

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

А. О. Карапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 2, 1997

Пусть M_{mn} — пространство всех комплексных $m \times n$ -матриц. Через μ_{mn} обозначим меру Лебега в пространстве $M_{mn} \cong \mathbb{C}^{mn}$. При $1 \leq m \leq n$ любая матрица $\omega \in M_{mn}$ может быть записана как $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m, n-m}$. В работе рассматриваются матричные области Зигеля $\pi_{mn} = \{(\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \text{Im } \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* \text{ положительно определена}\}$, где ω^* — эрмитово сопряженная к ω матрица, а также классы $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ голоморфных в π_{mn} функций, принадлежащих пространству $L^p\{\pi_{mn}; [\det(\text{Im } \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega)\}$. Установлены весовые интегральные представления классов $H_\alpha^p(\pi_{mn})$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. В [1], [2] М. М. Джрбашян ввел и изучил классы $H^p(\alpha)$ ($1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$) голоморфных функций $f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ с конечным интегралом

$$\iint_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Классы $H^p(\alpha)$ намного шире, чем хорошо известные классы H^p . Одно важное свойство, установленное в [1], [2], может быть сформулировано следующим образом :

Теорема 0.1. Каждая функция $f \in H^p(\alpha)$ ($1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$) имеет интегральное представление

$$f(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)(1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\zeta})^{2+\alpha}} d\xi d\eta, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (0.1)$$

Интегральный оператор, порожденный правой частью (0.1), является ортогональной проекцией пространства $L^2\{\mathbb{D}; (1 - |\zeta|^2)^\alpha d\xi d\eta\}$ на свое подпространство $H^2(\alpha)$, $\alpha > -1$.

В [1], [2] этот основополагающий результат был применен к построению теории факторизации мероморфных функций в $\mathbb{D}$. Кроме того, в обзорах М. М. Джрбашяна [3], [4] и в монографии А. Э. Джрбашяна и Ф. А. Шамояна [5] содержится много других применений теоремы 0.1 к различным вопросам комплексного анализа.

В последующих исследованиях были установлены аналоги формулы (0.1) для других областей (включая многомерные). В следующем пункте содержится обзор соответствующих результатов.

0.2. Через M_{mn} обозначим множество всех комплексных $m \times n$ -матриц. Через $\zeta^* \in M_{nm}$ обозначим эрмитово сопряженную к $\zeta \in M_{mn}$ матрицу, через I^m — единичную матрицу в M_{mm} , $m \geq 1$ и через μ_{mn} — меру Лебега в пространстве $M_{mn} \cong \mathbb{C}^{mn}$. При $m, n \geq 1$ и для комплексного числа β с $\operatorname{Re} \beta > -1$ положим

$$c_{mn}(\beta) = \frac{1}{\pi^{mn}} \prod_{l=1}^{m+n} \Gamma(l + \beta) \left[\prod_{k=1}^m \Gamma(k + \beta) \prod_{j=1}^n \Gamma(j + \beta) \right]^{-1}.$$

Область

$$R_{mn} = \{ \zeta \in M_{mn} : I^m - \zeta \zeta^* \text{ положительно определена} \}$$

назовем *обобщенным единичным кругом* в M_{mn} . Заметим, что R_{1n} есть единичный шар $B_n = \{ \zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| < 1 \}$. Пусть $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Обозначим через $L_\alpha^p(R_{mn})$ пространство всех комплекснозначных измеримых функций $f(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$ с конечной “нормой”

$$\|f\|_{p,\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{R_{mn}} |f(\zeta)|^p [\det(I^m - \zeta \zeta^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\zeta) \right)^{1/p} \quad (0.2)$$

и положим

$$H_\alpha^p(R_{mn}) = \{ f \in L_\alpha^p(R_{mn}) : f \text{ голоморфна в } R_{mn} \}.$$

Далее, если $1 \leq p < \infty$ и $\alpha > -1$, то будем писать $\beta \succ (p, \alpha)$, если $\beta \in \mathbb{C}$ и

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \beta &> \frac{\alpha+1}{p} - 1, & \text{если } 1 < p < \infty, \\ \operatorname{Re} \beta &\geq \alpha, & \text{если } p = 1. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Теорема 0.2. а) Если $1 \leq p < \infty$, $\alpha > -1$, то каждая функция $f \in H_{\alpha}^p(R_{mn})$ при $m, n \geq 1$ имеет интегральное представление

$$f(z) = c_{mn}(\beta) \int_{R_{mn}} \frac{f(\zeta) [\det(I^m - \zeta \zeta^*)]^{\beta}}{[\det(I^m - z \zeta^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\zeta), \quad (0.4)$$

где $\beta > (p, \alpha)$, $z \in R_{mn}$.

б) Если $1 \leq p < \infty$, $\alpha > (p-1) \min\{m, n\} - p$ и комплексное число β удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \beta > \frac{\alpha + \min\{m, n\}}{p} - 1, \quad m, n \geq 1,$$

то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.4), является ограниченным проектором $L_{\alpha}^p(R_{mn})$ на $H_{\alpha}^p(R_{mn})$.

в) Если $\alpha > -1$, то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.4) ($\beta = \alpha$), есть ортогональный проектор $L_{\alpha}^2(R_{mn})$ на $H_{\alpha}^2(R_{mn})$.

Заметим, что для $m = n = 1$ (когда $R_{mn} = R_{11}$ есть единичный диск $D \subset \mathbb{C}$) утверждение а) с $\beta = \alpha$ и утверждение в) следуют из теоремы 0.1. Для $m, n \geq 1$ утверждение а) с $\beta = \alpha = 0$ и утверждение в) с $\alpha = 0$ были установлены Л. К. Хуа [6].

В случае $m = 1$, $n \geq 1$, когда $R_{mn} = R_{1n}$ есть единичный шар, $B_n \subset \mathbb{C}^n$ и формула (0.4) принимает вид

$$f(z) = c_{1n}(\beta) \int_{B_n} \frac{f(\zeta) (1 - |\zeta|^2)^{\beta}}{(1 - z \zeta^*)^{1+n+\beta}} d\mu_{1n}(\zeta), \quad z \in B_n,$$

утверждения а), б) были установлены Ф. Форелли, У. Рудиным [7] (для $\alpha = 0$) и М. М. Джрбацияном [3], [4] (для $\alpha > -1$).

В [8] М. Столы рассматривал случай произвольных ограниченных симметрических областей (гораздо более общих, чем области R_{mn} , $m, n \geq 1$). Из результатов работы [8], сформулированных для области R_{mn} , следуют утверждения а) (с $\alpha = 0$, $\beta \geq 0$) и б) (с $p = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = m + n$).

Наконец, общие утверждения а) и б) – в) теоремы 0.2 были установлены в работах [9] и [10], соответственно.

В [11] С. Г. Гиндикин рассмотрел весьма общие многомерные неограниченные области (области Зигеля второго рода) и в явной форме построил воспроизводящие ядра для голоморфных в таких областях функций из L^2 -пространств.

Позже Р. Р. Койфман и Р. Рохберг [12] указали, что методы работы [11] позволяют построить (опять же в явной форме) воспроизводящие ядра для голоморфных в симметрических аффинно-однородных областях Зигеля второго рода функций из некоторых весовых L^2 -пространств. В [11], [12] в значительной степени использовалась техника преобразования Фурье.

0.3. В настоящей работе мы устанавливаем аналог теоремы 0.2 для неограниченных матричных областей. Для определения этих областей предположим, что $1 \leq m \leq n$ и каждую матрицу $\omega \in M_{mn}$ запишем как $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m, n-m}$. Тогда матричная область Зигеля определяется как

$$\pi_{mn} = \{ \omega = (\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* \text{ положительно определена} \}, \quad (0.5)$$

где $\operatorname{Im} \omega_1 = \frac{1}{2i}(\omega_1 - \omega_1^*)$. Очевидно, π_{mn} обобщает такие многомерные области как π_{1n} (область Зигеля в $\mathbb{C}^n$) и π_{nn} (так называемая обобщенная верхняя полуплоскость в пространстве квадратных матриц).

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом (см. теоремы 2.1 и 2.2) :

Теорема 0.3. Пусть $1 \leq m \leq n$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда

а) если $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$, $\beta > (p, \alpha)$, то каждая голоморфная функция $f(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$ с конечным интегралом

$$\|f\|_{p, \alpha} = \left(\int_{\pi_{mn}} |f(\omega)|^p [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega) \right)^{1/p}$$

имеет интегральное представление

$$f(\omega) = 2^{m(n-m+\beta)} c_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} \frac{f(\omega) [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\beta}{[\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\omega), \quad (0.6)$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn};$$

б) если $\alpha > p(m-1) - m$, $\operatorname{Re} \beta > \frac{\alpha + m}{p} - 1$, то интегральный оператор, порожденный правой частью формулы (0.6), есть ограниченный проектор из пространства $\{f : \|f\|_{p, \alpha} < \infty\}$ на свое подпространство голоморфных функций.

В случае $m = n = 1$ (когда $\pi_{mn} = \Pi_+$) этот результат был установлен М. М. Джрбашяном и А. Э. Джрбашяном [13] на основе формулы (0.1). В [14] – [17] теорема 0.3 была установлена для случаев $m = 1$, $n \geq 1$ и $m = n \geq 1$.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Приводимые в этом разделе необходимые предварительные факты хорошо известны (см., например, [6], [9], [17]). Напомним, что M_{mm} – пространство всех комплексных $m \times m$ -матриц. Для произвольного $A \in M_{mm}$ положим

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Пусть H_m , $m \geq 1$ – множество всех эрмитовых матриц, т.е. $H_m = \{A \in M_{mm} : A = A^*\}$. Заметим, что $\operatorname{Re} A \in H_m$ и $\operatorname{Im} A \in H_m$ для произвольного $A \in M_{mm}$. Далее, положим

$$H_m^+ = \{A \in H_m : A \text{ положительно определена}\}, \quad m \geq 1.$$

Обычно факт $A \in H_m^+$ записывается как $A > 0$. Очевидно, что $\det A > 0$ для любого $A > 0$. Хорошо известно, что для любого $A > 0$ существует единственная матрица $B > 0$ такая, что $A = B \cdot B$. Эта матрица B обычно записывается как $B = \sqrt{A}$ и мы имеем $\det(\sqrt{A}) = \sqrt{\det A}$. Далее, для $m \geq 1$ рассмотрим следующие области в M_{mm} :

$$M_{mm}^* = \{A \in M_{mm} : \det A \neq 0\},$$

$$\widetilde{M}_{mm} = \{A \in M_{mm} : \operatorname{Re} A > 0, \text{ или } \operatorname{Im} A > 0, \text{ или } -\operatorname{Im} A > 0\}.$$

Легко проверить, что область $\widetilde{M}_{mm}$ звездна относительно единичной матрицы I^m . Следовательно, область $\widetilde{M}_{mm}$ односвязна. Это в совокупности с фактом $\widetilde{M}_{mm} \subset M_{mm}^*$ (т.е. $\det A \neq 0$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$) влечет существование голоморфной функции $g(A)$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$, однозначно определяемой свойствами

$$\exp[g(A)] = \det A, \quad A \in \widetilde{M}_{mm}, \quad g(I^m) = 0.$$

Мы используем обозначение $g(A) \equiv \ln \det(A)$. Очевидно, имеем

$$\operatorname{Re} (\ln \det(A)) = \ln |\det(A)|, \quad A \in \widetilde{M}_{mm}.$$

В [17] (Лемма 1.2) было установлено, что $|\operatorname{Im} (\ln \det(A))| \leq \pi m$, $A \in \widetilde{M}_{mm}$.

Определим степенную функцию в $\widetilde{M}_{mm}$ следующим образом: для произвольного $\beta \in \mathbb{C}$ положим

$$[\det A]^\beta = \exp[\beta \ln \det(A)], \quad A \in \widetilde{M}_{mm}.$$

1.2. Всюду дальше мы предполагаем $1 \leq m \leq n$ и рассматриваем пространство M_{mn} . Каждая матрица $\zeta \in M_{mn}$ может быть записана как $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, где $\zeta_1 \in M_{mm}$ и $\zeta_2 \in M_{m, n-m}$. Очевидно

$$\zeta^* = \begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix} \in M_{nm}.$$

Следовательно

$$z\zeta^* = z_1\zeta_1^* + z_2\zeta_2^*, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn}, \quad z = (z_1, z_2) \in M_{mn}.$$

В частности, имеем

$$\zeta\zeta^* = \zeta_1\zeta_1^* + \zeta_2\zeta_2^*, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn}.$$

Поэтому

$$R_{mn} = \{ \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in M_{mn} : I^m - \zeta_1\zeta_1^* - \zeta_2\zeta_2^* \text{ положительно определена} \}.$$

Если $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}$, то $\zeta_1 \in R_{mm}$. Напомним, что матричная область Зигеля π_{mn} определена нами в (0.5). Заметим, что если $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$, то $\text{Im } \omega_1 > 0$, т.е. $\omega_1 \in \pi_{mm}$. Оказывается, что области R_{mn} и π_{mn} биголоморфно эквивалентны. Более точно, рассмотрим следующие отображения (так называемые *обобщенные преобразования Кэли*) :

$$\Phi(\zeta) = i(I^m - \zeta_1)^{-1}(I^m + \zeta_1, \zeta_2) \equiv (\Phi_1(\zeta_1, \zeta_2), \Phi_2(\zeta_1, \zeta_2)), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn},$$

$$\Phi^{-1}(\omega) = (iI^m + \omega_1)^{-1}(\omega_1 - iI^m, 2\omega_2) \equiv$$

$$\equiv (\Phi_1^{-1}(\omega_1, \omega_2), \Phi_2^{-1}(\omega_1, \omega_2)), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}.$$

Заметим, что

$$\text{Re } (I^m - \zeta_1) > 0, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn},$$

$$\text{Im } (\omega_1 + iI^m) > 0, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}.$$

Следовательно, матрицы $(I^m - \zeta_1)^{-1}$, $(\omega_1 + iI^m)^{-1}$ существуют и, значит, Φ и Φ^{-1} определены корректно.

Лемма 1.1. Если $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ и $w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}$, то

$$|\det(\omega + iI^m)| \geq 1, \quad |\det(\omega + iI^m)| \geq \det(\operatorname{Im} \omega), \quad (1.1)$$

$$\det(\operatorname{Im} \omega_1) \geq \det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{Re} [2i(\omega_1^* - w_1) - 4w_2 \omega_2^*] > 0. \quad (1.3)$$

Доказательство. Неравенства (1.1) доказаны в [17] (лемма 2.1). Для доказательства (1.2) допустим $\operatorname{Im} \omega_1 > \omega_2 \omega_2^*$. Запишем

$$\omega_2 = \sqrt{\operatorname{Im} \omega_1} \eta, \quad \eta \in M_{m, n-m}.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* = \sqrt{\operatorname{Im} \omega_1} (I^m - \eta \eta^*) \sqrt{\operatorname{Im} \omega_1},$$

$$\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*) = \det(\operatorname{Im} \omega_1) \det(I^m - \eta \eta^*).$$

Следовательно, $\eta \in R_{m, n-m}$ и, таким образом, (1.2) сводится к неравенству $1 \geq \det(I^m - \eta \eta^*)$. Остается воспользоваться следующим хорошо известным фактом (см. [6], теорема 2.1.2) :

$$0 < \det(I^m - \zeta \zeta^*) \leq 1, \quad \zeta \in R_{mn}, \quad m, n \geq 1.$$

Далее, зафиксируем произвольное $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ и $w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [2i(\omega_1^* - w_1) - 4w_2 \omega_2^*] = \\ = 2(\operatorname{Im} \omega_1 - w_2 \omega_2^*) + 2(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*) + 2(w_2 - \omega_2)(w_2^* - \omega_2^*) > 0, \end{aligned}$$

и утверждение (1.3) доказано.

Следующая лемма устанавливает основные свойства преобразований Кэли Φ и Φ^{-1} .

Лемма 1.2. 1°. Отображения $\Phi : R_{mn} \mapsto \pi_{mn}$ и $\Phi^{-1} : \pi_{mn} \mapsto R_{mn}$ являются биголоморфными изоморфизмами.

2°. Пусть $\Delta(\zeta)$, $\zeta \in R_{mn}$ и $\Delta^{-1}(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$, соответственно, являются комплексными якобианами отображений Φ и Φ^{-1} . Тогда

$$\Delta(\zeta) = \frac{2^{m^2} i^{mn}}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}, \quad (1.4)$$

$$\Delta^{-1}(\omega) = \frac{2^{mn} i^{m^2}}{[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n}}, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}. \quad (1.5)$$

3°. Имеют место следующие формулы замены переменной:

$$d\mu_{mn}(\Phi(\zeta)) = \frac{4^{m^2}}{|\det(I^m - \zeta_1)|^{2(m+n)}} d\mu_{mn}(\zeta), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}, \quad (1.6)$$

$$d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega)) = \frac{4^{mn}}{|\det(\omega_1 + iI^m)|^{2(m+n)}} d\mu_{mn}(\omega), \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}. \quad (1.7)$$

4°. Если $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ и $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$, то

$$\det[I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*] = \frac{\det[2i(\omega_1^* - \omega_1) - 4\omega_2\omega_2^*]}{\det(\omega_1 + iI^m)\det(\omega_1^* - iI^m)}, \quad (1.8)$$

$$\det[I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*] = \frac{\det[4(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2\omega_2^*)]}{\det(\omega_1 + iI^m)\det(\omega_1^* - iI^m)}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \ln \det[2i(\omega_1^* - \omega_1) - 4\omega_2\omega_2^*] = \\ & = \ln \det[I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*] + \ln \det(\omega_1 + iI^m) + \ln \det(\omega_1^* - iI^m). \end{aligned} \quad (1.10)$$

5°. Для любых матриц $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}$ и $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}$ таких, что $\omega = \Phi(\zeta) \iff \zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, имеем

$$\ln \det(I^m - \zeta_1) = C - \ln \det(\omega_1 + iI^m), \quad (1.11)$$

где постоянная C не зависит от ζ и ω .

Доказательство. Простые вычисления показывают, что а) Φ инъективно в R_{mn} , $\Phi(R_{mn}) \subset \pi_{mn}$;

б) Φ^{-1} инъективно в π_{mn} , $\Phi^{-1}(\pi_{mn}) \subset R_{mn}$;

в) $\Phi^{-1}(\Phi(\zeta)) \equiv \zeta$, $\zeta \in R_{mn}$; $\Phi(\Phi^{-1}(\omega)) \equiv \omega$, $\omega \in \pi_{mn}$.

Отсюда непосредственно следует 1°. Для доказательства 2° заметим, что

$$(I^m - \zeta_1)\Phi(\zeta) \equiv i(I^m + \zeta_1, \zeta_2), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}.$$

Дифференцируя, получим

$$(I^m - \zeta_1) d\Phi(\zeta) \equiv (d\zeta_1[\Phi_1(\zeta) + iI^m], d\zeta_1\Phi_2(\zeta) + i d\zeta_2).$$

Следовательно

$$d\Phi(\zeta) \equiv (I^m - \zeta_1)^{-1}(d\zeta_1, d\zeta_2) \begin{pmatrix} \Phi_1(\zeta) + iI^m & \Phi_2(\zeta) \\ 0 & iI^{n-m} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\Delta(\zeta) = [\det(I^m - \zeta_1)^{-1}]^n [\det(\Phi_1(\zeta) + iI^m) \det(iI^{n-m})]^m.$$

Последнее в совокупности с очевидным тождеством

$$\det(\Phi_1(\zeta) + iI^m) \equiv \frac{(2i)^m}{[\det(I^m - \zeta_1)]}$$

дает нужную формулу (1.4). Формула (1.5) может быть установлена сходным образом. Далее, 3° непосредственно следует из 2°. Что касается 4°, оно может быть проверено прямым вычислением, используя свойства функции $\ln \det$. Наконец, если $\omega = \Phi(\zeta) \iff \zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, то

$$\omega_1 = i(I^m - \zeta_1)^{-1}(I^m + \zeta_1) \iff \zeta_1 = (\omega_1 + iI^m)^{-1}(\omega_1 - iI^m).$$

Следовательно

$$(I^m - \zeta_1) \cdot (\omega_1 + iI^m) = 2iI^m,$$

а отсюда легко следует (1.11).

1.3. В этом разделе мы вычисляем некоторые важные для дальнейшего интегралы. Положим

$$J_{mn}(\alpha, \gamma) = \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^\gamma} d\mu_{mn}(\omega), \quad 1 \leq m \leq n, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}; \quad (1.12)$$

$$H_{mn}(\alpha) = \int_{M_{mn}} \frac{d\mu_{mn}(\zeta)}{[\det(I^m + \zeta \zeta^*)]^\alpha}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.13)$$

$$I_{mn}(w; \alpha, \gamma) = \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha}{|\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2w_2 \omega_2^*)|^\gamma} d\mu_{mn}(\omega), \quad (1.14)$$

$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}.$

Лемма 1.3. а) $J_{mn}(\alpha, \gamma) < \infty$, если и только если

$$\alpha > -1, \quad \gamma - \alpha > n + 2m - 1. \quad (1.15)$$

б) $H_{mn}(\alpha) < \infty$, если и только если $\alpha > n + m - 1$.

$$\text{в) } I_{mn}(w; \alpha, \gamma) = \frac{J_{mm}(\alpha, \gamma) H_{m, n-m}(\gamma - \alpha - 2m)}{[\det(\operatorname{Im} w_1 - w_2 w_2^*)]^{\gamma - \alpha - m - n}}, \quad w = (w_1, w_2) \in \pi_{mn}. \quad (1.16)$$

г) При фиксированном $w \in \pi_{mn}$ неравенство $I_{mn}(w; \alpha, \gamma) < \infty$ справедливо только при условиях (1.15).

Доказательство. Прежде всего заметим, что в случае $m = n \geq 1$ утверждения а) и в) были установлены в [17] (предложения 2.3 и 2.4). В силу очевидного соотношения $J_{mn}(\alpha, \gamma) = I_{mn}(w; \alpha, \gamma)$ с $w = (iI^m, 0) \in \pi_{mn}$ утверждение а) непосредственно следует из утверждения г). Для доказательства б) нужно воспользоваться рекуррентным соотношением $H_{mn}(\alpha) = H_{m,n-1}(\alpha-1)H_{m1}(\alpha)$. И тогда остается провести индуктивное рассуждение и заметить, что $H_{m1}(\alpha) < \infty$, если и только если $\alpha > m$. Далее, при $w \in \pi_{mn}$ имеем

$$I_{mn}(w; \alpha, \gamma) = \int_{M_{m,n-m}} d\mu_{m,n-m}(\omega_2) \int_{\operatorname{Im} \omega_1 > \omega_2 \omega_2^*} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha}{|\det(\omega_1^* - \omega_1 + 2i\omega_2 \omega_2^*)|^\gamma} d\mu_{mm}(\omega_1).$$

После замены переменной $\tau = \omega_1 - i\omega_2 \omega_2^* \in \pi_{mm}$ во внутреннем интеграле мы получим

$$I_{mn}(w; \alpha, \gamma) = \int_{M_{m,n-m}} d\mu_{m,n-m}(\omega_2) \int_{\pi_{mm}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \tau)]^\alpha}{|\det(\tau^* - \eta)|^\gamma} d\mu_{mm}(\tau),$$

где $\eta = i\omega_2 \omega_2^* + \omega_1 - 2i\omega_2 \omega_2^* \in M_{mm}$. Можно проверить, что

$$\operatorname{Im} \eta = \operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* + (\omega_2 - \omega_2)(\omega_2^* - \omega_2^*) > 0,$$

и поэтому $\eta \in \pi_{mm}$. Так как формула (1.16) известна для $m = n \geq 1$ (как уже отмечено выше), мы получаем

$$\begin{aligned} I_{mn}(w; \alpha, \gamma) &= \int_{M_{m,n-m}} \frac{J_{mm}(\alpha, \gamma) d\mu_{m,n-m}(\omega_2)}{[\det(\operatorname{Im} \eta)]^{\gamma-\alpha-2m}} = \\ &= J_{mm}(\alpha, \gamma) \int_{M_{m,n-m}} \frac{d\mu_{m,n-m}(\omega_2)}{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* + \omega_2 \omega_2^*)]^{\gamma-\alpha-2m}}. \end{aligned}$$

Наконец, замена переменной

$$\omega_2 = \sqrt{\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*} \cdot \zeta, \quad \zeta \in M_{m,n-m}$$

в последнем интеграле дает нужную нам формулу (1.16). Далее, для фиксированного $w \in \pi_{mn}$, $I_{mn}(w; \alpha, \gamma) < \infty$, если и только если $J_{mm}(\alpha, \gamma) < \infty$ и $H_{m,n-m}(\gamma - \alpha - 2m) < \infty$. Следовательно, имеем $\alpha > -1$, $\gamma - \alpha > 3m - 1$ и $\gamma - \alpha - 2m > n - 1$, что совпадает с (1.15).

1.4. Введем основные пространства функций. Предполагая $0 < p < \infty$ и $-\infty < \alpha < \infty$, для произвольной измеримой функции $f(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$, положим

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\pi_{mn}} |f(\omega)|^p [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega) \right)^{1/p}$$

и определим $L_\alpha^p(\pi_{mn}) = \{f : \|f\|_{p,\alpha} < \infty\}$. Пусть $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ — подпространство голоморфных функций в $L_\alpha^p(\pi_{mn})$.

Лемма 1.4. Допустим, что $0 < p < \infty$ и $-\infty < \alpha < \infty$. Если $f \in H_\alpha^p(\pi_{mn})$, то

$$g(\zeta) \equiv \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{2(m+n+\alpha)/p}} \in H_\alpha^p(R_{mn}).$$

Если $g \in H_\alpha^p(R_{mn})$, то

$$f(\omega) \equiv \frac{g(\Phi^{-1}(\omega))}{[\det(\omega_1 + iI^m)]^{2(m+n+\alpha)/p}} \in H_\alpha^p(\pi_{mn}).$$

Лемма 1.4 является непосредственным следствием леммы 1.2. Как это следует из [9] (предложение 2.4), $H_\alpha^p(R_{mn}) = \{0\}$, если $0 < p < \infty$ и $\alpha \leq -1$. Следовательно, ввиду леммы 1.4 достаточно рассматривать пространство $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ только для $0 < p < \infty$ и $-1 < \alpha < \infty$.

Лемма 1.5. Допустим, что $1 \leq p < \infty$, $1 \leq m \leq n$ и $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$. Для функции $f(\omega) \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$ положим

$$F_\beta(\omega) \equiv \frac{f(\omega) [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\beta}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+\beta}}, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \pi_{mn}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Тогда $F_\beta(\omega) \in L^1(\pi_{mn})$, если $\beta > (p, \alpha)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Тогда $f \in L_\alpha^1(\pi_{mn})$, $\alpha > -1$ и $\beta \geq \alpha$. Следовательно, как это следует из леммы 1.1, мы имеем

$$\begin{aligned} |F_\beta(\omega)| &= \\ &= |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\beta-\alpha}}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{\beta-\alpha}} \frac{1}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{m+n+\alpha}} \leq \\ &\leq |f(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha \in L^1(\pi_{mn}). \end{aligned}$$

Что касается случая $1 < p < \infty$, то применение неравенства Гёльдера дает

$$\int_{\pi_{mn}} |F_\beta(\omega)| d\mu_{mn}(\omega) \leq J^{1/q} \|f\|_{p,\alpha}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

где

$$J = \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{q(\beta - \alpha/p)}}{|\det(\omega_1^* - iI^m)|^{q(m+n+\beta)}} d\mu_{mn}(\omega).$$

Согласно лемме 1.3а) $J < \infty$, если и только если

$$q\left(\beta - \frac{\alpha}{p}\right) > -1, \quad (1.17)$$

$$q(m+n+\beta) - q\left(\beta - \frac{\alpha}{p}\right) > n+2m-1. \quad (1.18)$$

Легко видеть, что условие (1.17) совпадает с условием $\beta > (p, \alpha)$, а (1.18) есть условие $\alpha > p(m-1) - (n+2m-1)$. Лемма 1.5 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Пусть $1 \leq m \leq n$ и $\operatorname{Re} \beta > -1$. Рассмотрим интегральный оператор

$$T_{mn}^\beta(f)(w) \equiv 2^{m(n-m+\beta)} c_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} \frac{f(\omega) [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\beta}{[\det(i(\omega_1^* - w_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\omega),$$

$$w \in \pi_{mn}. \quad (2.1)$$

Из леммы 1.2 (4°) следует несколько иная форма записи (2.1):

$$T_{mn}^\beta(f)(w) = \frac{4^{m(n+\beta)} c_{mn}(\beta)}{[\det(w_1 + iI^m)]^{m+n+\beta}} \int_{\pi_{mn}} G_{mn}^\beta(w, \omega; f) d\mu_{mn}(\omega), \quad (2.2)$$

где

$$G_{mn}^\beta(w, \omega; f) = \frac{f(\omega) [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\beta}{[\det(I^m - \Phi^{-1}(w) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta} [\det(\omega_1^* - iI^m)]^{m+n+\beta}},$$

$$w, \omega \in \pi_{mn}. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$ и $f \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$.

Если $K \subset \pi_{mn}$ компактно и

$$\begin{cases} \alpha \leq a_1 < a_2 < \infty, & \text{если } p = 1, \\ \frac{\alpha+1}{p} - 1 < a_1 < a_2 < \infty, & \text{если } 1 < p < \infty, \end{cases}$$

то существует функция $\Psi \in L^1(\pi_{mn})$ такая, что неравенство

$$|G_{mn}^\beta(w, \omega; f)| \leq \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn} \quad (2.4)$$

имеет место равномерно по $w \in K$ и $\beta \in \mathbb{C}$ с $|\operatorname{Im} \beta| \leq A < \infty$, $a_1 \leq \operatorname{Re} \beta \leq a_2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\eta(z, \zeta; \beta) = [\det(I^m - z\zeta^*)]^{m+n+\beta} = \exp[(m+n+\beta) \ln \det(I^m - z\zeta^*)], \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

где $z \in R_{mn}$, $\zeta \in \overline{R_{mn}}$ (замыкание R_{mn}). Как было установлено в [9] (предложение 2.2), если $z \in R_{mn}$ и $\zeta \in \overline{R_{mn}}$, то $\operatorname{Re} (I^m - z\zeta^*) > 0$. Поэтому $I^m - z\zeta^*$ принадлежит $\widetilde{M}_{mn}$, где функция $\ln \det$ определена и непрерывна (даже голоморфна). Поэтому функция (2.5) непрерывна по переменным z, ζ, β . Из этого следует неравенство

$$|\det(I^m - \Phi^{-1}(w)\Phi^{-1}(w)^*)|^{m+n+\beta} \geq \delta > 0$$

равномерно по $w \in K$, $\omega \in \pi_{mn}$ и $\beta \in \mathbb{C}$ с $|\operatorname{Im} \beta| \leq A$, $\alpha_1 \leq \operatorname{Re} \beta \leq \alpha_2$. Таким образом, при этих же условиях имеем

$$|G_{mn}^\beta(w, \omega; f)| \leq \frac{1}{\delta} \exp(\pi m |\operatorname{Im} \beta|) \frac{|f(\omega)| |\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)|^{\operatorname{Re} \beta}}{|\det(\omega_1^* - i I^m)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}}.$$

Последнее вместе с (1.2), (1.1) дает

$$|G_{mn}^\beta(w, \omega; f)| \leq \frac{1}{\delta} \exp(\pi m A) \frac{|f(\omega)| |\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)|^{\alpha_1}}{|\det(\omega_1^* - i I^m)|^{m+n+\alpha_1}} \equiv \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}.$$

Согласно лемме 1.5, $\Psi \in L^1(\pi_{mn})$, что и завершает доказательство.

Следствие 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$ и $f \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$. Тогда

а) при фиксированном $\beta \succ (p, \alpha)$ (см. (0.3)) $T_{mn}^\beta(f)(w)$ голоморфна в области $w \in \pi_{mn}$;

б) при фиксированном $w \in \pi_{mn}$ функция $T_{mn}^\beta(f)(w)$ голоморфна в области $\operatorname{Re} \beta > (\alpha+1)/p - 1$ (если $p > 1$) и $T_{mn}^\beta(f)(w)$ голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\operatorname{Re} \beta \geq \alpha$ (если $p = 1$).

2.2. Теорема 2.1. Пусть $1 \leq m \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > \max\{-1; p(m-1) - (n+2m-1)\}$ и $\beta \succ (p, \alpha)$. Тогда каждая функция $f \in H_\alpha^p(\pi_{mn})$ допускает интегральное представление

$$f(w) = T_{mn}^\beta(f)(w), \quad w \in \pi_{mn}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Из следствия 1б) и теоремы единственности для голоморфных функций следует, что достаточно установить (2.6) при дополнительном допущении $\beta \geq 0$. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \frac{f(\Phi(\zeta))}{[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n+\beta}}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in R_{mn}. \quad (2.7)$$

Затем положим $z = \Phi^{-1}(w) \in R_{mn}$ и выберем $\rho_0 \in (0, 1)$ так, чтобы $z \in \rho R_{mn} \equiv$

$\equiv \{\rho\zeta : \zeta \in R_{mn}\}$ для $\rho_0 \leq \rho < 1$. Как следствие теоремы 0.2а), мы имеем

$$g(z) = c_{mn}(\beta) \rho^{2m^2} \int_{\rho R_{mn}} \frac{g(\zeta) [\det(\rho^2 I^m - \zeta \zeta^*)]^\beta}{[\det(\rho^2 I^m - z \zeta^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\zeta), \quad \rho_0 \leq \rho < 1. \quad (2.8)$$

Подставим (2.7) в обе части (2.8) и произведем замену переменной $\zeta = \Phi^{-1}(\omega)$, $\omega \in \pi_{mn}$ в правой части (2.8). Принимая во внимание соотношения $z = \Phi^{-1}(\omega)$ и

$$[\det(I^m - \zeta_1)]^{m+n+\beta} = \frac{C}{[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta}}, \quad \zeta = \Phi^{-1}(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn},$$

где константа C не зависит от $\zeta \in R_{mn}$ и ω (см. (1.11)), получим

$$f(\omega) [\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} = c_{mn}(\beta) \rho^{2m^2} \int_{\pi_{mn}} F_\rho(\omega) d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega)), \quad \rho_0 \leq \rho < 1, \quad (2.9)$$

где

$$F_\rho(\omega) = f(\omega) [\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} \frac{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}} \chi_\rho(\omega), \quad (2.10)$$

и χ_ρ — характеристическая функция области $\pi_{mn}^\rho = \Phi(\rho R_{mn})$. Теперь мы намерены искать функцию $\Psi \in L^1(\pi_{mn}; d\mu_{mn}(\Phi^{-1}\omega))$ такую, что

$$|F_\rho(\omega)| \leq \Psi(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}, \quad \rho_0 \leq \rho < 1. \quad (2.11)$$

С этой целью заметим, что $z \in \rho R_{mn}$ и $\operatorname{Re}(\rho^2 I^m - z \zeta^*) > 0$ для $\rho_0 \leq \rho \leq 1$, $\zeta \in \overline{\rho R_{mn}}$ [9] (предложение 2.2). Следовательно, из соображений компактности имеем

$$|\det(\rho^2 I^m - z \zeta^*)| \geq \delta > 0$$

равномерно по $\rho_0 \leq \rho \leq 1$, $\zeta \in \overline{\rho R_{mn}}$. Отсюда

$$\left| \frac{\chi_\rho(\omega)}{[\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}} \right| \leq \delta^{-(m+n+\beta)} \quad (2.12)$$

равномерно по $\rho_0 \leq \rho < 1$, $\omega \in \pi_{mn}$. Далее, мы также имеем

$$\chi_\rho(\omega) [\det(\rho^2 I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta \leq [\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta, \quad \rho_0 \leq \rho < 1. \quad (2.13)$$

Неравенства (2.12), (2.13) вместе с (2.10) дают (2.11) с

$$\Psi(\omega) \equiv \operatorname{const} |f(\omega)| \cdot |\det(\omega_1 + iI^m)|^{m+n+\beta} [\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega) \Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta, \quad \omega \in \pi_{mn}.$$

Остается показать, что $\Psi \in L^1(\pi_{mn}; d\mu_{mn}(\Phi^{-1}\omega))$, а это очевидно ввиду (1.7), (1.9) и леммы 1.5. Итак, мы можем применить к (2.9) теорему Лебега об ограниченной сходимости. В результате получим

$$f(\omega)[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} = c_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} f(\omega)[\det(\omega_1 + iI^m)]^{m+n+\beta} \times \\ \times \frac{[\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^\beta}{[\det(I^m - \Phi^{-1}(\omega)\Phi^{-1}(\omega)^*)]^{m+n+\beta}} d\mu_{mn}(\Phi^{-1}(\omega)). \quad (2.14)$$

Используя (1.7) – (1.9), (2.14) может быть записано как (2.6), что и завершает доказательство.

2.3. Установим теперь соответствующую теорему проектирования.

Теорема 2.2. Пусть $1 \leq m \leq n$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha > p(m-1) - m$, и комплексное число β такое, что $\operatorname{Re} \beta > (\alpha + m)/p - 1$. Тогда оператор T_{mn}^β – ограниченный проектор из $L_\alpha^p(\pi_{mn})$ на $H_\alpha^p(\pi_{mn})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что предположения теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 2.1. Следовательно, ввиду следствия 1а), $T_{mn}^\beta(f)$ голоморфна в π_{mn} для любой функции $f \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$. Так что достаточно установить ограниченность интегрального оператора T_{mn}^β в пространстве $L_\alpha^p(\pi_{mn})$. С этой целью заметим, что

$$|T_{mn}^\beta(f)(\omega)| \leq A_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} \frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\operatorname{Re} \beta}}{|\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}} d\mu_{mn}(\omega), \quad (2.15)$$

$\omega \in \pi_{mn}$,

где

$$A_{mn}(\beta) = |2^{m(n-m+\beta)} c_{mn}(\beta)| \cdot \exp[\pi m |\operatorname{Im} \beta|].$$

Сначала положим $p = 1$. Тогда

$$\|T_{mn}^\beta(f)\|_{1,\alpha} = \int_{\pi_{mn}} |T_{mn}^\beta(f)(\omega)| \cdot [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega) \leq \\ \leq A_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega) \times \\ \times \int_{\pi_{mn}} \frac{|f(\omega)|[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\operatorname{Re} \beta}}{|\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}} d\mu_{mn}(\omega). \quad (2.16)$$

Перемена порядка интегрирования в (2.16) вместе с (1.14) дает

$$\|T_{mn}^\beta(f)\|_{1,\alpha} \leq$$

$$\leq A_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} |f(\omega)| [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\operatorname{Re} \beta} I_{mn}(\omega; \alpha, m+n+\operatorname{Re} \beta) d\mu_{mn}(\omega).$$

Ввиду леммы 1.3в) отсюда следует, что

$$\|T_{mn}^\beta(f)\|_{1,\alpha} \leq A_{mn}(\beta) J_{mn}(\alpha, m+n+\operatorname{Re} \beta) H_{m,n-m}(\operatorname{Re} \beta - \alpha + n - m) \|f\|_{1,\alpha}.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$J_{mn}(\alpha, m+n+\operatorname{Re} \beta) < \infty, \quad H_{m,n-m}(\operatorname{Re} \beta - \alpha + n - m) < \infty.$$

Для этого, ввиду леммы 1.3, необходимо выполнение следующих неравенств:

$$\alpha > -1, \quad m+n+\operatorname{Re} \beta - \alpha > 3m-1, \quad \operatorname{Re} \beta - \alpha + n - m > n-1,$$

которые могут быть записаны как

$$\alpha > -1, \quad \operatorname{Re} \beta > \alpha + m - 1. \quad (2.17)$$

Остается заметить, что (2.17) совпадает с допущением теоремы (когда $p=1$).

Теперь рассмотрим случай $1 < p < \infty$ и выберем $q \in (1, \infty)$ так, что $1/p + 1/q = 1$. Затем положим

$$\begin{aligned} d\nu(\omega) &= [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}, \\ Q(\omega, \omega) &= \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\operatorname{Re} \beta - \alpha}}{|\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}}, \quad \omega, \omega \in \pi_{mn}. \end{aligned}$$

Из (2.15) для любой $f \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$ мы имеем

$$|T_{mn}^\beta(f)(\omega)| \leq A_{mn}(\beta) \int_{\pi_{mn}} |f(\omega)| Q(\omega, \omega) d\nu(\omega), \quad \omega \in \pi_{mn}$$

для любой функции $f \in L_\alpha^p(\pi_{mn})$. Мы намерены доказать ограниченность оператора T_{mn}^β в пространстве $L_\alpha^p(\pi_{mn})$ при помощи леммы Форелли–Рудина (см. [7]). С этой целью мы найдем измеримую функцию $g(\omega) > 0$, $\omega \in \pi_{mn}$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{mn}} Q(\omega, \omega) [g(\omega)]^q d\nu(\omega) &\leq \operatorname{const} [g(\omega)]^q, \quad \omega \in \pi_{mn}, \\ \int_{\pi_{mn}} Q(\omega, \omega) [g(\omega)]^p d\nu(\omega) &\leq \operatorname{const} [g(\omega)]^p, \quad \omega \in \pi_{mn}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для этого положим

$$g(\omega) = [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{-\left(\frac{m-1}{q} + \delta\right)}, \quad \omega \in \pi_{mn},$$

где $\delta > 0$ произвольно. Для такой функции $g(\omega)$ неравенства (2.18) принимают такой вид :

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\operatorname{Re} \beta - (m-1+q\delta)}}{|\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}} d\mu_{mn}(\omega) &\leq \\ &\leq \frac{\operatorname{const}}{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{m-1+q\delta}}, \quad \omega \in \pi_{mn}, \\ \int_{\pi_{mn}} \frac{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{\alpha - p(\frac{m-1}{q} + \delta)}}{|\det(i(\omega_1^* - \omega_1) - 2\omega_2 \omega_2^*)|^{m+n+\operatorname{Re} \beta}} d\mu_{mn}(\omega) &\leq \\ &\leq \frac{\operatorname{const}}{[\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^{p(\frac{m-1}{q} + \delta) + \operatorname{Re} \beta - \alpha}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из леммы 1.3 следует, что неравенства (2.19) имеют место, если только

$$\operatorname{Re} \beta - (m-1+q\delta) > -1, \quad m+n+\operatorname{Re} \beta - \operatorname{Re} \beta + (m-1+q\delta) > n+2m-1,$$

$$\alpha - p\left(\frac{m-1}{q} + \delta\right) > -1, \quad m+n+\operatorname{Re} \beta - \alpha + p\left(\frac{m-1}{q} + \delta\right) > n+2m-1.$$

После упрощений эта группа условий может записана следующим образом :

$$\frac{\operatorname{Re} \beta - m + 2}{q} > \delta, \quad \frac{\alpha + 1}{p} - \frac{m-1}{q} > \delta, \quad \frac{\operatorname{Re} \beta - \alpha - m + 1}{p} + \frac{m-1}{q} + \delta > 0.$$

Остается выбрать подходящее $\delta > 0$, удовлетворяющее последним условиям.

Такой выбор возможен, если только

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \beta > m-2, \quad \frac{\operatorname{Re} \beta - m + 2}{q} + \frac{\operatorname{Re} \beta - \alpha - m + 1}{p} + \frac{m-1}{q} &> 0, \\ \frac{\alpha + 1}{p} > \frac{m-1}{q}, \quad \frac{\alpha + 1}{p} - \frac{m-1}{q} + \frac{\operatorname{Re} \beta - \alpha - m + 1}{p} + \frac{m-1}{q} &> 0, \end{aligned}$$

или, что эквивалентно

$$\operatorname{Re} \beta > m-2, \quad \alpha > p(m-1) - m, \quad \operatorname{Re} \beta > \frac{\alpha + m}{p} - 1. \quad (2.20)$$

Достаточно заметить, что (2.20) обеспечено условиями теоремы. Доказательство завершено.

Замечание 2.1. По сравнению с теоремой 2.1 в теореме 2.2 условия на параметры α, β более сильные.

ABSTRACT. Let M_{mn} be the space of all complex $m \times n$ matrices. Let μ_{mn} be Lebesgue measure in the space $M_{mn} \cong \mathbb{C}^{mn}$. For $1 \leq m \leq n$ each matrix $\omega \in M_{mn}$ can be written as $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, where $\omega_1 \in M_{mm}$, $\omega_2 \in M_{m, n-m}$. The

paper considers matrix Siegel domains $\pi_{mn} = \{(\omega_1, \omega_2) \in M_{mn} : \operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^* \text{ is positive definite}\}$, where ω^* is Hermitian conjugate of ω and the classes $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ of those functions holomorphic in π_{mn} , which belong to $L^p\{\pi_{mn}; [\det(\operatorname{Im} \omega_1 - \omega_2 \omega_2^*)]^\alpha d\mu_{mn}(\omega)\}$. Weighted integral representations for classes $H_\alpha^p(\pi_{mn})$ are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О представимости некоторых классов функций, мероморфных в единичном круге", ДАН АрмССР, т. 3, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Мат. и Мех. АН АрмССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
3. М. М. Джрбашян, "Обзор некоторых достижений армянских математиков в теории интегральных представлений и факторизации аналитических функций", Мат. Вестник, т. 39, стр. 263 – 282, 1987.
4. М. М. Джрбашян, "Краткий обзор результатов, полученных армянскими математиками в области теории факторизации мероморфных функций и ее приложений", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 23, № 6, стр. 517 – 545, 1988.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyn, Topics in Theory of A_α^p Spaces, Teubner-Texte zur Math, b. 105, Leipzig, 1988.
6. Л. К. Хуа, Гармонический анализ функций нескольких комплексных переменных в классических областях, Иностран. Литер., М., 1959
7. F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions in balls", Ind. Univ. Math. J., vol. 24, pp. 593 – 602, 1974.
8. M. Stoll, "Mean value theorems for harmonic and holomorphic functions on bounded symmetric domains", J. Reine Angew. Math., vol. 290, pp. 191 – 198, 1977.
9. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления в обобщенном единичном круге", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 24, № 6, стр. 1 – 25, 1989.
10. A. H. Karapetyan, "Bounded projections in weighted functions spaces in a generalized unit disk", Ann. Polon. Math., vol. 62, № 3, pp. 193 – 218, 1995.
11. С. Г. Гиндякин, "Анализ в однородных областях", Успехи Мат. Наук (УМН), т. 19, № 4, стр. 3 – 92, 1964.
12. R. R. Coifman, R. Rochberg, "Representations theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p ", Astérisque, vol. 77, pp. 11 – 66, 1980.
13. М. М. Джрбашян, А. Э. Джрбашян, "Интегральные представления для некоторых классов функций, аналитических в полуплоскости", ДАН СССР, т. 285, № 3, стр. 547 – 550, 1985.
14. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области Зигеля", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 22, № 4, стр. 86 – 93, 1987.
15. М. М. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations for some classes of functions holomorphic in a Siegel domain", J. Math. Anal. Appl, vol. 179, № 1, pp. 91 – 109, 1993.
16. М. М. Djrbashian, A. H. Karapetyan, "Integral representations for some weighted classes of functions holomorphic in matrix domains", Ann. Polon. Math., vol. 55, pp. 87 – 94, 1991.
17. М. М. Джрбашян, А. О. Карапетян, "Интегральные представления в обобщенной верхней полуплоскости", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 6, стр. 1 – 28, 1990.