О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ В $\mathbb{R}^2$, ДЛЯ КОТОРЫХ КРАТЧАЙШИМИ ЯВЛЯЮТСЯ ПРЯМЫЕ

В. К. Оганян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В статье продолжается начатое Р.В. Амбарцумяном и В.К. Оганяном исследование параметрической 4–ой проблемы Гильберта, в части относящейся к описанию метрик Римана–Гильберта. Выводится критерий, устанавливающий необходимые и достаточные условия для того, чтобы геодезические римановой метрики, определенной в $\mathbb{R}^2$, были обычными евклидовыми прямыми. В качестве примера применения критерия описаны метрики Римана–Гильберта в $\mathbb{R}^2$ для так называемой радиально–нормальной функции ориентации.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие параметрической 4–ой проблемы Гильберта впервые определено в [1]. В важном случае римановых метрик эта задача формулируется следующим образом : описать все римановы метрики на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых обычные евклидовы прямые являются геодезическими. Для римановых метрик индикатриса направлений в каждой точке $\mathbb{R}^2$ является эллипсом. Параметрами, от которых зависит эллипс, являются длины $a > b$ полуосей и ориентация большой оси эллипса. Соответствующие параметры мы рассматриваем как функции, определенные на плоскости : $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$ и $\alpha = \alpha(x, y)$. Риманова метрика является финслеровой метрикой с плотностью

$$\rho(\varphi, x, y)\, dl = dl \cdot \sqrt{a^2(x,y)\cos^2(\varphi + \alpha(x,y)) + b^2(x,y)\sin^2(\varphi + \alpha(x,y))}, \qquad (1)$$

последнее соответсвует выражению для опорной функции эллипса (см. [1]). В (1) dl – элемент евклидовой длины в точке (x, y), а угол φ соответствует

Исследование, описанное в данной работе, проведено при частичной поддержке АО "Прометей".

направлению dl.

В случае, когда геодезические линии метрики являются прямыми линиями, метрика называется *гильбертовой* (см. [1]). В случае, когда геодезические кривые метрики (1) являются прямыми линиями, мы называем (1) метрикой *Римана–Гильберта* .

Общий необходимый и достаточный критерий гильбертовости финслеровой метрики, индикатриса которой зависит от конечного числа параметров, была получена в работе [1]. Критерий имеет вид дифференциального уравнения в частных производных для параметров, от которых зависит метрика. В случае метрики (1) соответствующее уравнение (т.е. необходимое и достаточное условие того, что метрика (1) – гильбертова) имеет вид

$$q_1(\varphi)\frac{\partial a}{\partial x}+q_2(\varphi)\frac{\partial a}{\partial y}+q_3(\varphi)\frac{\partial b}{\partial x}+q_4(\varphi)\frac{\partial b}{\partial y}+q_5(\varphi)\frac{\partial \alpha}{\partial x}+q_6(\varphi)\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
q_1(\varphi) &= \frac{a\sin\alpha\cos(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}+\frac{ab^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\cos\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_2(\varphi) &= \frac{a\cos\alpha\cos(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}+\frac{ab^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\sin\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_3(\varphi) &= -\frac{b\cos\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}-\frac{ba^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\cos\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_4(\varphi) &= \frac{b\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\sigma(\varphi)}-\frac{ba^2\sin(\varphi+\alpha)\cos(\varphi+\alpha)\sin\varphi}{\sigma^3(\varphi)},\\
q_5(\varphi) &= \frac{b^2-a^2}{\sigma^3(\varphi)}\left[-a^2\cos\alpha\cos^3(\varphi+\alpha)+b^2\sin\alpha\sin^3(\varphi+\alpha)\right],\\
q_6(\varphi) &= \frac{b^2-a^2}{\sigma^3(\varphi)}\left[a^2\sin\alpha\cos^3(\varphi+\alpha)+b^2\cos\alpha\sin^3(\varphi+\alpha)\right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Относительно уравнения (2) и, в частности, связь с комбинаторной интегральной геометрией и 4–ой проблемой Гильберта читатель может найти в работах [1]–[8]. Результаты этой статьи дополняют работу, начатую в [1], по описанию метрик Римана–Гильберта (Теоремы 1 и 2). Выводится критерий, устанавливающий необходимые и достаточные условия для того, чтобы геодезические римановой метрики, определенной в $\mathbb{R}^2$, были прямыми линиями. В качестве примера применения полученного критерия, описаны метрики Римана–Гильберта в $\mathbb{R}^2$ для так называемой радиально–нормальной функции ориентации.

§2. КРИТЕРИЙ

Изучение уравнения (2) в [1] привело, в частности, к следующим результатам.

Лемма 1. *Функции $q_i(\varphi)$, $i = 1,2,3,4$, линейно независимы. Для q_5 и q_6 имеем линейные соотношения*

$$q_5(\varphi) = c_1 q_1(\varphi) + c_2 q_2(\varphi) + c_3 q_3(\varphi) + c_4 q_4(\varphi), \tag{4}$$

$$q_6(\varphi) = d_1 q_1(\varphi) + d_2 q_2(\varphi) + d_3 q_3(\varphi) + d_4 q_4(\varphi), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{(b^2-a^2)(2a^2+b^2)}{ab^2}\sin\alpha\cos\alpha, & c_2 &= \frac{(b^2-a^2)(-b^2\cos^2\alpha+2a^2\sin^2\alpha)}{ab^2},\\
c_3 &= -\frac{(b^2-a^2)(a^2+2b^2)}{ba^2}\sin\alpha\cos\alpha, & c_4 &= \frac{(b^2-a^2)(-2b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)}{ba^2},\\
d_1 &= \frac{(b^2-a^2)(b^2\sin^2\alpha-2a^2\cos^2\alpha)}{ab^2}, & d_2 &= -c_1,\\
d_3 &= \frac{(b^2-a^2)(2b^2\sin^2\alpha-a^2\cos^2\alpha)}{ba^2}, & d_4 &= -c_3.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из леммы 1 следуют дифференциальные соотношения (см. [1]) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x} &= -c_1\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_1\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial a}{\partial y} &= -c_2\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_2\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial b}{\partial x} &= -c_3\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_3\frac{\partial\alpha}{\partial y},\\
\frac{\partial b}{\partial y} &= -c_4\frac{\partial\alpha}{\partial x} - d_4\frac{\partial\alpha}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 2. *Линейную алгебраическую систему (7) можно преобразовать к виду*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x} &= -k_1\frac{\partial a}{\partial y} + k_2\frac{\partial b}{\partial y},\\
\frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \quad k_1\frac{\partial a}{\partial x} - k_2\frac{\partial b}{\partial x},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$k_1 = \frac{2b^2+a^2}{3a(b^2-a^2)}, \qquad k_2 = \frac{b^2+2a^2}{3b(b^2-a^2)}. \tag{9}$$

Следующая теорема дает необходимые условия на функцию ориентации $\alpha(x,y)$ метрики Римана–Гильберта.

Теорема 1. *Если плоская риманова метрика (1) гильбертова, то функция ориентации $\alpha(x,y)$ необходимо гармоническая, т.е.*

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}=0 \tag{10}$$

и удовлетворяет следующему дополнительному уравнению :

$$\cos 2\alpha\left[4\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\right]+\sin 2\alpha\left[2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\right]=0. \tag{11}$$

Доказательство. Гармоничность $\alpha(x,y)$ была доказана в работе [1]. Докажем (11). Нетрудно убедиться в том, что любая гармоническая функция $\alpha(x,y)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}&\cos 2\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\sin 2\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}+\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]+2\cos 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Поэтому из (10) следует, что (11) эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]+\\&+\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]+2\cos 2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0.\end{aligned} \tag{13}$$

Используя (6) и (7), получим

$$\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}=-\frac{ab}{3(b^2-a^2)}\left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}+b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}\right] \tag{14}$$

и

$$-\cos 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{ab}{3(b^2-a^2)}\left[b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}+a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}\right]. \tag{15}$$

Следовательно

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\cos 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin 2\alpha \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\frac{ab}{b^2 - a^2}\left[-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}\right] -$$

$$-\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ab}{b^2 - a^2}\right) \cdot \left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x} + b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x}\right] + \tag{16}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ab}{b^2 - a^2}\right) \cdot \left[a\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y} + b\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y}\right].$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ab}{b^2 - a^2}\right) = \frac{b^2 + a^2}{3(b^2 - a^2)^2}\left[b^3\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial y} - a^3\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial y}\right], \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ab}{b^2 - a^2}\right) = \frac{b^2 + a^2}{3(b^2 - a^2)^2}\left[b^3\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x} - a^3\frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x}\right]. \tag{18}$$

Подставляя (17) и (18) в (16), после преобразований получим

$$A = -\frac{4a^3b^3}{9(b^2 - a^2)^2}\,\frac{\partial\left(\frac{a}{b^2}\right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial\left(\frac{b}{a^2}\right)}{\partial x} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Аналогично

$$\sin 2\alpha\left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2\right] + 2\cos 2\alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -A.$$

Теорема доказана.

Возникает естественный вопрос : в какой мере уравнения (10) и (11) достаточны для существования метрики Римана–Гильберта с заданной функцией ориентации $\alpha(x,y)$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\alpha(x,y)$ удовлетворяет уравнениям (10) и (11). Если существует решение $a(x,y)$ и $b(x,y)$ уравнения (7) такое, что*

$$a(x,y) > b(x,y) > 0, \tag{19}$$

то тройка

$$\alpha(x,y), \quad a(x,y), \quad b(x,y) \tag{20}$$

определяет по формуле (1) метрику Римана–Гильберта.

Доказательство. Достаточно проверить, что всякая тройка (20), удовлетворяющая уравнениям (7), (10), (11), удовлетворяет уравнению (2). Последнее является достаточным условием для того, чтобы (1) была метрикой Римана–Гильберта.

§3. ПРИМЕНЕНИЕ К КЛАССУ РАДИАЛЬНО–НОРМАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

Параметрический класс римановых метрик, к которым мы собираемся применить теорему 2, соответствует так называемому радиально–нормальному выбору функции ориентации $\alpha(x,y)$.

Функция ориентации называется радиально–нормальной, если *на любой прямой g, содержащей начало O, ориентация большой полуоси эллипса с центром $P \in g$, $P = (x,y) \neq O$ выбрана перпендикулярной* к g. В этом случае

$$\cos\alpha(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\alpha(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{21}$$

Отметим, что мы имеем $\alpha(x,y)$ в случае стереографической проекции полусферы $x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$, $z < R$ из центра $x=y=0$, $z=R$ на плоскость $z=0$. Однако каких–либо специальных условий на функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ не требуется.

Имеем

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{22}$$

Следовательно, функция (21) гармонична в $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.

Проверим, что (21) удовлетворяет дополнительному уравнению (11). Так как $\tan\alpha = \dfrac{x}{y}$, то

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}. \tag{23}$$

С другой стороны, $\tan 2\alpha$ можно найти из (11) :

$$\tan 2\alpha = \frac{4\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}}{2\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}, \tag{24}$$

т.е. подстановка значений из (22) приводит (24) к (23).

Остается проверить, что для функции (21) существуют неотрицательные решения системы (7). Используя (22) и соотношения

$$\sin^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

можем переписать систему (7) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{b^2-a^2}{a}\,\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{b^2-a^2}{a}\,\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{2(b^2-a^2)\cdot b}{a^2}\,\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{2(b^2-a^2)\cdot b}{a^2}\,\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{25}$$

Решения системы (25) – функции только от полярного радиуса $r = \sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $a(x,y) = a(r)$ и $b(x,y) = b(r)$. Для доказательства этого рассмотрим полярные координаты (r,φ) точки $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Определим φ как угол между x–осью и сегментом $(O,(x,y))$, отсчитываемый против часовой стрелки и запишем $a(x,y) = a(r,\varphi)$. Имеем

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{27}$$

Умножая (26) на $-\sin\varphi = -y/r$, (27) – на $\cos\varphi = x/r$ и складывая, получим

$$-\frac{\partial a}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial a}{\partial y}\cos\varphi = \frac{\partial a}{\partial r}\left[-\frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi\right] + \frac{\partial a}{\partial \varphi}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\varphi\right]. \tag{28}$$

Из (25)

$$-\frac{\partial a}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial a}{\partial y}\cos\varphi = 0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial r}{\partial x} = x/r$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = y/r$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -y/r^2$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x/r^2$, то получим $\dfrac{\partial a}{\partial \varphi} \quad \dfrac{1}{r} = 0$.

Аналогично можно доказать, что $\dfrac{\partial b}{\partial \varphi} = 0$. Покажем, что

$$a(r) = c\sqrt{b(r)}, \tag{29}$$

где $c \neq 0$ – постоянная.

Умножая первое и второе уравнения на $\sin\varphi$, второе и четвертое на $\cos\varphi$, после сложения получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial r} = \dfrac{b^2 - a^2}{a} \quad \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{\partial b}{\partial r} = \dfrac{2(b^2 - a^2)\cdot b}{a^2} \quad \dfrac{1}{r} \end{cases} \tag{30}$$

Из (30) имеем

$$\frac{1}{b}\,\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{2}{a} \quad \frac{\partial a}{\partial r},$$

откуда следует (29).

Таким образом, общее решение системы (25) имеет вид

$$a(x,y) = a(r) = \frac{c^2}{\sqrt{1 + c^4\, c_1\, (x^2 + y^2)}} \quad \text{и} \quad b(x,y) = b(r) = \frac{c^2}{1 + c^4\, c_1\, (x^2 + y^2)}, \tag{31}$$

где c_1 и c – постоянные.

Ясно, что для $c_1 > 0$ и $c \neq 0$ всегда $a > b$ и $a > 0$, $b > 0$, т.е. условия Теоремы 2 в этом случае удовлетворяются. Поэтому для $c_1 > 0$ и $c \neq 0$ (31), действительно, определяет класс метрик Римана–Гильберта.

Замечание. Согласно хорошо известной теореме (см. [2 — 4]), каждой гильбертовой метрике соответствует мера в пространстве прямых на плоскости. Для метрик Римана–Гильберта, соответствующих (31), таковой является мера

$$\frac{c^2}{\sqrt{(1 + c^4\, c_1 p^2)^3}}\, d\theta\, dp, \tag{32}$$

где p – расстояние прямой от начала O. Плотность не зависит от ориентации θ прямой, т.е. она изотропна.

Если $c = 1$ и $c_1 = \dfrac{1}{R^2}$, то мы получаем изометрическую модель полусферы с радиусом R. Отметим, что мера (32) конечна и мера всего пространства прямых равна $\frac{2\pi}{\sqrt{c_1}}$ (не зависит от c). Это значение равно длине прямой в соответствующей геометрии.

ABSTRACT. **The paper continues the work started by R.V. Ambartzumian and V.K. Oganian on parametric versions of Hilbert's fourth problem, in the part referring to the description of Riemann–Hilbert metrics. A criterion is derived stating necessary and sufficient conditions that the geodesics of a Riemann metric defined in $\mathbb{R}^2$ are the usual straight lines. In an example of application of the criterion, unique Hilbert metric in a class of Riemann metrics with isotropic orientation function is found.**

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", vol.103, № 1, pp. 45 – 61, 1998.
2. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Наука, М., 1974.
3. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
4. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo–metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
5. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", Adv. Appl. Prob. (SGSA), vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
6. В. К. Оганян, А. Абдаллах, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками" Изв. НАН Армении, Математика т. 27, № 5, стр. 69 – 80, 1992.
7. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
8. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

12 января 1997

Ереванский государственный университет
E–mail : rhambart@aua.am