ОБ УРАВНЕНИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ

О. Р. Назарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В настоящей работе рассматривается следующее уравнение восстановления : $f(x) = g(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt$, где ядро K удовлетворяет условиям $0 \le K \in L_1 \cap L_p$, $p > 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$, $K(\pm\infty) = 0$, $\chi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \neq 0$. Доказывается, что если $g \in L_1(-\infty, \infty)$ и $g(\pm\infty) = 0$, то для основного решения уравнения восстановления выполняются равенства $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = \chi^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В теории вероятностей и математической физике важные применения имеют следующие интегральные уравнения :

1) уравнения восстановления на полуоси

$$f(x) = g(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где ядро V удовлетворяет условиям

$$V \ge 0, \quad V \in L_p^+, \quad \gamma \equiv \int_0^\infty V(x)\,dx = 1. \tag{1.2}$$

Здесь $L_p^+ \equiv L_p(0,\infty)$, $p \ge 1$;

2) уравнения восстановления на всей прямой

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где ядро K удовлетворяет условиям

$$0 \le K \in L_1 \equiv L_1(-\infty,\infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что функция $K(x)$ является плотностью вероятности некоторой случайной величины ξ. Уравнение (1.1) является частным случаем (1.3), когда ξ принимает только неотрицательные значения, $g(x) = K(x) = 0$, при $x < 0$.

В теории восстановления важное значение имеет задача изучения асимптотических свойств в бесконечности решений уравнений (1.1) и (1.3). Эта задача достаточно подробно изучена в случае уравнения (1.1), (1.2). Ниже мы сформулируем два классических результата в этом направлении, принадлежащих В. Л. Смиту и С. Карлину.

Пусть $\Phi(x)$ – резольвентная функция (*функция восстановления*) уравнения (1.1), определяемая из уравнения восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.1) можно выразить через $\Phi(x)$:

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)g(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Теорема С. *(В. Л. Смит [3], [4]) Пусть $V \in L_p^+$ для некоторого $p > 1$ и существует $V(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Тогда*

$$\Phi(+\infty) = \nu^{-1}, \quad \nu \equiv \int_0^\infty xV(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Если $\nu = \infty$, то $\nu^{-1} = 0$.

Нижеприводимая теорема С. Карлина относится к уравнению восстановления на всей прямой. В частном случае, когда случайная величина ξ обладает плотностью K, теорема Карлина принимает следующий вид :

Теорема К. *(С. Карлин [1], [2]) Пусть ядро K уравнения (1.3) удовлетворяет условиям*

$$\int_{-\infty}^\infty |x|K(x)\,dx < \infty, \quad \chi \equiv \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx \neq 0. \tag{1.8}$$

Если $g \in L_1(\mathbb{R})$, $g(\pm\infty) = 0$ и f – ограниченная функция, удовлетворяющая уравнению (1.3), то существуют пределы $f(\pm\infty)$ и

$$f(+\infty) - f(-\infty) = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^\infty g(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Теорема К не содержит утверждения о существовании решения уравнения (1.3), (1.4). В работе Н. Б. Енгибаряна [5] получено усиление теоремы К, которое мы также сформулируем в частном случае уравнения (1.3).

Рассмотрим банаховы пространства $M \equiv L_\infty$, M_u, M_0, C_M, C_u, C_0 функций, определенных на $\mathbb{R}$. Через M и $C_M \subset M$ обозначаются, соответственно, пространства ограниченных и непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$. Если $f \in M_u \subset M$ или $f \in C_u \subset C_M$, то существуют конечные пределы $f(\pm\infty)$. Если $f \in M_0 \subset M$ или $f \in C_0 \subset C_u$, то $f(\pm\infty) = 0$.

Теорема Е. *(см. [5]). Если $g \in L_1 \cap M_0$ и $\chi \neq 0$, то основное решение уравнения (1.3), (1.4) имеет вид*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1 \in C_u, \quad f_2 \in L_1 \cap M_0$$

и обладает свойствами

$$f(-\infty) = f_1(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = f_1(+\infty) = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx. \tag{1.10}$$

Целью настоящей работы является обобщение теоремы С на случай уравнения (1.3), (1.4). Применяемый метод основан на использовании теоремы С и метода доказательства теоремы Е.

§2. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (1.3)

Пусть Ω – алгебра интегральных операторов $\mathcal{K}$ вида

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)\, dt, \quad K \in L_1, \tag{2.1}$$

и пусть E – одно из следующих банаховых пространств, определенных на $\mathbb{R}$ функций : L_p $(p \geq 1)$, $M \equiv L_\infty$, M_u, M_0, C_M, C_u, C_0. Оператор $\mathcal{K} \in \Omega_A$ действует в любом из пространств E, причем (см. [5])

$$||\mathcal{K}||_E \leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|\, dx. \tag{2.2}$$

Мы будем исследовать уравнение (1.3) в случае, когда ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и дополнительным условиям

$$K \in L_1 \cap L_p, \quad p > 1, \quad K(\pm\infty) = 0. \tag{2.3}$$

Перепишем уравнение (1.3) в операторной форме

$$(I-\mathcal{K})f=g, \quad \mathcal{K}\in\Omega, \tag{2.4}$$

где I – единичный оператор и рассмотрим факторизацию

$$I-\mathcal{K}=(I-\mathcal{V}_-)(I-\mathcal{V}_+), \tag{2.5}$$

где $\mathcal{V}_\pm\in\Omega$ – искомые (формально) вольтерровые операторы вида

$$(\mathcal{V}_+f)(x)=\int_{-\infty}^{x}V_+(x-t)f(t)\,dt,\ (\mathcal{V}_-f)(x)=\int_{x}^{\infty}V_-(t-x)f(t)\,dt,\ V_\pm\in L_1(0,\infty).$$

Факторизация (2.5) эквивалентна следующей системе нелинейных уравнений факторизации (см. [7])

$$V_\pm(x)=K_\pm(x)+\int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t)\,dt, \quad x>0, \tag{2.6}$$

где $K_\pm(x)=K(\pm x)$. В случае выполнения условий (1.4) система (2.6) имеет так называемое *каноническое решение* (см. [7]), которое обладает свойствами

$$V_\pm\geq 0, \quad V_\pm\in L_1^+, \quad \gamma_\pm\equiv\int_0^\infty V_\pm(x)\,dx\leq 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=0. \tag{2.7}$$

Пусть выполнены условия (1.8), т.е. существует конечное, отличное от нуля математическопе ожидание χ случайной величины ξ. Если $\chi>0$, то $\gamma_+=1$, $\gamma_-<1$. Если $\chi<0$, то $\gamma_+<1$, $\gamma_-=1$.

Теперь мы докажем одно важное свойство канонического решения (V_+,V_-) системы (2.6).

Лемма 1. *Пусть ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и (2.3). Тогда*

$$V_\pm\in L_p^+, \quad V(\pm\infty)=0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\chi>0$. Тогда $\gamma_+=1$ и $\gamma_-<1$. Первое из уравнений (2.6) можно интерпретировать как линейное уравнение относительно V_+ с ядром V_- и переписать в операторном виде

$$V_+=K_++\mathcal{V}_-V_+. \tag{2.9}$$

Из $\gamma_-<1$ и неравенств (2.2) следует, что $\mathcal{V}_-$ – сжимающий оператор в пространствах E. Следовательно, (2.9) имеет единственное решение V_+ и

$$V_+(x)=K_+(x)+\int_x^\infty\Phi_-(t-x)K_+(t)\,dt, \tag{2.10}$$

где Φ_- – резольвентная функция оператора $\mathcal{V}_-$, определяемая из уравнения восстановления

$$\Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x V_-(x-t)\Phi_-(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Имеем $\Phi_- \in L_1^+$ и $\Phi_- \geq 0$. Из (2.10), $K_+ \in L_p^+$ и $\Phi_- \in L_1^+$ следует $V_+ \in L_p^+$.

Покажем, что $V_+(+\infty) = 0$. Из $K_+(+\infty) = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$ такое, что при $x > r$ выполнены неравенства

$$K_+(x)\int_0^\infty \Phi_-(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad K_+(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $x > r$ из (2.10) получаем $V_+(x) < \varepsilon$. Мы показали, что $V_+ \in L_p^+$ и $V_+(+\infty) = 0$.

Рассмотрим теперь второе из уравнений (2.6). Имеем $V_- = K_- + \varphi$, где

$$\varphi(x) = \int_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)\,dt. \tag{2.12}$$

Из $V_+ \in L_p^+$ и $V_- \in L_1^+$ следует $\varphi \in L_p^+$. Поэтому $V_- \in L_p^+$. Нам остается показать, что $V_-(+\infty) = 0$. Пусть $U \in \Omega$ – оператор вида

$$(Uf)(x) = \int_x^\infty V_+(t-x)f(t)\,dt.$$

Перепишем второе соотношение (2.6) в виде линейного уравнения относительно V_- :

$$V_- = K_- + UV_-. \tag{2.13}$$

Из (2.13) (см. [7])

$$V_-(x) = K_-(x) + \int_x^\infty \Phi_+(t-x)K_-(t)\,dt, \tag{2.14}$$

где Φ_+ – резольвентная функция оператора $\mathcal{V}_+$, определяемого из уравнения восстановления

$$\Phi_+(x) = V_+(x) + \int_0^x V_+(x-t)\Phi_+(t)\,dt. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15) удовлетворяет условиям теоремы C. Поэтому

$$\Phi_+(+\infty) = \nu^{-1} \geq 0, \quad \nu = \int_0^\infty xV_+(x)\,dx. \tag{2.16}$$

Из (2.14) имеем $V_- = K_- + \psi$, где

$$\psi(x) = \int_0^\infty \Phi_+(t)K_-(x+t)\,dt.$$

Покажем, что $\psi(+\infty) = 0$. Выберем число $r > 0$ такое, что $\Phi_+(x) < \nu^{-1} + 1$ при $x > r$. При $x > r$ имеем

$$\psi(x) \le \int_0^r \Phi_+(t) K_-(x+t)\, dt + (1+\nu^{-1}) \int_{x+r}^\infty K_-(y)\, dy. \tag{2.17}$$

Очевидно, оба слагаемых в правой части (2.17) стремятся к нулю при $x \to \infty$. Поэтому $\psi(+\infty) = 0$, откуда следует $V_-(+\infty) = 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть в уравнении восстановления (1.5) ядро V удовлетворяет условиям*

$$V \ge 0, \quad V \in L_1^+ \cap L_p^+, \quad p \ge 1; \quad \gamma = \int_0^\infty V(x)\, dx < 1, \quad V(+\infty) = 0.$$

Тогда $\Phi(+\infty) = 0$.

Доказательство. Перепишем уравнение (1.5) в виде $\Phi = V + V * \Phi$, где $*$ – операция свертки

$$(\Phi * V)(x) = \int_0^x \Phi(x-t) V(t)\, dt.$$

Эта операция коммутативна и ассоциативна в L_1^+. В работе [6] доказана следующая

Лемма ГЕ. *а) Пусть $u \in L_1^+$ и $v \in M_u$. Тогда $(u * v) \in C_u$ и*

$$(u * v)(+\infty) = u(+\infty) \int_0^\infty v(t)\, dt. \tag{2.18}$$

б) Пусть $u \in L_1^+$, $v \in L_1^{loc}$, $u(+\infty) = 0$ и существует предел $v(+\infty)$. Тогда $(u * v) \in L_1^{loc}(0, \infty)$ и имеет место равенство (2.18).

Через $(V*)^n$ обозначается сверточная n-ая степень V. С помощью неравенства Гёльдера можно доказать, что если $V \in L_1^+ \cap L_p^+$, $p > 1$, то существует целое число n такое, что

$$V_n = (V*)^n \in M_0 \cap L_1^+. \tag{2.19}$$

Пусть число n удовлетворяет условию (2.19), где V – функция, фигурирующая в (1.5). Из уравнения (1.5) имеем

$$\Phi - \Phi_{n-1} = V_n + V * (\Phi - \Phi_{n-1}), \quad \Phi_n = V + (V*)^2 + \cdots + (V*)^n. \tag{2.20}$$

Следовательно, Φ удовлетворяет уравнению

$$\Phi = \Phi_n + V_n * \Phi. \tag{2.21}$$

Имеем $\Phi_n \in L_1^+$ и $\Phi_n(+\infty) = 0$. Так как $\Phi \in L_1^+$ и $V_n \in M_0$, то $V_n * \Phi \in M_0$. Поэтому из (2.21) следует $\Phi(+\infty) = 0$. Лемма 2 доказана.

§3. ТЕОРЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Факторизация (2.5) будет применена к изучению уравнения (1.3). Предположим, что в (1.3) $\chi > 0$ и

$$g \in L_1, \qquad g(\pm\infty) = 0. \tag{3.1}$$

С учетом (2.5) из (2.4) имеем

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+)f = g. \tag{3.2}$$

Обозначив $(I - \mathcal{V}_+)f = h$, мы получим следующие два уавнения :

$$h(x) = g(x) + \int_x^\infty V_-(t - x)h(t)\,dt, \tag{3.3}$$

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^x V_+(x - t)f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Лемма 3. *При $\chi > 0$ уравнение (3.3), (3.1) имеет единственное решение $h \in L_1^+$ и $h(\pm\infty) = 0$.*

Доказательство. Так как в условиях леммы $\gamma_- < 1$, то оператор $\mathcal{V}_-$ сжимающий в пространстве L_1. Поэтому из $g \in L_1$ следует существование и единственность решения $h \in L_1$ уравнения (3.3). Из (3.3) имеем

$$h(x) = g(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t)g(x + t)\,dt. \tag{3.5}$$

Доказательство равенства $h(+\infty) = 0$ идентично доказательству равенства $V_+(+\infty) = 0$ в лемме 1. Нам остается доказать равенство $h(-\infty) = 0$. Согласно равенству $\Phi_-(+\infty) = 0$ (см. лемму 2) существует число $r > 0$ такое, что

$$\Phi_-(t)\int_{-\infty}^\infty |g(y)|\,dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t > r.$$

Тогда из (3.5) будем иметь

$$|h(x)| \le |g(x)| + \int_0^r \Phi_-(t)|g(x + t)|\,dt + \left|\int_r^\infty \Phi_-(t)g(x + t)\,dt\right| \le$$

$$\le |g(x)| + \int_0^r \Phi_-(t)|g(x + t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда легко следует, что $h(-\infty) = 0$. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим теперь уравнение (3.4) с необратимым оператором $I - \mathcal{V}_+$. Из $h \in L_1$ и из результатов работы [7] следует, что консервативное уравнение (3.4) имеет *основное решение* f и

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^x \Phi_+(x - t)h(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Из (3.6) имеем $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + h(x)$, где

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{0} \Phi_+(x-t)h(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_+(x+y)h(-y)\,dy,$$

$$f_2(x) = \int_0^x \Phi_+(x-t)h(t)\,dt, \quad h(+\infty) = 0, \quad h \in L_1.$$

Легко проверить, что

$$f_1(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty h(-y)\,dy = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt.$$

Согласно лемме ГЕ имеем

$$f_2(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty h(t)\,dt.$$

Поэтому

$$f(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt.$$

Займемся вычислением предела функции f в $-\infty$. Из (3.6) имеем

$$f(x) = h(x) + \int_0^\infty \Phi_+(y)h(x-y)\,dy. \tag{3.7}$$

Как и в лемме 1 выберем число $r > 0$ так, чтобы при $y > r$ выполнялось неравенство $\Phi_+(y) < \nu^{-1} + 1$. Пусть число $r_1 > 0$ выбрано так, что при $x < -r_1$ выполнены неравенства

$$|h(x)|\int_0^r \Phi_+(y)\,dy < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (\nu^{-1}+1)\int_{-\infty}^{-r_1} |h(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда из (3.7) при $x < -r_1$ будем иметь

$$|f(x)| \le |h(x)| + \int_0^r \Phi_+(y)|h(x-y)|\,dy + \int_r^\infty \Phi_+(y)|h(x-y)|\,dy < \varepsilon.$$

Мы показали, что $f(-\infty) = 0$. Итак, при выполнении условий (1.4), (1.8), (2.3) и (3.1) нами построено основное решение f уравнения (1.3), причем

$$f \in L_1^{loc}, \quad f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx.$$

Нам остается вычислить предел $f(+\infty)$ в терминах функций, фигурирующих в исходном уравнении (1.3). Из уравнения (3.3) нетрудно получить следующее равенство :

$$\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Нами доказана

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1.3) ядро K удовлетворяет условиям (1.4), (1.8) и (2.3), а свободный член g удовлетворяет условию (3.1). Тогда существует решение $f \in L_1^{loc}$ уравнения (1.3) и*

$$f(-\infty) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{1}{\chi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx.$$

В заключение выражаю благодарность Н. Б. Енгибаряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ABSTRACT. The present paper we consider the following renewal equation : $f(x) = g(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)f(t)dt$ **with kernel** K **satisfying the conditions** $0 \le K \in L_1 \cap L_p$, $p > 1$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$, $K(\pm\infty) = 0$, $\chi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx \ne 0$. **It is proved, that if** $g \in L_1(-\infty, \infty)$ **and** $g(\pm\infty) = 0$, **then for the basic solution of renewal equation the equalities** $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = \chi^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ **hold.**

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, Мир, М., 1984.
2. У. Рудин, Функциональный анализ, Мир, М., 1975.
3. W. L. Smith, "Asymptotic renewal theorems", Proc. Roy. Soc. Edinb., vol. 64, pp. 9 – 48, 1954.
4. W. L. Smith, "Extensions of renewal theorem", Proc. Comb. Phil. Soc., vol. 51, pp. 629 – 638, 1955.
5. Н. Б. Енгибарян, "Уравнение восстановления на всей прямой" (не опубликовано).
6. Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян, "Новая теорема восстановления для интегрального уравнения на полуоси", Изв. НАН Армении, Математика, т. 32, № 1, стр. 2 – 16, 1997.
7. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники. Мат. анализ, т. 22, стр. 175 – 244, 1984.

4 ноября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении