2, то при $0<r<1$ и $\lambda>-1$ справедлива оценка*

$$\int_0^{2\pi} |f'(t\,e^{i\varphi})|\,|f(t\,e^{i\varphi})|^\lambda\,t\,d\varphi \le$$

$$\leq \left(\frac{2\pi k p^2}{e}\,\frac{M(\sqrt{t})^{2/(kp)}}{1-t}\int_0^{2\pi}|f(t\,e^{i\varphi})|^{2(\lambda+1-(kp)^{-1})}\,d\varphi\right)^{1/2}, \tag{17}$$

где $M(t) = \max_{|z|\leq t}|f(z)|$, k – натуральное число так, что $\lambda + 1 - \dfrac{1}{kp} > 0$.

Оценку (17) для однолистных функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ получил Г. М. Голузин (см. [17], гл. 4, §6, лемма 2).

Доказательство. В случае когда функция $f(z)$ имеет нули в Δ, точка $z = 0$ является единственным нулем (кратности p), т.к. для достаточно малых R сумма кратностей нулей функции $f(z)$ не превосходит величины $p(\Delta, R)$. Поэтому функция

$$\Psi(z) = [f(z^k)]^{\frac{1}{kp}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{kp} z^{nk+1}$$

будет однозначной и однолистной в среднем по окружности (см. [1], лемма 5.1). Подставляя в левую часть (17) соотношение

$$f'(z) = p\,z^{\frac{1}{k}-1}\,\Psi'(z^{1/k})\,[f(z)]^{1-\frac{1}{kp}},$$

получаем

$$I = \int_0^{2\pi}|f'(t\,e^{i\varphi})|\,|f(t\,e^{i\varphi})|^{\lambda}\,t\,d\varphi \leq$$

$$\leq p\left(\int_0^{2\pi}|\Psi'(z^{1/k})|^2\,t^{2/k}\,d\varphi\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}|f(z)|^{\lambda+1-\frac{1}{kp}}\,d\varphi\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Оценим первый интеграл в правой части формулы (18). Используя неравенство $x^m(1-x) \leq \dfrac{1}{em}$, $0 < x < 1$, $m > 0$ для $m = \dfrac{nk+1}{k}$, получим

$$\int_0^{2\pi}|\Psi'(z^{1/k})|^2\,t^{2/k}\,d\varphi = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n}{kp}\right|^2|nk+1|^2\,t^{2n+\frac{2}{k}} \leq$$

$$\leq \frac{2\pi k}{e(1-t)}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{n}{kp}\right|^2|nk+1|\,t^{\frac{nk+1}{2}} = \frac{2k}{e(1-t)}\iint_{|z|\leq t^{1/(2k)}}|\Psi'(z)|^2\,d\sigma. \tag{19}$$

В силу тождества Харди–Штейна–Спенсера и неравенства $p(t, R, \Psi) \leq 1$ имеем

$$\iint_{|z|\leq t^{1/(2k)}}|\Psi'(z)|^2\,d\sigma = 2\pi\int_0^{\max_{|z|\leq t^{1/(2k)}}|\Psi(z)|}p(t, R, \Psi)\,R\,dR \leq$$

$$\leq \pi\left(\max_{|z|\leq t^{1/(2k)}}|\Psi(z)|\right)^2 = \pi\left(\max_{|z|\leq\sqrt{t}}|f(z)|\right)^{\frac{2}{kp}}. \tag{20}$$

Из соотношений (18) — (20) следует (17).

Доказательство теоремы 1. Из неравенства (14) и леммы 2 ($la > -1$) имеем

$$I \le \left(\frac{2\pi k p^2}{e} \frac{|f(0)|^{2/(kp)}}{1-t} \left(\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right)^{4/k} \int_0^{2\pi} |f(t\, e^{i\varphi})|^{2(\lambda+1-\frac{1}{kp})} \, d\varphi \right)^{1/2} \le \tag{21}$$
$$\le K(\lambda, p) \frac{|f(0)|^{1/(kp)}}{(1-t)^{1/2+2/k}} \left(\int_0^{2\pi} |f(t\, e^{i\varphi})|^{2(\lambda+1-\frac{1}{kp})} \, d\varphi \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим сперва $\lambda > -1 + \frac{1}{4p}$. Тогда, выбрав достаточно большое k так, что $\frac{1}{2p} < 2(\lambda + 1 - \frac{1}{kp})$, из (21) и леммы 1 получим

$$I \le K(\lambda, p) \frac{|f(0)|^{\lambda+1}}{(1-t)^{2p(\lambda+1)}}.$$

Если же $-1 < \lambda \le -1 + \frac{1}{4p}$, то вновь выбрав достаточно большое k так, что $\frac{1}{2p} < 2(\lambda + 1 - \frac{1}{kp})$ и $\frac{2}{k} + \frac{1}{2} < 1$, аналогичным образом получим

$$I \le K(\lambda, p) \frac{|f(0)|^{\lambda+1}}{(1-t)^{\frac{2}{k} + \frac{1}{2}}}.$$

Из тождества (11) при $\varphi(R) = R^{-\lambda}$ и $D = \{z\colon |z| < r\}$ и последних двух неравенств вытекает утверждение теоремы 1.

Так как $p(r, R, 1/f) = p(r, \frac{1}{R}, f)$ и $f(z) \ne 0$ в Δ, то функция $\frac{1}{f(z)}$ также будет p-листной в среднем по окружности. Поэтому для $\lambda < -1$, $\beta = -(2+\lambda) > -1$ и $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, из тождества (11) будем иметь

$$I(r, \lambda) = \int_0^{+\infty} L(r, \Gamma(R))\, R^{\lambda}\, dR = \iint_{|z|<r} |g'(z)|\, |g(z)|^{\beta}\, d\sigma,$$

откуда и из доказанного утверждения теоремы 1 для $g(z)$ и $\beta > -1$ следует утверждение теоремы 1 для функции $f(z)$ и $\lambda < -1$. Осталось рассмотреть случай $\lambda = -1$. Применяя тождество Харди–Штейна–Спенсера и (14), для $0 < r < 1$ получаем

$$\int_r^{2^{-1}(1+r)} \int_0^{2\pi} |f'(t\, e^{i\varphi})|^2\, |f(t\, e^{i\varphi})|^{-2}\, t\, d\varphi\, dt \le$$
$$\le 2\pi \int_{\min_{|z|\le 2^{-1}(1+r)} |f(z)|}^{\max_{|z|\le 2^{-1}(1+r)} |f(z)|} p\left(\frac{1+r}{2}, R\right) R^{-1}\, dR \le 8\pi p^2 \ln \frac{4}{1-r}.$$

По теореме о среднем можно выбрать такое $r < \rho < 2^{-1}(1+r)$, что

$$\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\varphi})|^2 \, |f(\rho e^{i\varphi})|^{-2} \, d\varphi \le 64\, \pi\, p^2 \; \frac{1}{1-r} \ln \frac{4}{1-r}.$$

Интеграл справа возрастает вместе с ρ (см. [18]). Следовательно, для $0 < r < 1$ получим

$$\int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\varphi})| \, |f(r e^{i\varphi})|^{-1} \, d\varphi \le \left(2\pi \int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\varphi})|^2 \, |f(\rho e^{i\varphi})|^{-2} \, d\varphi\right)^{1/2} \le$$

$$\le K(\lambda, p) \left(\frac{1}{1-r} \ln \frac{4}{1-r}\right)^{1/2},$$

откуда

$$l(r,-1) = \int_0^r \int_0^{2\pi} |f'(t e^{i\varphi})| \, |f(t e^{i\varphi})|^{-1} \, t \, d\varphi \, dt \le$$

$$\le K(\lambda, p) \int_0^r \left(\frac{1}{1-t} \ln \frac{4}{1-t}\right)^{1/2} t \, dt \le K(\lambda, p).$$

Теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 для $\lambda > -1$ доказывается аналогичным образом, только вместо (13) и (14) нужно использовать (15) и (16).

Докажем теорему для $\lambda \ge -1$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства леммы 2, функция $[f(z)]^{1/p}$ однолистна в среднем по окружности. Известно также (см. [1], теорема 5.3), что однолистная в среднем по окружности функция (в частности, $w = [f(z)]^{1/p}$) принимает всякое значение из $|w| < 1/4$ ровно один раз. Обозначим через $z(w)$ функцию, обратную к функции $[f(z)]^{1/p}$, которая будет однозначной и однолистной в $|w| < 1/4$ и $z(0) = 0$. Применяя к функции $z_1(\zeta) = 4z(\zeta/4) = \zeta + c_2\zeta^2 + \ldots$, $|\zeta| < 1$ следующее неравенство (см. [1], теорема 1.3)

$$\frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} \le |z_1'(\zeta)| \le \frac{1+|\zeta|}{(1-|\zeta|)^3}, \qquad |\zeta| < 1,$$

получим

$$\frac{4}{27} \le |z'(w)| \le 12, \qquad |w| < \frac{1}{8}. \tag{22}$$

Следовательно, при $R < 8^{-p}$ и $r \ge r_0 = \max_{|w| \le 8^{-p}} |z(w)|$ из (22) будем иметь

$$\frac{8\pi}{27} R^{1/p} \le L(r, R, f) = L(r, R^{1/p}, f^{1/p}) = \int_0^{2\pi} |z'(w)| \, |dw| \le 24\, \pi\, R^{1/p}. \tag{23}$$

Пусть теперь $-1-\frac{1}{p}<\lambda\leq -1$. Выбирая β так, что $-1<\beta<-1+\frac{1}{2p}$, из (23) и $l(r,\beta)\leq K(\beta,p)$ получаем

$$l(r,\lambda)\leq 24\pi\int_0^{8^{-p}} R^{\lambda+1/p}\,dR+8^{p(\beta-\lambda)}\int_0^{+\infty} L(r,\Gamma(R))\,R^{\beta}\,dR\leq K(\lambda,p). \quad (24)$$

Если же $\lambda\leq -1-1/p$, то

$$l(r,\lambda)\geq\int_0^{8^{-p}} L(r,\Gamma(R))\,R^{\lambda}\,dR=\infty, \qquad r\geq r_0.$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Замечание 2. Аналогично (24), при $\lambda\leq -1-1/p$ и $0<R^*<+\infty$ справедливо также неравенство

$$\int_{R^*}^{+\infty} L(r,\Gamma(R))\,R^{\lambda}\,dR\leq (R^*)^{\lambda+1}\int_0^{+\infty} L(r,\Gamma(R))\,R^{-1}\,dR\leq (R^*)^{\lambda+1}K(p).$$

В заключение выражаю благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов работы.

ABSTRACT. In the paper we study the circumferentially mean p-valent functions and obtain the sharp above estimates of the lengthts of Γ–lines when Γ are concentric circles or rays.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Хейман, Многолистные функции, Москва 1958.
2. Г. А. Барсегян, "Новые результаты в теории мероморфных функций", Докл. АН СССР, т. 238, № 4, стр. 777 — 780, 1978.
3. Г. А. Барсегян, "О геометрии мероморфных функций", Мат. Сборник, т. 114 (156), № 2, стр. 179 — 226, 1981.
4. Г. А. Барсегян, "Принцип вариации касательной в комплексном анализе", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 3, стр. 37 — 60, 1992.
5. W. Hayman, J–M. Wu, "Level of sets of univalent functions", Comm. Math. Helf., vol. 56, pp. 366 — 403, 1981.
6. K. Astala, J. Fernandes, S. Ronde, "Quasilines and Hayman-Wu theorem", Indiana University Math. Journal, vol. 42, no. 4, pp. 1078 — 1100, 1993.
7. C. Bishop, L. Carleson, J. Garnet and P. Jons, "Harmonic measures supported on curves", Pacif. Journal Math., vol. 138, pp. 233 — 236, 1989.
8. C. Bishop, P. Jons, "Harmonic measure and arclenght", Ann. Math., vol. 132, pp. 511 — 547, 1990.
9. J. Fernandes, D. Hamilton, "Length of curves under conformal mappings", Comm. Math. Helf., vol. 62, pp. 122 — 134, 1987.
10. J. Fernandes, M. Zinsmeister, "Ensembles de niveau des representations conformes", C. R. Acad. Sci., Paris, vol. 305, Serie 1, pp. 449 — 452, 1987.

11. J. Fernandes, J. Heinonen, O. Martio, "Quasilines and conformal mappings", Journal d' Analyse Math., vol. 52, pp. 117 — 132, 1989.
12. J. Fernandes, "Domains with strong barrier", vol. 5, № 1 — 2, pp. 47 — 65, 1989.
13. J. Garnet, F. Gehring, P. Jones, "Conformally invariant length sums", Indiana Univ. Math. Journal, vol. 32, pp. 809 — 829, 1983.
14. K. O'yma, "Harmonic measure and conformal length", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 115, pp. 687 — 689, 1992.
15. J. Vaisalla, "Bounded turning and quasiconformal mappings", Monatschefte Math., vol. 11, pp. 233 — 244, 1991.
16. G. Sukiasian, "On preimages of concentric circumferences under mappings by univalent functions", Math. Montisnigri, vol. 4, pp. 99 — 107, 1996.
17. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва, 1952.
18. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, Москва, 1956.

13 июня 1997

Институт математики
НАН Армении
E-mail : barseg@istmath.sci.am