ВКЛЮЧЕНИЕ–ИСКЛЮЧЕНИЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛЬСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. А. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 2, 1997

В данной статье рассматривается проблема описания простых точечных процессов в польских пространствах с помощью приведенных моментных мер, используя формулы типа включения-исключения. Доказывается теорема, устанавливающая, что эти формулы обеспечивают полное описание точечных процессов в случае мажорируемости приведенных моментных мер. Рассматриваются два класса точечных процессов, играющих важную роль в теории гиббсовских точечных процессов. Аналогичные результаты для точечных процессов в евклидовых пространствах при условии существования плотностей были ранее получены Р. В. Амбарцумяном и Г. С. Сукиасяном.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Р. В. Амбарцумяном и Г. С. Сукиасяном в [1] была рассмотрена проблема описания точечных процессов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, начиная с абсолютных плотностей (корреляционных функций). Был применен критерий, основанный на комбинаторном принципе включения-исключения, устанавливающий, когда данная система функций превращается в систему абсолютных плотностей некоторого точечного процесса в $\mathbb{R}^d$. Этот критерий был применен в [1] к классу функций вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha^n \prod_n h(x_i, x_j), \quad (0)$$

где α – положительная константа, $h(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$ – симметричная функция, а произведение $\prod_n$ распространяется на все неупорядоченные пары $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. В [1] было получено достаточное условие, при котором функции $f(x_1, \dots, x_n)$ становятся корреляционными функциями некоторого точечного процесса. Точечные процессы с абсолютными плотностями такого вида играют

важную роль (см. [2], [3]) в теории классических гиббсовских точечных процессов.

В данной статье мы рассматриваем аналогичную проблему описания точечных процессов в общих польских пространствах X в терминах их приведенных моментных мер. В §3 мы формулируем критерий включения-исключения для этого общего случая без предположения существования плотностей. Это дает возможность, в частности, обобщить результаты [1] на случай точечных процессов на решетках и маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$. В §4 рассматриваются последовательности знакопеременных мер, зависящих от графов, и критерий включения-исключения применяется для получения условий, когда такая последовательность порождает точечный процесс в X . В последнем §5 получено утверждение, обобщающее результат о произведениях (0).

§2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СОГЛАСОВАННОСТЬ

В этом параграфе мы формулируем некоторые хорошо известные результаты из теории точечных процессов, которые будут применены в дальнейшем. Сначала введем некоторые обозначения. Через X обозначаем несущее польское пространство, $\mathcal{A}^{(n)}$ будет обозначать кольцо ограниченных борелевских множеств пространства X^n . В случае $n = 1$ пишем $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$. По определению, реализация m — это счетное подмножество X со свойством $\text{card}(m \cap B) < \infty$ для всех $B \in \mathcal{A}$. Для каждого борелевского множества $D \subseteq X$ (не обязательно ограниченного) через $\mathcal{M}_D$ обозначаем класс $\mathcal{M}_D = \{m \cap D\}$ (реализации, попадающие в D). Через $\mathcal{M}_D^{(n)}$ обозначаем класс $\mathcal{M}_D^{(n)} = \{m \cap D : \text{card}(m \cap D) = n\}$ (реализации из $\mathcal{M}_D$, имеющие n точек в D). Таким образом, $\mathcal{M}_D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_D^{(n)}$, если D ограничено. $\mathfrak{F}_D$ будет обозначать минимальную σ -алгебру подмножеств $\mathcal{M}_D$, при котором все функции $N(B, m) = \text{card}(B \cap m) : \mathcal{M}_D \rightarrow \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{A}$ измеримы. Вместо $\mathcal{M}_X$ и $\mathfrak{F}_X$ пишем $\mathcal{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Случайный точечный процесс в X — это измеримое отображение $m(\omega) : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, P_1)$ в измеримое пространство $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$. Вероятность P на $\mathfrak{F}$, индуцированная отображением $m(\omega)$,

называется *вероятностным распределением* процесса $\mathfrak{m}(\omega)$. В терминологии [5] это соответствует определению "простого" точечного процесса (кратные точки отсутствуют).

Пусть P - вероятность на $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ (эквивалентно, вероятностное распределение некоторого точечного процесса $\mathfrak{m}(\omega)$ в X). Значения $P \left(\begin{smallmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{smallmatrix} \right)$ вероятности P на событиях

$$\left(\begin{smallmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{smallmatrix} \right) = \{ \mathfrak{m} \in \mathcal{M} : \text{card}(\mathfrak{m} \cap D_i) = k_i, i = 1, \dots, n \}, \quad (1)$$

где $D_1, \dots, D_n$ - попарно непересекающиеся множества из $\mathcal{A}$, а $k_1, \dots, k_n$ - неотрицательные целые числа, определяют т. н. *конечномерные вероятности* точечного процесса $\mathfrak{m}(\omega)$.

Предложение 1. (см. [5]). *Предположим, что для каждой конечной последовательности $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{A}$ попарно непересекающихся множеств и неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$ дано значение $p(D_1, \dots, D_n, k_1, \dots, k_n)$. Семейство $\{p(D_1, \dots, D_n, k_1, \dots, k_n)\}$ является семейством конечномерных вероятностей некоторой вероятностной меры P на $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ в том и только в том случае, если выполнены следующие шесть условий :*

1) $p(D_1, \dots, D_n, k_1, \dots, k_n) \geq 0,$

2) $p(D_1, \dots, D_n, k_1, \dots, k_n) = p(D_{i_1}, \dots, D_{i_n}, k_{i_1}, \dots, k_{i_n})$ для каждой перестановки $(i_1, \dots, i_n),$

3) $\sum_{k=0}^{\infty} p(D, k) = 1,$

4) $\sum_{k_1=0}^{\infty} p(D_1, \dots, D_n, k_1, \dots, k_n) = p(D_2, \dots, D_n, k_2, \dots, k_n),$

5) $p(D_1, \dots, D_n, B, k_1, \dots, k_n, l) =$
 $= \sum_{i_1 + \dots + i_m = l} p(D_1, \dots, D_n, B_1, \dots, B_m, k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_m),$ где $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$
 с непересекающимися $B_i,$

6) $p(D_1^{(s)}, \dots, D_{n(s)}^{(s)}, 0, \dots, 0) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$ для каждой последовательности $(D_1^{(s)}, \dots, D_{n(s)}^{(s)})$ со свойством $D^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{n(s)} D_i^{(s)} \downarrow \emptyset.$

Вероятностная мера P единственна.

Ниже мы будем рассматривать отображение

$$\mathcal{M}_{D_2} \mapsto \mathcal{M}_{D_1} : \pi_{D_2, D_1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \cap D_1, \quad \text{где } \mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{D_2}, \quad D_1 \subseteq D_2.$$

Определение 1. Система $\{P_D : D \in \mathcal{A}\}$, где P_D – вероятность на M_D , называется *согласованной*, если для любых ее двух элементов P_{D_1} и P_{D_2} с $D_1 \subseteq D_2$ имеем

$$P_{D_1}(A) = P_{D_2}(\pi_{D_2, D_1}^{-1}(A)), \quad (2)$$

т.е. P_{D_1} – сужение P_{D_2} на M_{D_1} .

Предложение 2. (см. [5], стр. 43). Пусть для каждого $D \in \mathcal{A}$ определена вероятность P_D на M_D . Необходимым и достаточным условием существования единственной вероятности P на M со свойством: каждая P_D есть сужение P на M_D , является согласованность семейства $\{P_D : D \in \mathcal{A}\}$.

§3. КОМБИНАТОРНАЯ ТЕОРЕМА О МОМЕНТНЫХ МЕРАХ

Начнем этот параграф, приводя одно предложение из [1]. Функция $f(x_1, \dots, x_n) : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow [0, +\infty)$ называется *абсолютной плотностью n -ой степени* (относительно n -ой степени лебеговской меры L_d в $\mathbb{R}^d$) точечного процесса $\mathfrak{m}(\omega)$ с вероятностным распределением P , если для всех несовпадающих $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$

$$P(N(\overline{dx}_1, \mathfrak{m}) = 1, \dots, N(\overline{dx}_n, \mathfrak{m}) = 1) = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $\overline{dx}_i$ – “инфинитезимальная” окрестность точки x_i , $N(\overline{dx}_i, \mathfrak{m})$ обозначает число точек реализации $\mathfrak{m}$ в $\overline{dx}_i$, а dx_i – значение L_d на $\overline{dx}_i$. Эквивалентно, функция $f(x_1, \dots, x_n)$ – плотность n -ой моментной меры $\mathfrak{m}(\omega)$ (см. ниже определение 2).

Предложение 3. (см. [1]). Пусть $\{f_n(x_1, \dots, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ – система неотрицательных симметричных функций, удовлетворяющих для некоторой константы $b > 0$ условию $f_n(x_1, \dots, x_n) < b^n$, $n = 1, 2, \dots$. Если для почти всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ и всех ограниченных борелевских множеств $D \subset \mathbb{R}^d$ имеют место неравенства

$$V_D^0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \dots \int_{D^n} f_n(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \geq 0,$$

$$V_D(x_1, \dots, x_m) = f_m(x_1, \dots, x_m) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \dots \int_{D^n} f_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \geq 0, \quad m > 0,$$

то существует единственный точечный процесс P в $\mathbb{R}^d$, для которого

$$V_D^0 = P(N(D, \mathfrak{m}) = 0), \quad V_D(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m =$$

$$= P \left(N(\overline{dx_1}, m) = 1, \dots, N(\overline{dx_m}, m) = 1, N \left(D \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{dx_i}, m \right) = 0 \right).$$

В этом параграфе мы обобщаем предложение 3, описывая точечные процессы в польских пространствах X в терминах их приведенных моментных мер. Дадим необходимые определения. Предположим, что $m(\omega)$ – точечный процесс в пространстве X с вероятностным распределением P . Для каждого натурального $n \geq 1$ рассмотрим n -ую степень $m^n(\omega) = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in m(\omega), i = 1, \dots, n\}$ случайного множества $m(\omega)$. Ясно, что $m^n(\omega)$ – точечный процесс в пространстве X^n .

Определение 2. n -ой моментной мерой вероятностного распределения P (или процесса $m(\omega)$) называется мера в X^n , определенная равенством

$$m^{(n)}(A) = EN(A, m^n(\omega)), \tag{3}$$

где A – борелевское подмножество X^n , а E – знак математического ожидания. По определению, $m^{(0)} = 1$.

Из определения следует, что моментные меры симметричны, т.е. для всех подмножеств $D_1, \dots, D_n \subseteq X$ и всех перестановок $(i_1, \dots, i_n)$ последовательности $(1, \dots, n)$

$$m^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n) = m^{(n)}(D_{i_1} \times \dots \times D_{i_n}).$$

Множество всех n -ок $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ с по меньшей мере двумя совпадающими x_i называем *диагональю* пространства X^n .

Определение 3. *Приведенной n -ой моментной мерой* называется сужение моментной меры $m^{(n)}$ на дополнение к диагонали X^n . Для приведенных моментных мер будем использовать то же обозначение $m^{(n)}$.

Пусть дана система $\{m^{(n)} : n = 0, 1, \dots\}$, где $m^{(n)}$ – мера в пространстве X^n , $m^{(0)} = 1$. Мы скажем, что такая система мер *мажорируема*, если существует локально-финитная (т.е. конечная на A) мера ν в X такая, что имеет место неравенство

$$m^{(n)}(A) \leq \nu^n(A), \quad \text{для всех } A \in \mathcal{A}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{4}$$

Будем использовать следующее обозначение : для каждого $A \subseteq \mathcal{M}^{(n)}$ через A^* обозначаем множество

$$A^* = \{(x_1, \dots, x_n) : \{x_1, \dots, x_n\} \in A\}.$$

Теорема 1. Пусть для каждого $n = 1, 2, \dots$ определена симметричная мера $m^{(n)}$ в X^n , $m^{(0)} = 1$. Предположим, что каждая $m^{(n)}$ тождественно равна нулю на диагонали X^n и что система этих мер мажорируема. Тогда $\{m^{(n)} : n = 0, 1, \dots\}$ является системой приведенных моментных мер некоторого вероятностного распределения P на $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$ в том и только в том случае, если для всех $D \in \mathcal{A}$ и всех измеримых $A^{(n)} \subseteq \mathcal{M}_D^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$ имеют место следующие неравенства :

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} m^{(n+s)}(A^{(n)*} \times D^s) \geq 0. \quad (5)$$

В этом случае левая часть P_D в (5) является сужением P на $\mathcal{M}_D$. Вероятностное распределение P единственно.

Замечание. В случае $n = 0$, (5) имеет вид

$$P_D^0 = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} m^{(s)}(D^s) \geq 0.$$

Если распределение P существует, то $P_D^0 = P\left(\frac{D}{0}\right)$.

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, что дана вероятностная мера P на $(\mathcal{M}, \mathfrak{F})$, и докажем, что (5) выполнено. Абсолютная сходимость

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} m^{(n+s)}(A^{(n)*} \times D^s) &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} \nu^{n+s}(A^{(n)*} \times D^s) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} \nu^n(A^{(n)*}) [\nu(D)]^s = \frac{\nu^n(A^{(n)*})}{n!} \cdot e^{\nu(D)} < \infty \end{aligned}$$

рядов в (5) гарантирует правомочность проведенных ниже преобразований. Рассмотрим функции множества $P_D(A^{(n)})$, полученные из мер $m^{(n)}$ через (5). Легко проверить, что P_D является знакопеременной мерой (следует из (4) и из факта, что $m^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$ являются мерами). Пусть $\bar{P}_D$, $D \in \mathcal{A}$ — сужение на $\mathcal{M}_D$ вероятностного распределения P . Наша цель — доказать, что $P_D(A) = \bar{P}_D(A)$. Достаточно показать это только для случая $A = A^{(k)} = \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$, где

$D_1, \dots, D_n$ попарно не пересекаются, $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$, $k_1, \dots, k_n$ — неотрицательные целые числа, и $k = k_1 + \dots + k_n$. Имеем

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{matrix} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k!s!} m^{(k+s)} \left(\left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{matrix} \right)^* \times D^s \right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_1! \dots k_n! s!} m^{(k+s)} (D_1^{k_1} \times \dots \times D_n^{k_n} \times D^s).$$

Учитывая тождество

$$m(A \times (D_1 \cup \dots \cup D_n)^s) = \sum_{s_1 + \dots + s_n = s} \frac{s!}{s_1! \dots s_n!} m(A \times D_1^{s_1} \times \dots \times D_n^{s_n}), \quad (6)$$

где m — любая симметричная мера, а $D_1, \dots, D_n$ попарно не пересекаются, получаем

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{matrix} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s_1 + \dots + s_n = s} \frac{(-1)^s}{k_1! \dots k_n! s_1! \dots s_n!} m^{(k+s)} (D_1^{k_1+s_1} \times \dots \times D_n^{k_n+s_n}).$$

Обозначим через $D^{(k+s)}$ множество $(D_1^{k_1+s_1} \times \dots \times D_n^{k_n+s_n}) \setminus \text{диагональ } X^{k+s}$.

Пусть $l_1, \dots, l_n$ — неотрицательные целые числа. Простым комбинаторным вычислением получаем

$$\text{card}(D^{(k+s)} \cap m^{k+s}) =$$

$$= \begin{cases} \binom{l_1}{k_1+s_1} (k_1+s_1)! \dots \binom{l_n}{k_n+s_n} (k_n+s_n)!, & \text{если } l_i \geq k_i + s_i, \quad i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $m \in \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ l_1 & & l_n \end{matrix} \right)$, а m^{k+s} — $(k+s)$ -ая степень множества m . Отсюда следует

$$m^{(k+s)} (D_1^{k_1+s_1} \times \dots \times D_n^{k_n+s_n}) =$$

$$= \sum_{l_1=k_1+s_1}^{\infty} \dots \sum_{l_n=k_n+s_n}^{\infty} \frac{l_1! \dots l_n!}{(l_1 - k_1 - s_1)! \dots (l_n - k_n - s_n)!} P \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ l_1 & & l_n \end{matrix} \right).$$

Поэтому

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{matrix} \right) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s_1 + \dots + s_n = s} \sum_{l_1 - k_1 = s_1}^{\infty} \dots \sum_{l_n - k_n = s_n}^{\infty} (-1)^s \times$$

$$\times \binom{l_1}{k_1} \binom{l_1 - k_1}{s_1} \dots \binom{l_n}{k_n} \binom{l_n - k_n}{s_n} P \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ l_1 & & l_n \end{matrix} \right).$$

Меняя порядок суммирования по s и $s_1, \dots, s_n$, для $t_i = l_i - k_i$, $i = 1, \dots, n$ получаем

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & & k_n \end{matrix} \right) = \sum_{s_1=0}^{\infty} \dots \sum_{s_n=0}^{\infty} \sum_{t_1=s_1}^{\infty} \dots \sum_{t_n=s_n}^{\infty} (-1)^{s_1 + \dots + s_n} \times$$

$$\times \binom{t_1 + k_1}{k_1} \binom{t_1}{s_1} \dots \binom{t_n + k_n}{k_n} \binom{t_n}{s_n} P \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ t_1 + k_1 & \dots & t_n + k_n \end{matrix} \right).$$

Заменами порядка суммирования по s_i и t_j , приходим к результату

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{matrix} \right) = \sum_{t_1=0}^{\infty} \dots \sum_{t_n=0}^{\infty} \binom{t_1 + k_1}{k_1} \dots \binom{t_n + k_n}{k_n} \times \\ \times P \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ t_1 + k_1 & \dots & t_n + k_n \end{matrix} \right) \times \sum_{s_1=0}^{t_1} (-1)^{s_1} \binom{t_1}{s_1} \dots \sum_{s_n=0}^{t_n} (-1)^{s_n} \binom{t_n}{s_n}.$$

Согласно тождеству

$$\sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 0 \\ 1, & \text{если } k = 0, \end{cases} \quad (7)$$

это означает, что

$$P_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{matrix} \right) = P \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{matrix} \right) = \bar{P}_D \left(\begin{matrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{matrix} \right).$$

Доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Сначала докажем, что P_D — вероятность на $\mathcal{M}_D$. Счетная аддитивность P_D непосредственно следует из счетной аддитивности мер $m^{(n)}$.

Поэтому, достаточно доказать, что $\sum_{n=0}^{\infty} P_D(\mathcal{M}_D^{(n)}) = 1$. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_D(\mathcal{M}_D^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} m^{(n+s)}(D^{n+s}) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n+s}{s} \frac{1}{(n+s)!} m^{(n+s)}(D^{n+s}).$$

Обозначая $n + s = k$ и используя (7), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_D(\mathcal{M}_D^{(n)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} m^{(k)}(D^k) \cdot \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} = m^{(0)} = 1.$$

Теперь докажем, что система $\{P_D : D \in \mathcal{A}\}$ согласованна. Пусть $P_1 = P_{D_1}$ и $P_2 = P_{D_2}$ — вероятности на $\mathcal{M}_{D_1}$ и $\mathcal{M}_{D_2}$ соответственно, $D_1 \subseteq D_2$. Для того, чтобы доказать, что P_1 является сужением P_2 на D_1 , достаточно доказать равенство (2) для событий $A^{(n)} \subseteq \mathcal{M}_{D_1}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$. Обозначая $\Delta = D_2 \setminus D_1$, замечаем, что

$$\pi_{D_2, D_1}^{-1}(A^{(n)}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k} \right).$$

Ясно, что события $\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k} \right)$, $k = 0, 1, \dots$ попарно не пересекаются. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma &= P_2 \left(\pi_{D_2, D_1}^{-1} (A^{(n)}) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} P_2 \left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+k)!s!} m^{(n+k+s)} \left(\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k} \right)^* \times D_2^s \right). \end{aligned}$$

Теперь, из симметричности $m^{(n+k+s)}$

$$m^{(n+k+s)} \left(\left(A^{(n)} \times \binom{\Delta}{k} \right)^* \times D_2^s \right) = \binom{n+k}{k} m^{(n+k+s)} (A^{(n)*} \times \Delta^k \times D_2^s).$$

Принимая во внимание (6) и то, что $D_2 = \Delta \cup D_1$, $\Delta \cap D_1 = \emptyset$, для Σ получаем

$$\Sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^s}{n!k!l!(s-l)!} m^{(n+k+s)} (A^{(n)*} \times \Delta^k \times \Delta^l \times D_1^{s-l}).$$

Заменой порядка суммирования по s и l , для $r = k+l$, $t = s-l$ получаем

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=l}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!k!l!(s-l)!} m^{(n+k+s)} (A^{(n)*} \times \Delta^{k+l} \times D_1^{s-l}) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{t+l}}{n!(r-l)!l!t!} m^{(n+r+t)} (A^{(n)*} \times \Delta^r \times D_1^t) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{n!t!} m^{(n+r+t)} (A^{(n)*} \times \Delta^r \times D_1^t) \left[\sum_{l=0}^r (-1)^l \binom{r}{l} \right]. \end{aligned}$$

Наконец, на основании (7)

$$\Sigma = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{n!t!} m^{(n+t)} (A^{(n)*} \times D_1^t) = P_1(A^{(n)}),$$

что доказывает согласованность P_1 и P_2 . На основании предложения 2, существует распределение P точечного процесса с сужениями P_D . Предположим, что $\bar{m}^{(n)}$ — приведенная n -ая моментная мера распределения P . Докажем, что $\bar{m}^{(n)} = m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ Для этого достаточно показать совпадение значений мер $\bar{m}^{(n)}$ и $m^{(n)}$ на множествах $D_1 \times \dots \times D_n$ с попарно непересекающимися D_i .

По определению моментных мер

$$\bar{m}^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} k_1 \dots k_n P \left(\binom{D_1}{k_1} \dots \binom{D_n}{k_n} \right).$$

Беря в (5) $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ и $A^{(k)} = \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$ с $k = k_1 + \dots + k_n$, получаем

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} &= P_D \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k!s!} m^{(k+s)} \left(\begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_n \\ k_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}^* \times D^s \right) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_1! \dots k_n! s!} m^{(k+s)} (D_1^{k_1} \times \dots \times D_n^{k_n} \times D^s). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \bar{m}^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n) &= \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{k_1! \dots k_n! s!} m^{(k+n+s)} (D_1^{k_1+1} \times \dots \times D_n^{k_n+1} \times D^s) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} m^{(k+n+s)} (D_1 \times \dots \times D_n \times D^s \times D_1^{k_1} \times \dots \times D_n^{k_n}). \end{aligned}$$

Обозначая $k = k_1 + \dots + k_n$, из (6) получаем

$$\begin{aligned} \bar{m}^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!} \times \\ &\times m^{(k+n+s)} (D_1 \times \dots \times D_n \times D^s \times D_1^{k_1} \times \dots \times D_n^{k_n}) = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} m^{(k+n+s)} (D_1 \times \dots \times D_n \times D^{k+s}). \end{aligned}$$

Наконец, заменой $r = k + s$ переменных приходим к

$$\bar{m}^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} m^{(n+r)}(D_1 \times \dots \times D_n \times D^r) \times \left[\sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \right].$$

Согласно (7) последнее выражение совпадает с $m^{(n)}(D_1 \times \dots \times D_n)$. Теорема 1 доказана.

§4. ОДИН СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС МОМЕНТНЫХ МЕР

Теперь мы применяем критерий Теоремы 1 к одному классу моментных мер, представляющих собой суммы зависящих от конечных графов знакопеременных мер. Выводятся достаточные условия, при которых эти суммы становятся приведенными моментными мерами точечного процесса.

Определение 4. *Граф* — это пара $g = (V, E)$, где V — конечное множество натуральных чисел, E — множество неупорядоченных пар элементов V . Элементы V называются *вершинами* графа g ; пара $\{v_1, v_2\} \in E$ называется *ребром*, соединяющим вершины v_1 и v_2 . Вершина называется *изолированной*, если нет содержащих ее ребер. Через $|g|$ обозначаем число вершин графа g .

Определение 5. Для данных двух графов $g_1 = (V_1, E_1)$ и $g_2 = (V_2, E_2)$ пишем $g_1 \sim g_2$ или $g_2 = \tau g_1$, если существует биекция $\tau : V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\{v, w\} \in E_1$ тогда и только тогда, когда $\{\tau v, \tau w\} \in E_2$.

Мы будем рассматривать знакопеременные меры m_g , зависящие от графов g . Предполагаем, что m_g — знакопеременная мера в $X^{|g|}$. В случае $g_2 = \tau g_1$ пишем $m_{g_1} \sim m_{g_2}$, если знакопеременная мера m_{g_2} является образом знакопеременной меры m_{g_1} при отображении τ . Здесь применяем то, что, без ограничения общности, τ может быть рассмотрено как перестановка последовательности $(1, \dots, n)$. Нам нужны следующие определения.

Для графов $g = (V, E)$, $g_1 = (V_1, E_1)$ и $g_2 = (V_2, E_2)$ пишем $g = g_1 + g_2$, если $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Совокупность $\{m_g\}$ зависящих от графов знакопеременных мер называется *таблицей*, если

(I) из $g_1 \sim g_2$ следует $m_{g_1} \sim m_{g_2}$,

(II) из $g = g_1 + g_2$ следует $m_g = m_{g_1} \times m_{g_2}$.

$G(M)$ — это класс всех графов $g = (M, E)$ с множеством вершин M . В случае $M = \{1, \dots, n\}$, вместо $G(M)$ пишем просто $G(n)$.

Для каждого двух непересекающихся множеств N и S натуральных чисел $\overline{B}(N, S)$ обозначает класс всех графов $g = (N \cup S, E)$, удовлетворяющих условию : для каждой вершины из S существует путь, соединяющий ее с некоторой вершиной из N . Если $N = \{1, \dots, n\}$ и $S = \{n + 1, \dots, n + s\}$, то пишем $\overline{B}(n, s)$. Заметим, что класс $\overline{B}(N, S)$ графов был рассмотрен в [1] и [6].

Наконец, обозначаем $m^{(n,s)} = (-1)^s \sum_{g \in \overline{B}(n,s)} m_g$, $n \geq 1, s \geq 0$.

Теорема 2. Пусть $\{m_g\}$ — таблица знакопеременных мер, тождественно равных нулю на диагонали. Если существует конечная на $\mathcal{A}$ мера ν , для которой

$$0 \leq m^{(n,s)}(A^{(n)} \times B^{(s)}) \leq \nu^n(A^{(n)}) \cdot s! \cdot b^s, \tag{8}$$

где $A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$ и $B^{(s)} \in \mathcal{A}^{(s)}$ — ограниченные измеримые множества, $b < 1$ — константа, не зависящая от $B^{(s)}$, то существует единственная вероятность P на

$(\mathcal{M}, \mathfrak{S})$ с приведенными моментными мерами $m^{(n)} = \sum_{g \in G(n)} m_g$.

Доказательство. Будем пользоваться теоремой 1. Так как $\bar{B}(n, 0) = G(n)$, заключаем, что $m^{(n)} = m^{(n,0)}$, и из (8), в случае $s = 0$, следует, что $m^{(n)}$ мажорируема мерой ν^n . Для доказательства неотрицательности рядов (5) рассматриваем два случая: $n = 0$ и $n \geq 1$. Заметим, что (8) гарантирует абсолютную сходимость рядов (5), а этим и правомочность сделанных ниже шагов.

а) Случай $n = 0$. Имеем

$$P_D^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m^{(n)}(D^n) = 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{g \in G(n)} m_g(D^n).$$

Здесь m_1 — мера в X , соответствующая графу g с $|g| = 1$. Пусть

$$G(n, k) = \{g \in G(n) : g \text{ имеет точно } n - k \text{ изолированных вершин}\}.$$

Тогда

$$G(n) = G(n, 0) \cup \bigcup_{k=2}^n G(n, k).$$

Заметим, что $G(n, 0)$ состоит из единственного элемента g_n без ребер. На основании условия (II) мера m_{g_n} , соответствующая графу g_n , факторизуется как $m_{g_n} = m_1^n$, и мы получаем

$$\begin{aligned} P_D^0 &= 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\sum_{g \in G(n,0)} m_g(D^n) + \sum_{k=2}^n \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n) \right] = \\ &= 1 - m_1(D) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[-m_1(D)]^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^n \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n) = \\ &= e^{-m_1(D)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^n \sum_{g \in G(n,k)} m_g(D^n). \end{aligned}$$

Пусть $g \in G(n, k)$. Тогда g имеет $n - k$ изолированных вершин, и, согласно условию (II), $m_g = m_{g'} \times m_1^{n-k}$, где g' — граф с k неизолрованными вершинами. Из условия (I) следует, что $m_{g'}$ не зависит от выбора этих k вершин. Мы можем предположить, что $\{1, \dots, k\}$ — множество вершин графа g' . Обозначая через $\bar{G}(k)$ множество всех графов g' с неизолрованными вершинами $1, \dots, k$, для P_D^0 получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} [m_1(D)]^{n-k} \sum_{g \in \bar{G}(k)} m_g(D^k).$$

Заменяем порядок суммирования по n и k . Получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g \in \bar{G}(k)} m_g(D^k) \left[\sum_{n-k=0}^{\infty} \frac{[-m_1(D)]^{n-k}}{(n-k)!} \right].$$

Поэтому

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g \in \bar{G}(k)} m_g(D^k) \right]. \quad (9)$$

Пусть G_k^m есть множество всех графов из $\bar{G}(k)$ с m компонентами связности. Итак, $\bar{G}(k) = \bigcup_m G_k^m$. Каждый $g \in G_k^m$ может быть представлен в виде $g = \{g_1, \dots, g_m\}$ неупорядоченной последовательности его компонент связности. Согласно условию (II), $m_g = m_{g_1} \times \dots \times m_{g_m}$. Пусть $k_1, \dots, k_m$ — числа вершин подграфов $g_1, \dots, g_m$ соответственно. Теперь мы проводим суммирование в (5) по всем упорядоченным последовательностям $(g_1, \dots, g_m)$, компенсируя это множителем $(m!)^{-1}$.

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_m \sum_{g \in G_k^m} m_g(D^k) \right] = e^{-m_1(D)} \times \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_m \frac{1}{m!} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) \\ k_1 + \dots + k_m = k}} \frac{k!}{k_1! \dots k_m!} \sum_{(g_1, \dots, g_m) \in G_{k_1}^1 \times \dots \times G_{k_m}^1} \prod_{i=1}^m m_{g_i}(D^{k_i}) \right].$$

Замечая, что

$$\sum_{(g_1, \dots, g_m) \in G_{k_1}^1 \times \dots \times G_{k_m}^1} \prod_{i=1}^m m_{g_i}(D^{k_i}) = \prod_{i=1}^m \sum_{g_i \in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i})$$

и меняя порядок суммирования по k и m , получаем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=2m}^{\infty} \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) \\ k_1 + \dots + k_m = k}} \frac{(-1)^k}{k_1! \dots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i \in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) \right] = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 2} \frac{(-1)^{k_1 + \dots + k_m}}{k_1! \dots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i \in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) \right].$$

Окончательно, учитывая

$$\sum_{k_1, \dots, k_m \geq 2} \frac{(-1)^{k_1 + \dots + k_m}}{k_1! \dots k_m!} \prod_{i=1}^m \sum_{g_i \in G_{k_i}^1} m_{g_i}(D^{k_i}) = \prod_{i=1}^m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g \in G_k^1} m_g(D^k),$$

имеем

$$P_D^0 = e^{-m_1(D)} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \right] = e^{-m_1(D)+q} \quad \text{с } q = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{g \in G_k^1} m_g(D^k).$$

Неотрицательность P_D^0 доказана.

б) Случай $n \geq 1$. Здесь имеем

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} m^{(n+s)}(A^{(n)*} \times D^s) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} \sum_{g \in G(n+s)} m_g(A^{(n)*} \times D^s).$$

Рассмотрим множество $B(n, k)$ графов с вершинами $1, \dots, n, n+1, \dots, n+k$, удовлетворяющих условию, что вершины $n+1, \dots, n+k$ неизолированы. Аналогичными случаям а) шагами получаем

$$P_D(A^{(n)}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} [m_1(D)]^{s-k} \sum_{g \in B(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k).$$

Замена порядка суммирования дает

$$\begin{aligned} P_D(A^{(n)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!k!} \sum_{g \in B(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k) \left[\sum_{s=k}^{\infty} \frac{[-m_1(D)]^{s-k}}{(s-k)!} \right] = \\ &= e^{-m_1(D)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!k!} \sum_{g \in B(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k). \end{aligned}$$

Пусть $g \in B(n, k)$. Рассмотрим разбиение $\{n+1, \dots, n+k\} = S \cup M$, где S — множество вершин из $\{n+1, \dots, n+k\}$, для каждой из которых существует путь, соединяющий ее с некоторой вершиной из $\{1, \dots, n\}$; а $M = \{n+1, \dots, n+k\} \setminus S$. Граф g представляется в виде $g = g_1 + g_2$, где g_2 — подграф g с множеством вершин M , а g_1 — дополнение к g_2 . Имеем $m_g = m_{g_1} \times m_{g_2}$. Очевидным образом, $g_1 \in \bar{B}(n, S)$, и $g_2 \in \bar{G}(M)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{g \in B(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k) &= \sum_{g \in \bar{B}(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k) + \\ &+ \sum_{\substack{(S, M) \\ M \neq \emptyset}} \sum_{g_1 \in \bar{B}(n, S)} m_{g_1}(A^{(n)*} \times D^s) \times \sum_{g_2 \in \bar{G}(M)} m_{g_2}(D^{k-s}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $s = |S|$. Суммы $\sum_{g_1 \in \bar{B}(n, S)}$ и $\sum_{g_2 \in \bar{G}(M)}$ в (10) зависят только от s . Это приводит к

$$P_D(A^{(n)}) = e^{-m_1(D)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!k!} \sum_{g \in \bar{B}(n, k)} m_g(A^{(n)*} \times D^k) + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!k!} \sum_{s=0}^{k-2} \binom{k}{s} \sum_{g_1 \in \bar{B}(n,s)} m_{g_1}(A^{(n)^s} \times D^s) \times \sum_{g_2 \in \bar{G}(k-s)} m_{g_2}(D^{k-s}) \Bigg].$$

Меня местами суммы по s и k , получаем

$$\begin{aligned} P_D(A^{(n)}) &= e^{-m_1(D)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!k!} \sum_{g \in \bar{B}(n,k)} m_g(A^{(n)^s} \times D^k) + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!s!(k-s)!} \sum_{g_1 \in \bar{B}(n,s)} m_{g_1}(A^{(n)^s} \times D^s) \times \sum_{g_2 \in \bar{G}(k-s)} m_{g_2}(D^{k-s}) \right] = \\ &= e^{-m_1(D)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} \sum_{g \in \bar{B}(n,s)} m_g(A^{(n)^s} \times D^s) \times \\ &\times \left[1 + \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-s}}{(k-s)!} \sum_{g \in \bar{G}(k-s)} m_g(D^{k-s}) \right]. \end{aligned}$$

На основании (9) заключаем, что

$$P_D(A^{(n)}) = P_D^0 \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{n!s!} \sum_{g \in \bar{B}(n,s)} m_g(A^{(n)^s} \times D^s) = P_D^0 \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{n!s!} m^{(n,s)}(A^{(n)^s} \times D^s).$$

Теперь, $P_D(A^{(n)}) \geq 0$ следует из неотрицательности P_D^0 и условия (8). Теорема 2 доказана.

§5. СЛУЧАЙ АБСОЛЮТНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

В этом параграфе мы рассматриваем еще один специальный класс моментных мер. Предполагаем, что в пространстве X фиксирована локально-финитная мера ν и что знакопеременные меры m_g , рассмотренные в предыдущем параграфе, обладают абсолютными плотностями с видом произведения относительно степеней ν . Теорема 3 указывает на достаточные условия, при которых такие меры становятся приведенными моментными мерами. В конце параграфа рассматриваются некоторые следствия этого результата. Дадим необходимые определения.

Пусть дана симметричная функция $h(x, y) : X^2 \mapsto [0, 1]$, определенная на квадрате пространства X . Положим $\bar{h}(x, y) = h(x, y) - 1$. Для каждого графа $g = (V, E)$ введем обозначение

$$f_g(\{x_i\}_{i \in V}) = \prod_{\{i,j\} \in E} \bar{h}(x_i, x_j).$$

Рассмотрим функции $f^{(N,S)}$, $n = |N| \geq 1$, $s = |S| \geq 0$, определенные как

$$f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \sum_{g \in \bar{B}(N,S)} f_g(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}),$$

где $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ и $S = \{i_{n+1}, \dots, i_{n+s}\}$ являются непересекающимися множествами натуральных чисел, причем $N \neq \emptyset$. В случае $N = N_0 = \{1, \dots, n\}$, $S = S_0 = \{n+1, \dots, n+s\}$ вместо $f^{(N,S)}$ пишем $f^{(n,s)}$. Для каждого множества $N = \{i_1, \dots, i_n\}$ через N^* обозначаем множество $N \setminus \{i_1\}$ (для однозначности N^* считаем, что i_1 — минимальный элемент N).

Следующую лемму ([1]) будем использовать при доказательстве теоремы 3.

Лемма. (см. [1]). *Функции $f^{(N,S)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) &= \\ &= \prod_{k=2}^n h(x_{i_1}, x_k) \cdot \sum_{J \subseteq S} \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f^{(N^* \cup J, S \setminus J)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}), \quad n \geq 2, \quad (11) \\ f^{(\{i_1\}, S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{s+1}}) &= \sum_{\substack{J \subseteq S \\ J \neq \emptyset}} \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f^{(J, S \setminus J)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{s+1}}), \quad n = 1, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы докажем только первое из приведенных соотношений (случай $n \geq 2$); второе может быть получено аналогично. Введем некоторые обозначения. Для каждого графа $g = (N \cup S, E)$ из $\bar{B}(N, S)$ пусть

$$g^* = (N^* \cup S, \{(i, j) \in E : i, j \neq i_1\}), \quad I = \{i \in N^* : \{i_1, i\} \in E\},$$

$$J = \{i \in S : \{i_1, i\} \in E\}, \quad J^c = S \setminus J.$$

Для каждого $g \in \bar{B}(N, S)$ граф $g^* \in \bar{B}(N^* \cup J, J^c)$. Действительно, пусть $j_0 \in J^c$. Так как $g \in \bar{B}(N, S)$, то существует путь $p_k = ((j_0, j_1), \dots, (j_{k-2}, j_{k-1}), (j_{k-1}, j_k))$ в g , соединяющий вершину j_0 с некоторой вершиной j_k из N . Если $j_k \neq i_1$, то $j_k \in N^* \cup J$ и, таким образом, $g^* \in \bar{B}(N^* \cup J, J^c)$. Если $j_k = i_1$, то $j_{k-1} \in N^* \cup J$ (в J^c нет вершин, соединенных с вершиной i_1), и $p_{k-1} = ((j_0, j_1), \dots, (j_{k-2}, j_{k-1}))$ является путем, соединяющим j_0 с некоторой вершиной из $N^* \cup J$. Теперь получаем

$$f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \sum_{g \in \bar{B}(N,S)} f_g(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{g \in \bar{B}(N, S)} \prod_{i \in I} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \cdot f_{g^*}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \\
 &= \sum_{I \subseteq N^*} \prod_{i \in I} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \sum_{J \subseteq S} \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \sum_{g^* \in \bar{B}(N^* \cup J, J^*)} f_{g^*}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}).
 \end{aligned}$$

Из равенства $\sum_{I \subseteq N^*} \prod_{i \in I} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) = \prod_{k=2}^n (\bar{h}(x_{i_1}, x_k) + 1) = \prod_{k=2}^n h(x_{i_1}, x_k)$, очевидно, следует утверждение леммы.

Теорема 3. Пусть X — польское пространство, а $h(x, y) : X^2 \mapsto [0, 1]$ — симметричная функция, т.е. $h(x, y) = h(y, x)$ для всех $x, y \in X$. Пусть ν_1 — конечная на $\mathcal{A}$ мера в X . Если имеет место неравенство

$$c = \sup_x \int_X [1 - h(x, y)] \nu_1(dy) < \frac{1}{e},$$

где e — основание натурального логарифма, и знакопеременные меры

$$m_g(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{\{i, j\} \in g} [h(x_i, x_j) - 1] \nu_1(dx_1) \dots \nu_1(dx_n),$$

тождественно равные нулю на диагонали, то семейство $\{m_g\}$ является таблицей и удовлетворяет условию (8) Теоремы 2. Приведенная n -ая моментная мера $m^{(n)}$ соответствующего распределения P имеет вид

$$m^{(n)}(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, n\}} h(x_i, x_j) \nu_1(dx_1) \dots \nu_1(dx_n).$$

Доказательство. Условия (I) и (II) непосредственно следуют из определения мер m_g . Покажем (8). Так как знакопеременная мера $m^{(n, s)}$ является интегралом функции $(-1)^s f^{(n, s)}$ (относительно меры ν^{n+s}), то достаточно доказать, что $(-1)^s f^{(N, S)} \geq 0$ для всех N и S . Применяем индукцию по $n + s = |N| + |S|$. Случай $n + s = 1$ очевиден. Рассмотрим только случай $n \geq 2$. Согласно (11), получаем

$$\begin{aligned}
 &(-1)^s f^{(N, S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) = \\
 &= \prod_{k=2}^n h(x_{i_1}, x_{i_k}) \sum_{J \subseteq S} \left[(-1)^j \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i) \right] \cdot \left[(-1)^{s-j} f^{(N^* \cup J, J^*)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}) \right].
 \end{aligned}$$

Теперь, неотрицательность $(-1)^s f^{(N,S)}$ следует из неравенств $h(x,y) \geq 0$, $\bar{h}(x,y) \leq 0$ и индукционного предположения. Для доказательства того, что $m^{(n,s)}$ может быть мажорируема как указано в условии (8), индукцией по $n+s$ покажем, что равномерно для всех $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ имеет место неравенство

$$\int_{X^s} (-1)^s f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{i_{n+1}}, \dots, x_{i_{n+s}}) \nu_1(dx_{i_{n+1}}) \cdots \nu_1(dx_{i_{n+s}}) \leq s! c^s e^{n+s-1}, \quad (12)$$

где $N = \{i_1, \dots, i_n\}$, $S = \{i_{n+1}, \dots, i_{n+s}\}$. Если $n+s = 1$, то ясно, что (12) выполнено. Далее, для случая $n \geq 2$, согласно (11), получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \int_{X^s} (-1)^s f^{(N,S)}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n+s}}) \nu_1(dx_{i_{n+1}}) \cdots \nu_1(dx_{i_{n+s}}) \leq \\ &\leq \sum_{J \subseteq S} \int_{X^s} [(-1)^j \prod_{i \in J} \bar{h}(x_{i_1}, x_i)] \times \\ &\times [(-1)^{s-j} f^{(N \cup J, J^c)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}})] \nu_1(dx_{i_{n+1}}) \cdots \nu_1(dx_{i_{n+s}}). \end{aligned}$$

Замечая, что интеграл в правой части этого неравенства зависит лишь от $j = |J|$, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\leq \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \int_{X^j} \prod_{h=n+1}^{n+j} [1 - h(x_{i_1}, x_{i_h})] \nu_1(dx_{i_{n+1}}) \cdots \nu_1(dx_{i_{n+j}}) \times \\ &\times \int_{X^{s-j}} (-1)^{s-j} f^{(N \cup J, J^c)}(x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+s}}) \nu_1(dx_{i_{n+j+1}}) \cdots \nu_1(dx_{i_{n+s}}) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (s-j)! c^{s-j} e^{n+s-2} \cdot \left[\int_X [1 - h(x_{i_1}, y)] \nu_1(dy) \right]^j \leq \\ &\leq s! c^s e^{n+s-2} \sum_{j=0}^s \frac{1}{j!} \leq s! c^s e^{n+s-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, (12) выполнено. Для $m^{(n,s)}$ получаем

$$\begin{aligned} m^{(n,s)}(A^{(n)} \times B^{(s)}) &= \int_{A^{(n)}} \int_{B^{(s)}} (-1)^s f^{(n,s)}(x_1, \dots, x_{n+s}) \nu_1(dx_1) \cdots \nu_1(dx_{n+s}) \leq \\ &\leq \int_{A^{(n)}} \nu_1(dx_1) \cdots \nu_1(dx_n) \int_{X^s} (-1)^s f^{(n,s)}(x_1, \dots, x_{n+s}) \nu_1(dx_{n+1}) \cdots \nu_1(dx_{n+s}) \leq \end{aligned}$$

$$\leq s!c^s e^{n+s-1} \cdot \nu_1^n(A^{(n)}) \leq [e\nu_1]^n(A^{(n)}) \cdot s!(ce)^s.$$

Итак, условие (8) выполнено при $\nu = e\nu_1$ и $b = ce$. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы хотим рассмотреть теорему 3 в трех частных случаях. Утверждение примера 1 – один из результатов [1]. Точечные процессы на целочисленных решетках из примера 2 рассматриваются в статистической механике. Мы предполагаем, что точечные процессы из примера 3 играют важную роль в теории маркированных гиббсовских точечных процессов.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^d$, и пусть дана симметричная функция $h(x, y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto [0, 1]$. Пусть α – неотрицательное вещественное число. Рассматривая в качестве ν_1 лебеговскую меру в $\mathbb{R}^d$ с интенсивностью α и меры m_p , определенные в теореме 3, получаем : если имеет место неравенство $\alpha ce < 1$, где

$$c = \sup_x \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h(x, y)] dy,$$

то существует единственный точечный процесс с приведенной n -ой моментной мерой

$$m^{(n)}(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \alpha^n \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1, \dots, n\}} h(x_i, x_j) dx_1 \dots dx_n.$$

Пример 2. Пусть X – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, т.е. $X = Z^d$. Предположим, что даны две функции $\nu : X \mapsto [0, \infty)$ и $0 \leq h(x, y) \leq 1$, где $h(x, y)$ симметрична и равна нулю при совпадающих значениях аргументов. Если имеет место неравенство

$$ce < 1, \quad \text{где } c = \sup_x \sum_{y \in Z^d} [1 - h(x, y)] \nu(y),$$

то существует единственный точечный процесс на Z^d , для которого значения функций

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1, \dots, n\}} h(x_i, x_j) \nu(x_1) \dots \nu(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

служат вероятностями того, что имеется по одной точке реализации в положениях $x_i, i = 1, \dots, n$ (в случае $n = 1, f(x) = \nu(x)$).

Пример 3. (Маркированные точечные процессы в $\mathbb{R}^d$). Предположим, что $X = \mathbb{R}^d \times \{1, \dots, r\}$. Пусть дано семейство

$$\{h_{ij}(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1] : h_{ij} = h_{ji}, h_{ij}(x) = h_{ji}(-x), 1 \leq i, j \leq r\}$$

симметричных функций и неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Полагая $h((x, i), (y, j)) = h_{ij}(x - y) : X^2 \rightarrow [0, 1]$ и рассматривая в качестве меры ν_1 ту, сужение которой на $\mathbb{R}^d \times \{i\}$, $i = 1, \dots, r$ есть левеговская мера в $\mathbb{R}^d$ с интенсивностью α_i , из теоремы 3 получаем : если выполнено неравенство $ce < 1$, где $c = \max_i \sum_{j=1}^r \alpha_j \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ij}(x)] dx$, то функции

$$\begin{cases} f(x, i) \equiv \alpha_i, \\ f((x_1, k_1), \dots, (x_n, k_n)) = \prod_{\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, r\}} h_{k_i k_j}(x_i - x_j) \end{cases}$$

являются абсолютными плотностями (относительно степеней меры ν_1) единственного маркированного точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ с марками $1, \dots, r$. Вероятность того, что в каждом интервале $(x_i, x_i + dx_i)$ имеется по одной точке с маркой k_i , $i = 1, \dots, n$, равна $\alpha_{k_1} \dots \alpha_{k_n} f((x_1, k_1), \dots, (x_n, k_n)) dx_1 \dots dx_n$.

ABSTRACT. The paper considers the problem of description of simple point processes in Polish spaces by means of their reduced moment measures basing on Inclusion-Exclusion type formulae. A theorem is proved stating that these formulae provide complete description of point processes for dominated sequences of moment measures. Two types of point processes are considered, playing a role within the theory of Gibbs point processes. Similar results for point processes in Euclidean spaces under assumption of existence of densities have been obtained earlier by R. V. Ambartzumian and H. S. Sukiasian.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian, "Inclusion-Exclusion and Point Processes", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 15 - 31, 1991.
2. R. V. Ambartzumian, "Random graph approach to Gibbs processes with pair interaction", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 3 - 14, 1991.
3. R. V. Ambartzumian, "On condensable point processes", New Trends in Prob. and Stat., VSP/ Mokslas, vol. 1, pp. 655 - 667, 1991.
4. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Наука, Москва, 1989.
5. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке, Безграницно делимые точечные процессы, Наука, Москва, 1982.
6. Д. Рюэль, Статистическая механика, Мир, Москва, 1971.