Посвящается 60–летию
А. Б. Нерсесяна

ЯВНАЯ ОБОБЩЕННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Г. Камалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В работе представлены некоторые явные формулы обобщенной факторизации Винера–Хопфа относительно замкнутого контура ограниченных голоморфных матриц–функций. Приводятся формулы для частных индексов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Явная факторизация Винера–Хопфа имеет ряд применений в теории систем сингулярных интегральных уравнений, уравнений Винера–Хопфа и в теории нелинейных уравнений математической физики (см., например, [1 – 4]). Под факторизацией Винера–Хопфа матрицы–функции $\mathbf{W}$, определенной на замкнутом контуре γ, который разделяет замкнутую комплексную плоскость на части $\mathcal{D}_+$ ($\ni 0$) и $\mathcal{D}_-$ ($\ni \infty$), понимают представление $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_-(t)\Lambda(t)\mathbf{W}_+(t)$ ($t \in \gamma$), где $\mathbf{W}_\pm$ – граничные значения голоморфных и неособых в $\mathcal{D}_\pm$ матриц–функций, а $\Lambda(t) = \mathrm{diag}[t^{\varkappa_1}, \cdots, t^{\varkappa_n}]$. При достаточно общих условиях целые числа $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_n$ однозначно определяются (с точностью до порядка) матрицей–функцией $\mathbf{W}$ и называются частными индексами $\mathbf{W}$.

В данной работе найдены явные формулы для обобщенной факторизации Винера–Хопфа (включая формулы для частных индексов) в случае когда $\mathbf{W}(t)$ – ограниченная, измеримая матрица–функция на γ, допускающая голоморфное продолжение в $\mathcal{D}_+$ или в $\mathcal{D}_-$. Матрица–функция такого типа не всегда допускает

обобщенную факторизацию Винера–Хопфа. Необходимые и достаточные условия существования факторизации хорошо известны (см. [5]). Алгоритм, состоящий из конечного числа шагов, также известен ([5]). Ниже получены формулы в терминах рангов конечного числа блочных ганкелевых матриц. Компоненты этих матриц состоят из конечного числа степенных моментов матрицы–функции $W^{-1}(t)$. Ранее результаты подобного характера получены для полиномиальных матриц [6] и для непрерывных обратимых матриц–функций, допускающих мероморфное продолжение в $\mathcal{D}_+$ ([7]). Мы изучаем также задачу обобщенной обратимости произведения двух обобщенно–обратимых операторов. Найдены необходимые и достаточные условия существования и явная формула для вычисления обобщенного обратного упомянутого произведения.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Фредгольмовость и обобщенная обратимость. Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства. Всюду ниже через $\mathcal{L}$ (X, Y) будем обозначать пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из X в Y, наделенное обычной операторной нормой. Мы записываем $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$. Тождественный на X оператор обозначается через I_X или просто через I.

Будем говорить, что $A \in \mathcal{L}$ (X, Y) – оператор *Фредгольма*, если его образ замкнут, а размерности ядра и коядра конечномерны. Индекс $\mathrm{Ind}A$ оператора Фредгольма есть разность размерностей ядра и коядра. Говорят, что оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ имеет обобщенный обратный $A^{(-1)}$, как только $A = AA^{(-1)}A$. Если дополнительно $A^{(-1)} = A^{(-1)}AA^{(-1)}$, то будем говорить, что $A^{(-1)}$ – обобщенный обратный к A в сильном смысле.

Наконец, мы обозначаем через X^n ($n \in \mathbb{N}$) линейное пространство n–векторов с компонентами из линейного пространства X и через $X^{n\times n}$ – линейное пространство квадратных матриц размерности n с элементами из X.

2.2. Матричное сцепление. Пусть $A \in \mathcal{L}$ (X_1, Y_1) и $B \in \mathcal{L}$ (X_2, Y_2). Мы говорим, что A и B *матрично сцеплены*, если существует обратный матричный

оператор

$$\Phi = \begin{bmatrix} A & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ X_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} Y_1 \\ \oplus \\ Y_2 \end{matrix},$$

обратный к которому имеет вид

$$\Psi : \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B \end{bmatrix} : \begin{matrix} Y_1 \\ \oplus \\ Y_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ X_2 \end{matrix}.$$

Равенство $\Phi^{-1} = \Psi$ называют *соотношением сцепления* операторов A и B. Как только известны компоненты входящих в соотношение сцепления, то обратный, обобщенный обратный, ядро, образ и т.д. оператора A с помощью явных формул могут быть выражены в терминах соответствующих величин оператора B (см. [8]). В частности

$$KerA = B_{12}(KerB). \tag{2.1}$$

Далее, A имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда B имеет обобщенный обратный. Если $B^{(-1)}$ – обобщенный обратный к B, то

$$A^{(-1)} = B_{11} - B_{12}B^{(-1)}B_{21} \tag{2.2}$$

является обобщенным обратным к A. Кроме того, A фредгольмов тогда и только тогда, когда B фредгольмов, и в этом случае

$$dimKerA = dimKerB, \quad IndA = IndB. \tag{2.3}$$

2.3. Факторизация. Пусть $\mathcal{D}_+$ $(\ni 0)$ – область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, полученная из ограниченной односвязной области $\mathcal{D}_0$ удалением попарно непересекающихся односвязных областей $\mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_0$ $(j = 1, \ldots, N)$ и $\mathcal{D}_- = \overline{\mathbf{C}} \backslash \overline{\mathcal{D}}_+$. Предполагается, что границы γ_j $(j = 0, \ldots, N)$ областей $\mathcal{D}_j$ являются карлесоновыми кривыми. Мы допускаем, что контур $\gamma = \bigcup_{j=0}^{N} \gamma_j$ ориентирован в положительном направлении. Тогда сингулярный оператор Коши

$$S(\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_\gamma \frac{1}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau$$

является ограниченным в пространствах $L_p = L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$ (см. [9]). Рассмотрим проекторы $P_\pm = (I \pm S)/2$ и функциональные классы $L_p^+ = P_+ L_p$, $\mathring{L}_p^- = P_- L_p$, $L_p^- = \mathring{L}_p^- \oplus \{1\}$. Проекторы $\mathcal{P}_\pm \in \mathcal{L}(L_p^n)$ определим равенствами

$$\mathcal{P}_\pm [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^T = [P_\pm \varphi_1, \ldots, P_\pm \varphi_n]^T.$$

Для матрицы–функции V, определенной на γ, оператор умножения $f \mapsto Vf$ ($f \in L_p^n$) обычно обозначается через VI и пользуются записью VIB = VB. Ясно, что VI $\in \mathcal{L}(L_p^n)$ для каждого $V \in L_\infty^{n\times n}$. Запись W $\in GL_\infty^{n\times n}$ означает, что $\mathrm{W}^{\pm 1} \in L_\infty^{n\times n}$. Обобщенная факторизация Винера–Хопфа (GWH–факторизация) матрицы–функции W $\in GL_\infty^{n\times n}$ относительно контура γ в пространстве L_p^n есть представление

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_-\Lambda\mathrm{W}_+$$

где факторы удовлетворяют условиям

1) $\mathrm{W}_+ \in (L_q^+)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_+^{-1} \in (L_p^+)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_- \in (L_p^-)^{n\times n}$, $\mathrm{W}_-^{-1} \in (L_q^-)^{n\times n}$ $(q = p/(p-1))$,

2) $\Lambda = diag\,[t^{\varkappa_1}, \cdots, t^{\varkappa_n}]$, $\varkappa_1 \le \cdots \le \varkappa_n$ – целые числа, называемые частными индексами W,

3) $\mathrm{W}_-\mathcal{P}_+\mathrm{W}_-^{-1}I \in \mathcal{L}(L_p^n)$.

Число $\varkappa = \varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n$ называтся суммарным индексом W.

2.4. Факторизация и сингулярные операторы. Хорошо известно, что если $T(\mathrm{W}) = \mathrm{W}\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-(\tilde{T}(\mathrm{W}) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}I + \mathcal{P}_-)$ – фредгольмов оператор в L_p^n, то матрица–функция W $\in L_\infty^{n\times n}$ допускает факторизацию в $L_p^n(1 < p < \infty)$ (см. [10],[1],[5]). При этих условиях

$$dimKerT(\mathrm{W}) = dimKer\tilde{T}(\mathrm{W}) = -\sum_{\varkappa_i \le 0} \varkappa_i, \quad IndT(\mathrm{W}) = Ind\tilde{T}(\mathrm{W}) = \varkappa. \qquad (2.4)$$

Положим $\mathrm{W}_j = t^{-j}\mathrm{W}(j \in \mathbb{Z})$. Если W допускает GWH–факторизацию, то пространства $KerT(\mathrm{W}_j)$ и $Ker\tilde{T}(\mathrm{W}_j)$ совпадают с множеством вектор–функций $\mathrm{W}_+^{-1}q - \mathrm{W}_-\Lambda q$ и $\mathrm{W}_+^{-1}q$, соответственно, где $q = [q_1, \cdots, q_n]^T$, а q_i – полином степени не более чем $j - \varkappa_i - 1$ и равный нулю при $\varkappa_i \ge j$ (см. [12]).

Допустим, что частные индексы матрицы–функции W принимают значения $\eta_1 < \cdots < \eta_s$ и $\mu(\eta_j) = n_j$, где

$$\mu(j) = card\,\{i|\quad \varkappa_i = j, \quad i = 1, \cdots, n\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем пользоваться следующими двумя предложениями, показывающими, что GWH–факторизация W может быть получена только лишь на основе пространств $\Omega_j = \mathcal{P}_+\,(KerT(\mathrm{W}_j)) = Ker\tilde{T}(\mathrm{W}_j)$.

Предложение 2.1. *Пусть матрица-функция $W \in GL_\infty^{n\times n}$ допускает GWH-факторизацию в L_p^n и $\eta_-, \eta_+ \in \mathbb{Z}$ – произвольные целые числа, удовлетворяющие условиям : $\eta_- \leq \eta_1$, $\eta_+ \geq \eta_s$, $\eta_- < \eta_+$. Тогда для частных индексов $æ_1 \leq \cdots \leq æ_n$ матрицы-функции W имеют место следующие равенства*

$$æ_i = \eta_- + card\{j \mid \alpha_j - \alpha_{j-1} < i, \quad j = \eta_- + 1, \cdots, \eta_+\}, \quad i = 1, \cdots n, \quad (2.5)$$

где $\alpha_j = dim\,\Omega_j$.

Доказательство. Из первого равенства (2.4) следует, что

$$\alpha_j = \sum_{m\leq j}(j-m)\mu(m), \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \sum_{m\leq j}\mu(m), \qquad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Положим $n_0 = 0$. Для $n_0 + n_1 + \cdots + n_{l-1} < i \leq n_0 + n_1 + \cdots n_l$ имеем

$$card\{j \mid \sum_{m\leq j}\mu(m) < i, \quad j = \eta_-, \cdots, \eta_+ - 1\} = \eta_l - \eta_- = æ_i - \eta_-.$$

Отсюда, используя (2.6), мы получим (2.5). Предложение 2.1 доказано.

Предложение 2.2. *Пусть матрица-функция $W \in L_\infty^{n\times n}$ допускает GWH-факторизацию. Тогда пространства $\Omega_j (j \in \mathbb{Z})$ имеют следующие свойства :*

1. $\Omega_j = \{0\}, \quad j \leq \eta_1$.
2. $\Omega_{j+1} = \Omega_j + t\Omega_j, \quad j \in \mathbb{Z}\setminus\{\eta_1, \cdots, \eta_s\}$.

3. Пространства $\Omega_{\eta_m} + t\Omega_{\eta_m}$ имеют прямое дополнение Ξ_m в пространстве Ω_{η_m+1}, $dim\Xi_m = n_m$ $(m = 1, \cdots, s)$.

4. Для произвольного базиса $h_{m,1}, \cdots, h_{m,n_m}$ пространства Ξ_m $(m = 1. \cdots, s)$ и матриц-функций

$$U = [h_{11}, \cdots, h_{1,n_1}, h_{2,1}, \cdots, h_{s,n_s}], \quad \Lambda = diag\,[t^{æ_1}, \cdots, t^{æ_n}],$$

$$W_+ = U^{-1},\ W_- = WU\Lambda^{-1}$$

представление $W = W_-\Lambda W_+$ есть GWH-факторизацией матрицы-функции W.

Это утверждение доказано в [11].

2.5. Факторизация голоморфной матрицы–функции. Обозначим через $\mathcal{R}$ линеал рациональных функций с полюсами вне γ, а через $\mathcal{M}_\infty^\pm$ – класс функций $L_\infty^\pm + \mathcal{R}$.

Известно (см. теорему 3.15 [5]), что функция $\mathrm{W} \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ $((L_\infty^-)^{n\times n})$ допускает GWH–факторизацию в $L_p^n(1 < p < \infty)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{W}^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ $((\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n})$. При этих условиях суммарный индекс æ матрицы–функции W равен $ind_+ det\mathrm{W}(ind_detW)$, где $ind_+ det\mathrm{W}(-ind_det\mathrm{W})$ – число нулей (с учетом кратностей) голоморфного продолжения функции $det\mathrm{W}$ из контура γ в $\mathcal{D}_+(\mathcal{D}_-)$. Условие $(det\mathrm{W})^{-1} \in \mathcal{M}_\infty^+(\mathcal{M}_\infty^-)$ гарантирует конечность $ind_+ det\mathrm{W}(ind_det\mathrm{W})$.

§3. ОБОБЩЕННЫЙ ОБРАТНЫЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ

3.1. Матричное соотношение. Пусть $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$ – комплексные банаховы пространства, $A_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}), A_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}_2)$, и пусть $A_i^{(-1)}(i = 1,2)$ – обобщенные обратные к A_i в сильном смысле. Мы имеем

$$\mathrm{X}_1 = KerA_1 \oplus ImA_1^{(-1)}, \quad \mathrm{X}_2 = KerA_2^{(-1)} \oplus ImA_2,$$

$$\mathrm{Y} = KerA_1^{(-1)} \oplus ImA_1 = KerA_2 \oplus ImA_2^{(-1)}.$$

Рассмотрим следующие операторы :

$$\pi_{1,i} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerA_i \to \begin{matrix} KerA_i \\ \oplus \\ ImA_i^{(-1)} \end{matrix}, \qquad \sigma_{1,i} = [I, 0] : \begin{matrix} KerA_i \\ \oplus \\ ImA_i^{(-1)} \end{matrix} \to KerA_i,$$

$$\pi_{2,i} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerA_i^{(-1)} \to \begin{matrix} KerA_i^{(-1)} \\ \oplus \\ ImA_i \end{matrix}, \qquad \sigma_{2,i} = [I, 0] : \begin{matrix} KerA_i^{(-1)} \\ \oplus \\ ImA_i \end{matrix} \to KerA_i^{(-1)},$$

где $i = 1, 2$. Легко проверить следующие тождества (i=1,2) :

$$A_1 A_1^{(-1)} = I_Y - \pi_{21}\sigma_{21}, \quad A_1^{(-1)} A_1 = I_{X_1} - \pi_{11}\sigma_{11},$$

$$A_2 A_2^{(-1)} = I_{X_2} - \pi_{22}\sigma_{22}, \quad A_2^{(-1)} A_2 = I_Y - \pi_{12}\sigma_{12}, \tag{3.1}$$

$$A_i \pi_{1i} = A_i^{(-1)} \pi_{2i} = \sigma_{2i} A_i = \sigma_{1i} A_i^{(-1)} = 0, \quad \sigma_{1i}\pi_{1i} = I_{KerA_i}, \quad \sigma_{2i}\pi_{2i} = I_{KerA_i^{(-1)}}. \tag{3.2}$$

Предложение 3.1. *Пусть* $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y), A_2 \in \mathcal{L}(Y, X_2)$ *и* $A_i^{(-1)} (i = 1, 2)$ – *обобщенные обратные к* A_i *в сильном смысле. Тогда* $A_2 A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *и*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_{21}\pi_{12} \end{pmatrix} : \begin{matrix} KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix}$$

матрично сцеплены соотношением $\Phi^{-1} = \Psi$, *где*

$$\Phi = \begin{pmatrix} A_2 A_1 & \pi_{22} & A_2\pi_{21} \\ -\sigma_{11} & 0 & 0 \\ -\sigma_{12}A_1 & 0 & -\sigma_{12}\pi_{21} \end{pmatrix} : \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} X_2 \\ \oplus \\ KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_1^{(-1)}A_2^{(-1)} & -\pi_{11} & -A_1^{(-1)}\pi_{12} \\ \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \sigma_{21}A_2^{(-1)} & 0 & -\sigma_{21}\pi_{12} \end{pmatrix} : \begin{matrix} X_2 \\ \oplus \\ KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix} \to \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix}.$$

Доказательство совершается путем непосредственной проверки (используя формулы (3.1), (3.2)).

Ясно, что оператор B имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда оператор $\sigma_{12}\pi_{12} : KerA_2 \to KerA_1^{(-1)}$ имеет обобщенный обратный. Если $(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)}$ является обобщенным обратным к $\sigma_{21}\pi_{12}$, то

$$B^{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)} \end{pmatrix} : \begin{matrix} KerA_2^{(-1)} \\ \oplus \\ KerA_1^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} KerA_1 \\ \oplus \\ KerA_2 \end{matrix}$$

является обобщенным обратным к B. В силу теоремы 2.1 гл.4 [1] оператор $\sigma_{21}\pi_{12}$ нормально разрешим тогда и только тогда, когда линеал $KerA_2 + ImA_1$ замкнут в Y. Поскольку $KerA_2 + ImA_1 = \sigma_{21}(KerA_2) \oplus ImA_1$, то подпространства $KerA_2 + ImA_1$ и $\sigma_{21}(KerA_2)$ одновременно дополняемы, соответственно, в пространствах Y и $KerA_1^{(-1)}$. Нормально разрешимый оператор обобщенно обратим тогда и только тогда, когда его ядро и образ дополняемы (см. теорему 5.1 гл.4 [1]). Таким образом, пользуясь (2.2) и (3.2), мы приходим к следующей теореме :

Теорема 3.1. *Пусть* $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y), A_2 \in \mathcal{L}(Y, X_2)$ *и* $A_i^{(-1)} (i = 1, 2)$ *является обобщенным обратным к* A_i *в сильном смысле. Тогда* $A_2 A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ *имеет обобщенный обратный тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия :*

1) Линеал $KerA_2 + ImA_1$ замкнут и дополняем в Y.

2) Подпространство $KerA_2 \cap ImA_1$ дополняемо в $KerA_2$.

Если эти условия выполнены, то обобщенный обратный $(A_2A_2)^{(-1)}$ может быть вычислен по формуле

$$(A_2A_1)^{(-1)} = A_1^{(-1)}A_2^{(-1)} - A_1^{(-1)}\pi_{12}(\sigma_{21}\pi_{12})^{(-1)}\sigma_{21}A_2^{(-1)}.$$

Оператор A_2A_1 фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия :

$$dimKerA_1 < \infty, \quad dimcokerA_2 < \infty,$$

$$dim(KerA_2 \cap ImA_1) < \infty, \quad dimY/(KerA_2 + ImA_1) < \infty.$$

Если выполнены последние условия, то

$$dimKer(A_2A_1) = dimKerA_1 + dim(KerA_2 \cap ImA_1),$$

$$dimcoker(A_2A_1) = dimcokerA_2 + dimY/(KerA_2 + ImA_1).$$

Заметим, что в специальном случае $X_1 = Y = X_2$ вторая часть теоремы есть простое следствие теоремы 1.12 из [5].

3.2 Пример 1. Допустим, что $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть I_n – тождественный оператор в $\mathbf{C}^n$ и $H(W^{-1}) \in \mathcal{L}(L_\infty^n)$ – ганкелев оператор : $H(W^{-1}) = \mathcal{P}_-W^{-1}\mathcal{P}_+$. Оператор $T(W)^{(-1)} = T(W^{-1}) - H(W^{-1})$ является левым обратным к оператору $T(W)$ и $KerT(W) = \{0\}$. Из равенства $I - T(W)T(W)^{(-1)} = WH(W^{-1})$ следует, что оператор $WH(W^{-1})$ есть проектор на $KerT(W)^{(-1)}$ вдоль $ImT(W)$ и $KerT(W)^{(-1)} = WH(W^{-1})(L_p^n)$.
Пусть $\mathcal{L}_j (j \in \mathbf{N})$ – линейное пространство всех n–вектор–полиномов степени не более чем $j-1$:
$\mathcal{L}_j = \left\{ f = \sum_{m=0}^{j-1} y_k t^k | y_k \in \mathbf{C}^n \right\}$. Для $j \in \mathbf{N}$ оператор $T(t^jI_n)$ является правым обратным к $T(t^{-j}I_n)$. Очевидно, что $KerT(t^{-j}I_n) = (1 - t^{-j})\mathcal{L}_j$ и $KerT(t^jI_n) = \{0\} (j \in \mathbf{N})$.

Рассмотрим операторы

$$\pi_1(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerT(t^{-j}I_n) \to \begin{matrix} KerT(t^{-j}I_n) \\ \oplus \\ ImT(t^jI_n) \end{matrix},$$

$$\pi_2(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \to \begin{matrix} KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \\ \oplus \\ ImT(\mathrm{W}) \end{matrix},$$

$$\sigma_1(j) = [I, 0] : \begin{matrix} KerT(t^{-j}I_n) \\ \oplus \\ ImT(t^j I_n) \end{matrix} \to KerT(t^{-j}I_n),$$

$$\sigma_2(j) = [I, 0] : \begin{matrix} KerT(\mathrm{W})^{(-1)} \\ \oplus \\ ImT(\mathrm{W}) \end{matrix} \to KerT(\mathrm{W})^{(-1)}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Из определения операторов $\sigma_2(j); \pi_1(j)$ следует, что произведение $\sigma_2(j)\pi_1(j)$ совпадает с оператором

$$F_j = \mathrm{W}H(\mathrm{W}^{-1})\Big|_{KerT(t^{-j}I_n)} : KerT(t^{-j}I_n) \to KerT(\mathrm{W})^{(-1)}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

В силу предложения 3.1 и $T(\mathrm{W}_j) = t(T^{-j}I_n)T(\mathrm{W})$ $(j \in \mathbb{Z})$ мы имеем следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Если $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию, то операторы $T(W_j)$ и $-F_j (j \in \mathbb{N})$ матрично сцеплены соотношением $\Phi_j = \Psi_j^{-1}$, где*

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} T(W_j) & T(t^{-j}I_n)\pi_2(j) \\ -\sigma_1(j)T(W) & -\sigma_1(j)\pi_2(j) \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ KerT(W)^{(-1)} \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ KerT(t^{-j}I_n) \end{matrix}$$

и

$$\Psi_j = \begin{pmatrix} T(W)^{(-1)}T(t^j I_n) & -T(W)^{(-1)}\pi_1(j) \\ \sigma_2(j)T(t^j I_n) & -F_j \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ KerT(t^{-j}I_n) \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ KerT(W)^{(-1)} \end{matrix}.$$

3.3. Пример 2. Предположим, что матрица–функция $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$ является ганкелевым оператором : $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_-$. Оператор $\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)} = \tilde{T}(\mathrm{W}^{-1}) - \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$ есть правый обратный к оператору $\tilde{T}(\mathrm{W})$ и $I - \tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)}\tilde{T}(\mathrm{W}) = \tilde{H}(\mathrm{W}^{(-1)})\mathrm{W}I$. Следовательно $Ker\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)} = \{0\}$ и оператор $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\mathrm{W}I$ является проектором на $Ker\tilde{T}(\mathrm{W})$ вдоль $Im\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)}$. В частности, $Ker\tilde{T}(\mathrm{W}) = Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Для $j \in \mathbb{N}$ мы имеем $Ker\tilde{T}(t^{-j}I_n) = \mathcal{L}_j$ и $Ker\tilde{T}(t^j I) = \{0\}$.

Рассмотрим операторы

$$\tilde{\pi}_1(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \to \begin{matrix} Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(\mathrm{W}^{-1}) \end{matrix}, \qquad \tilde{\pi}_2(j) = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} : \mathcal{L}_{-j} \to \begin{matrix} \mathcal{L}_{-j} \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(t^{-j}I_n) \end{matrix},$$

$$\tilde{\sigma}_1(j) = [I,0] : \begin{matrix} Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(\mathrm{W})^{(-1)} \end{matrix} \to Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}),$$

$$\tilde{\sigma}_2(j) = [I,0] : \begin{matrix} \mathcal{L}_{-j} \\ \oplus \\ Im\tilde{T}(t^{-j}I_n) \end{matrix} \to \mathcal{L}_{-j},$$

$$\tilde{F}_j = \tilde{\sigma}_2(j)\tilde{\pi}_1(j) = \tilde{\sigma}_2(j)\Big|_{Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})} : Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \to \mathcal{L}_{-j}, \quad j \in -\mathbf{N}. \tag{3.3}$$

Следующее предложение является следствием равенств $\tilde{T}(\mathrm{W}_j) = \tilde{T}(\mathrm{W})\tilde{T}(t^{-j}I_n)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и предложения 3.1.

Предложение 3.3. *Если $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию, то операторы $\tilde{T}(W_j)$ и $-\tilde{F}_j (j \in -\mathbf{N})$ матрично сцеплены соотношением $\tilde{\Phi}_j = \tilde{\Psi}_j^{-1}$,*

где

$$\tilde{\Phi}_j = \begin{pmatrix} \tilde{T}(W_j) & \tilde{T}(W)\tilde{\pi}_2(j) \\ -\tilde{\sigma}_1(j)\tilde{T}(t^{-j}I_n) & -\tilde{\sigma}_1(j)\tilde{\pi}_2(j) \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ L_{-j} \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ Im\tilde{H}(W^{-1}) \end{matrix}$$

и

$$\tilde{\Psi}_j = \begin{pmatrix} \tilde{T}(t^jI_n)\tilde{T}(W)^{(-1)} & -\tilde{T}(t^jI_n)\tilde{\pi}_1(j) \\ \tilde{\sigma}_2(j)\tilde{T}(W)^{(-1)} & -\tilde{F}_j \end{pmatrix} : \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ Im\tilde{H}(W^{-1}) \end{matrix} \to \begin{matrix} L_p^n \\ \oplus \\ \mathcal{L}_{-j} \end{matrix}, \quad j \in -\mathbf{N}.$$

§4. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ $(L_\infty^+)^{n\times n}$

4.1. Ядро ганкелева оператора $H(\mathrm{W}^{-1})$. Допустим, что матрица–функция $\mathrm{W} \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию. Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathcal{D}_+$ – нули, соответственно, с кратностями $m_1, \cdots, m_l$, голоморфного продолжения функции $det\mathrm{W}$ из γ в $\mathcal{D}_+$ и $\varkappa = ind_+ det\mathrm{W} = m_1 + \ldots + m_l$. Определим полиномы $\Delta_k(z)(k = 0, \ldots, l-1)$ и матрицы $w_m (m \in \mathbb{Z})$ следующим образом :

$$\Delta_0(z) = \prod_{i=1}^{l}(z-\lambda_i)^{m_i} = z^{\varkappa} + a_1 z^{\varkappa-1} + \ldots + a_{\varkappa},$$

$$\Delta_k = \prod_{i=k+1}^{l}(z-\lambda_i)^{m_i}, \quad k = 1, \ldots, l-1,$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{W}^{-1}(t)t^{-m-1}dt, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$

Через $Q_k(z, f, \lambda)$ обозначим многочлен Тейлора степени k в точке $z = \lambda$ голоморфной в некоторой окрестности $z = \lambda$ вектор (матрицы)–функции $f(z)$.

Предложение 4.1. *Пусть* $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}, W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ *и* $\varkappa = ind_+ det W$. *Тогда*

1. Матрица–функция W^{-1} *допускает представление вида* $W^{-1} = V_+ + V_-$, *где* $V_+ \in (L_\infty^+)^{n\times n}, V_- \in \left(\overset{\circ}{L}{}_\infty^-\right)^{n\times n}$ *и* $V = \Delta_0 V_-$ *является полиномиальной матрицей степени не более чем* $\varkappa - 1$.

2. Имеет место следующее равенство :

$$w_{-\varkappa-m} + a_1 w_{-\varkappa-m+1} + \ldots + a_\varkappa w_{-m} = 0, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\mathrm{W}}_0 = \Delta_0 \mathrm{W}^{-1} \in (L_\infty^+)^{n\times n}$. Для построения $V_\pm$ мы нуждаемся в матриц–функциях $\tilde{\mathrm{W}}_k \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ $(k = 1, \cdots, l)$, определенных равенствами

$$\tilde{\mathrm{W}}_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}(z, \tilde{\mathrm{W}}_{k-1}, \lambda_k) + (z - \lambda_k)^{m_k} \tilde{\mathrm{W}}_k(z).$$

Ясно, что

$$\mathrm{W}^{-1} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\Delta_{k-1}} Q_{m_k-1}(z, \tilde{\mathrm{W}}_{k-1}, \lambda_k) + \tilde{\mathrm{W}}_l.$$

Взяв $\tilde{\mathrm{W}}_l = V_+$, получим наше первое утверждение.

Применяя теорему 1.24 из [5], получим

$$w_{-m} = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma V_-(t) t^{m-1} dt, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Сравнивая коэффициенты степенных рядов правой и левой части равенства $V = \Delta_0 V_-$ в точке $z = \infty$, получим (4.2). Предложение 4.1 доказано.

Рассмотрим отображения $\psi_j : \mathbf{C}^{nj} \to \mathcal{L}_j (j \in \mathbf{N})$, определенные равенством

$$\psi_j \bar{y} = \sum_{m=0}^{j-1} y_m t^m,$$

где $\bar{y} = [y_0, \cdots, y_{j-1}] \in \mathbf{C}^{nj}, \quad y_i \in \mathbf{C}^n, \quad i = 1, \cdots, j-1.$

Предложение 4.2. *Пусть* $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}, \quad W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ *и* $\varkappa = ind_+ det W$. *Тогда*

$$\mathcal{L}_j \cap Ker H(W^{-1}) = \psi_j Ker \mathcal{K}_j, \quad j \in \mathbf{N},$$

где

$$\mathcal{K}_j = \begin{pmatrix} w_{-1} & w_{-2} & \dots & w_{-j} \\ w_{-2} & w_{-3} & \dots & w_{-j-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{-\varkappa} & w_{-\varkappa-1} & \dots & w_{-\varkappa-j+1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для $y(t) \in \mathcal{L}_j \cap KerH(\mathrm{W}^{-1})$ имеем $\mathcal{P}_-(V_-y) = 0$. Разлагая вектор–функцию $\mathcal{P}_-(V_-y)$ в степенной ряд в бесконечности, получим

$$w_{-m}y_0 + w_{-m-1}y_1 + \ldots + w_{-m-j+1}y_{j-1} = 0, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{4.3}$$

где $[y_0, \cdots, y_{j-1}] = \bar{y} = \psi_j^{-1}y$. Следовательно $\bar{y} \in Ker\mathcal{K}_j$. С другой стороны, в силу (4.2) $\bar{y} = [y_0, \cdots, y_{j-1}] \in Ker\mathcal{K}_j$ удовлетворяет (4.3), т.е. $\mathcal{P}_-(V_-\psi_j\bar{y}) = 0$. Поэтому $\psi_j\bar{y} \in \mathcal{L}_j \cap KerH(\mathrm{W}^{-1})$. Предложение 4.2 доказано.

4.2. Основные теоремы. Следующая теорема является нашим основным результатом относительно частных индексов матрицы–функции $\mathrm{W} \in (L_\infty^+)^{n\times n}$.

Теорема 4.1. *Пусть* $W \in (L_\infty^+)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ *и* $\varkappa = ind_+ detW > 0$. *Тогда частные индексы* W *равны*

$$\varkappa_i = card\{ \quad j | n + r_{j-1} - r_j < i; \quad j = 1, \ldots, \varkappa\}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

где $r_0 = 0$ *и* $r_j = rank\mathcal{K}_j$ *для* $j = 1, \cdots, \varkappa$. *Если* $\varkappa = 0$, *то* $\varkappa_i = \varkappa_2 \cdots = \varkappa_n = 0$.

Доказательство. Имеем $\alpha_j = dimKerT(\mathrm{W}_j) = dimKerF_j (j \in \mathbf{N})$ в силу подпункта 2.2 и предложения 3.2. Так как

$$KerF_j = KerH(\mathrm{W}^{-1}) \cap (1 - t^{-j})\mathcal{L}_j = (1 - t^{-j})(KerH(\mathrm{W}^{-1}) \cap \mathcal{L}_j), \quad j \in \mathbf{N},$$

то из предложения 4.2 имеем

$$KerF_j = (1 - t^{-j})\psi_j Ker\mathcal{K}_j, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4.5}$$

Следовательно

$$\alpha_j = dimKer\mathcal{K}_j = nj - r_j, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{4.6}$$

Поскольку $KerT(\mathrm{W}) = \{0\}$, то из (2.4) имеем $0 \le æ_1 \le \ldots \le æ_n \le æ$. Положим $\eta_- = 0, \eta_+ = æ$. Поскольку $\alpha_0 = 0$, то из предложения 2.1 и (4.6) получим (4.4). Теорема доказана.

Теперь мы докажем, что факторы $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}$ могут быть построены с помощью базисов пространств $\mathcal{N}_j = \psi_j KerK_j (j \in \mathbb{N})$ с конечным числом значений j.

Теорема 4.2. *Пусть $W \in (L^+_\infty)^{n\times n}, W^{-1} \in (\mathcal{M}^+_\infty)^{n\times n}, æ = ind_+ det W$, и пусть частные индексы $æ_1 \le æ_2 \le \ldots \le æ_n$ матрицы-функции W принимают значения $\eta_1 < \ldots < \eta_s$. Тогда пространства $\mathcal{N}_j (j \in \mathbb{N})$ имеют следующие свойства :*

1.$\mathcal{N}_j = \{0\}$ для $j \le \eta_1$ и $\mathcal{N}_{j+1} = \mathcal{N}_j + t\mathcal{N}_j$ для $j \in \mathbb{N} \setminus \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$.

2. Каждое пространство $\mathcal{N}_{\eta_m} + t\mathcal{N}_{\eta_{m-1}+1}, \quad m = 1, \ldots, s$ имеет прямое дополнение Θ_m в пространстве $\mathcal{N}_{\eta_m+1}$ размерности $\mu(\eta_m) = n_m$. Здесь $\eta_0 = 0$ и $\mathcal{N}_0 = \{0\}$.

3. Для произвольного базиса $X_{m,1}, \cdots, X_{m,n_m}$ пространства Θ_m $(m = 1, \cdots, s)$ и матриц-функций

$$U = \left[X^T_{1,1}, \ldots, X^T_{1,n_1}, X^T_{2,1}, \ldots, X^T_{s,n_s}\right],$$

$$W_- = \left[t^{-\eta_1} X^T_{1,1}, \ldots, t^{-\eta_1} X^T_{1,n_1}, t^{-\eta_2} X^T_{2,1}, \ldots, t^{-\eta_s} X^T_{s,n_s}\right],$$

$$W_+ = U^{-1} W, \qquad \Lambda = diag\left[t^{æ_1}, \ldots, t^{æ_n}\right],$$

представление $W = W_- \Lambda W_+$ есть GWH-факторизация матрицы-функции W.

Доказательство. В силу подпункта 2.2 и предложения 3.2

$$KerT(\mathrm{W}_j) = T(\mathrm{W})^{(-1)}(KerF_j) =$$

$$= \mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_+(KerF_j) + \mathcal{P}_-(KerF_j) - H\left(\mathrm{W}^{-1}\right)(KerF_j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому из предложения 4.2 и равенства (4.5) имеем

$$\Omega_j = \mathcal{P}_+(KerT(\mathrm{W}_j)) = \mathcal{P}_+\mathrm{W}^{-1}\mathcal{P}_+(KerF_j) = \mathrm{W}^{-1}\mathcal{N}_j, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Остается применить предложение 2.2. Теорема 4.2 доказана.

§5. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ $(L_\infty^-)^{n\times n}$

5.1. Некоторые свойства ганкелева оператора $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Пусть матрица-функция $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ допускает GWH–факторизацию (т.е. $\mathrm{W}^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$), и пусть точки $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \mathcal{D}$ $(\nu_i \neq \infty)$ – нули, соответственно, с кратностями $m_1, \ldots, m_l$ $(m_i > 0)$ голоморфного продолжения из контура γ в $\mathcal{D}$ $_det\mathrm{W}$ функции $det\mathrm{W}$. Обозначим через m_0 порядок нуля $det\mathrm{W}$ в ∞. Ясно, что $æ = -ind_det\mathrm{W} = m_0 + m_1 + \ldots + m_l$. Матрицы $w_m (m \in \mathbb{Z})$ определим равенствами (4.1). Рассмотрим также функции $\Delta(z), \Delta_-(z)$:

$$\Delta_-(z) = \prod_{i=1}^{l}(z-\nu_i)^{m_i} = z^{æ_0} + c_1 z^{æ_0-1} + \ldots + c_{æ_0}, \qquad \Delta(z) = z^{-m_0}\Delta_-(z),$$

где $æ_0 = æ - m_0$.

Предложение 5.1. *Пусть $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ и $æ = -ind_detW$. Тогда*

1) Матрица-функция W^{-1} допускает представление $W^{-1} = V_+ + V_-$, где $V_+ \in (L_\infty^+)^{n\times n}$, $V_- \in (\mathring{L}_\infty^-)^{n\times n}$, и матрица-функция $V = \Delta_- V_+$ является полиномиальной со степенью не выше чем $æ$.

2) Существуют $b_1, \ldots, b_æ \in \mathbf{C}$ такие, что

$$-w_{æ+m} = b_1 w_m + b_2 w_{m+1} + \ldots + b_æ w_{æ+m-1}, \qquad m \in \mathbf{N}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Ясно, что $\tilde{\mathrm{W}}_0 = z^{-æ}\Delta\mathrm{W}^{-1} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$. Определим матрицы-функции $\tilde{\mathrm{W}}_k, V_- \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ $(k = 1, \ldots, l)$ следующими равенствами :

$$\tilde{\mathrm{W}}_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}\left(z, \hat{\mathrm{W}}_{k-1}, \nu_k\right) + (z-\nu_k)^{m_k}\tilde{\mathrm{W}}_k(z), \qquad k = 1, \cdots, l,$$

$$\tilde{\mathrm{W}}_l(z) = Q_æ(z, \hat{\mathrm{W}}_l, \infty) + z^{-æ}V_-(z).$$

Представляя W^{-1} через V_-, мы получим доказательство нашего первого утверждения. По теореме 1.24 из [5]

$$w_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma V_+(t)t^{-m-1}dt, \quad m = 0, 1, \cdots \tag{5.2}$$

Сравнивая коэффициенты степенных рядов правой и левой частей равенства $V = \Delta_- V_+$ в $z = 0$, находим

$$w_{æ-æ_0+m} + c_1 w_{æ-æ_0+m+1} + \ldots + c_{æ_0} w_{æ+m} = 0, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{5.3}$$

Если $æ_0 > 0$ ($m.e.l > 0$), то $c_{æ_0} = (-1)^l \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_l \neq 0$ и (5.3) влечет (5.1). Если $æ_0 = 0$, то $w_{æ+m} = 0$ ($m \in \mathbf{N}$) и (5.1) снова имеет место. Предложение доказано.

Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_j$ ($j \in -\mathbf{N}$) – линейное пространство вектор–функций $f(z)$ вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{-j} y_k z^{-k} \qquad (y_m \in \mathbf{C}^n, m = 1, \ldots, -j).$$

Определим отображения $\tilde{\psi}_j : \mathbf{C}^{-nj} \to \tilde{\mathcal{L}}_j$ ($j \in -\mathbf{N}$), взяв

$$\tilde{\psi}_j \bar{y} = \sum_{k=1}^{-j} y_k t^{-k},$$

где $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_{-j}] \in \mathbf{C}^{-nj}$, $y_m \in \mathbf{C}^n$, $m = 1, \ldots, -j$. Рассмотрим матрицы

$$\tilde{\mathcal{K}}_j = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_æ \\ w_2 & w_3 & \ldots & w_{æ+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{-j} & w_{-j+1} & \ldots & w_{-j+æ-1} \end{pmatrix}, \quad j \in -\mathbf{N}.$$

Предложение 5.2. Пусть $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $\mathrm{W}^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ и $æ = -ind_det\mathrm{W}$. Тогда

1) $Im\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \tilde{H}(W^{-1})(\tilde{\mathcal{L}}_{-æ})$,

2) $Ker\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) \cap \tilde{\mathcal{L}}_{-æ} = \tilde{\psi}_{-æ}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_{-æ})$,

3) $æ = dimIm\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) = rang\tilde{\mathcal{K}}_{-æ}$.

Доказательство. Пусть $f \in (\mathring{L}_p^-)^n$. Определим $f_0 \in (L_p^-)^n$ и $f_k \in (\mathring{L}_p^-)^n$ ($k = 1, \ldots, l$) равенствами

$$f(z) = Q_{æ-1}(z, f, \infty) + z^{-æ} f_0(z),$$

$$f_{k-1}(z) = Q_{m_k-1}(z, f_{k-1}, \nu_k) + (z - \nu_k)^{m_k} f_k(z), \quad k = 1, \ldots, l.$$

Легко видеть, что $f(z) = q(z) + z^{-æ}\Delta_-(z) f_l(z)$, где $q \in \tilde{\mathcal{L}}_{-æ}$. Пользуясь предложением 5.1, получим $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})f = \tilde{H}(V_+)q = \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})q$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_æ], y_k \in \mathbf{C}^n (k = 1, \ldots, æ)$ и $y(t) = \sum_{k=1}^{æ} y_k t^{-k}$. Степенной ряд рациональной вектор–функции $\tilde{H}\mathrm{W}^{-1}y$ в $z = 0$ имеет вид

$$(\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})y)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (w_{m+1}y_1 + w_{m+2}y_2 + \ldots + w_{m+æ}y_æ)\, z^m.$$

Следовательно, если $y \in Ker\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$, то $\bar{y} \in Ker\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa}$. С другой стороны, если $\bar{y} \in Ker\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa}$, то благодаря (5.1) имеем $\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})y = 0$, дающее наше второе утверждение. Поскольку оператор $\bar{T}(\mathrm{W})$ обратим справа, то из (2.4), подпунктов 2.5 и 3.3 имеем $dimKer\bar{T}(\mathrm{W}^{-1}) = Ind\bar{T}(\mathrm{W}^{-1}) = \varkappa = dimIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$.

Из утверждения 2) следует, что $dimKer(H(\mathrm{W}^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa}}) = dimKer\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa}$. Отсюда $dimIm(H(\mathrm{W}^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa}}) = rang\bar{\mathcal{K}}_{-\varkappa}$. Из утверждения 1) мы заключаем, что $dimIm\left(H(\mathrm{W}^{-1})|_{\bar{\mathcal{L}}_{-\varkappa}}\right) = dimImH(\mathrm{W}^{-1})$. Предложение доказано.

5.2 Формулы для частных индексов. Для доказательства основного результата относительно частных индексов $\mathrm{W} \in (L_\infty^-)^{n\times n}$ мы нуждаемся в следующем предложении :

Предложение 5.3. *Пусть $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$, $\varkappa = -ind_detW$ и $\bar{F}_j$ $(j \in -\mathbf{N})$ определена равенством (3.3). Тогда*

1) $Im\bar{F}_j = \psi_{-j}\left(Im\bar{\mathcal{K}}_j\right)$, $\quad j \in -\mathbf{N}$,

2) $Ker\bar{F}_j = \bar{H}(W^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j)$, $\quad j \in -\mathbf{N}$,

3) $\Omega_j = Ker\bar{T}(W_j) = t^j Ker\bar{F}_j$, $\quad j \in -\mathbf{N}$.

Доказательство. Пусть $j \in -\mathbf{N}$ и $g \in Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Из 1) предложения 5.2 мы заключаем, что существует $\bar{y} = [y_1, \dots y_\varkappa] \in \mathbf{C}^{n\varkappa}$ $(y_1, \dots y_\varkappa \in \mathbf{C}^n)$ такой, что $g = \bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}\bar{y}$. Из предложения 5.1 следует, что $g = \mathcal{P}_+V_+\bar{\psi}_{-\varkappa}\bar{y} \in \mathcal{R}^n \cap (L_p^+)^n$. Теперь, с помощью (5.2), степенной ряд вектор–функции $g(z)$ в окрестности $z = 0$ может быть записан в виде

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+\varkappa}y_\varkappa)z^k.$$

Положим

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{-j-1}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+\varkappa}y_\varkappa)\,t^k, \qquad (j \in -\mathbf{N}).$$

Вектор–функция $h = t^{-j}(g - g_j)$ принадлежит $(L_\infty^+)^n$ и $\bar{T}(t^{-j}I_n)h = \mathcal{P}_+t^{-j}h = g - g_j$, т.е. $g - g_j \in Im\bar{T}(t^{-j}I_n)$. Следовательно, $g_j = \bar{F}_j g$ $(j \in -\mathbf{N})$ и доказательство 1), 2) завершено.

Если $g \in Ker\bar{F}_j$ $(j \in -\mathbf{N})$, то

$$g(z) = t^{-j}\sum_{k=-j}^{\infty}(w_{k+1}y_1 + w_{k+2}y_2 + \ldots + w_{k+\varkappa}y_\varkappa)t^{k+j}$$

в окрестности $z = 0$ и поэтому $t^j g(z) \in (L_p^+)^n$. В силу предложения 3.3 и формулы (2.1)

$$\Omega_j = \tilde{T}\left(t^j I_n\right) \tilde{\pi}_j \left(Ker\tilde{F}_j\right) = \mathcal{P}_+ t^j I\left(KerF_j\right) = t^j KerF_j.$$

Предложение доказано.

Теорема 5.1. *Пусть* $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ *и* $æ = -ind_detW > 0$. *Тогда частные индексы* $æ_1 \le \ldots \le æ_n$ *матрицы-функции* W *равны*

$$æ_i = -æ + card\{\ \ j|\ \ r_{j-1} - r_j < i;\ \ \ j = -æ+1, \ldots, 0\}, \tag{5.4}$$

где $r_j = rank\tilde{\mathcal{K}}_j$ $(j = -æ, \ldots, -1)$ *и* $r_0 = 0$. *Если* $æ = 0$, *то* $æ_1 = æ_2 = \ldots = æ_n = 0$.

Доказательство. Из 3) прделожения 5.2 и 1) предложения 5.3 следует, что $dimKer\tilde{F}_j = æ - r_j$ $(j \in -\mathbb{N})$. Пользуясь предложением 3.3 и (2.3), получим $dim\Omega_j = æ - r_j$. Вспомним, что $dim\Omega_0 = dimIm\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1}) = æ - r_0$. Поскольку оператор $\tilde{T}(\mathrm{W})$ обратим справа, то из (2.4) имеем $-æ \le æ_1 \le \ldots \le æ_n \le 0$. Взяв $\eta_- = -æ$, $\eta_+ = 0$, с помощью предложения 2.1 получим (5.4). Теорема доказана.

5.3 Формулы для факторов. Определим $\tau \in \mathcal{L}\ (\mathbf{C}^{n æ})$ согласно формуле $\tau\bar{y} = [-b_1 y_æ, y_1 - b_2 y_æ, \ldots, y_{æ-1} - b_æ y_æ]$, где $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_æ]$ $(y_i \in \mathbf{C}^n, i = 1, \ldots, æ)$.

Предложение 5.4. *Пусть* $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ *и* $æ = -ind_detW$. *Тогда*

1) $\tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j \subset Ker\tilde{\mathcal{K}}_{j+1}$, $\quad j = -æ, \ldots, -2$,

2) $\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\bar{y}) = t\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\tau\bar{y}) + \tilde{\mathcal{K}}_{-1}\bar{y}$ $\qquad$ *для каждого* $\bar{y} \in C^{n æ}$,

3) $t\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) = \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j)$, $j = -æ, \ldots, -1$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_æ]$ и $\bar{h} = \tau\bar{y} = [h_1, \ldots, h_æ]$ $(y_i, h_i \in \mathbf{C}^n, i = 1, \ldots, æ)$. Из определения τ и (5.1) имеем

$$w_i h_1 + w_{i+1} h_2 + \ldots + w_{i+æ-1} h_æ = w_{i+1} y_1 + w_{i+2} y_2 + \ldots + w_{i+æ} y_æ, \quad i \in \mathbf{N}. \tag{5.5}$$

Легко проверить, что утверждение 1) следует из (5.5). Разлагая вектор-функции $\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\bar{y}), \tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\bar{h})$ в степенные ряды вокруг $z = 0$ и пользуясь (5.5), будем иметь

$$t\tilde{H}(\mathrm{W}^{-1})\tilde{\psi}_{-æ}(\bar{h}) = t\sum_{s=0}^{\infty}(w_{s+1}h_1 + w_{s+2}h_2 + \ldots + w_{s+æ}h_æ)t^s =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+1}y_1 + w_{s+2}y_2 + \ldots + w_{s+\varkappa}y_\varkappa)t^s = \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(\bar{y}) - (w_1y_1 + \ldots + w_\varkappa y_\varkappa),$$

откуда следуют 2) и 3). Предложение 5.4 доказано.

Предложение 5.5.. *Пусть* Θ_j $(j = -\varkappa, \ldots, -1)$ *– линейные пространства, удовлетворяющие условиям*

$$(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \oplus \Theta_j = Ker\tilde{\mathcal{K}}_{j+1}, \qquad j = -\varkappa, \ldots, -2;$$

$$(Ker\tilde{\mathcal{K}}_{-1} + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_{-1}) \oplus \Theta_{-1} = \mathbf{C}^{n\varkappa}. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_{j+1}) =$$

$$= \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \oplus \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(\Theta_j) \quad j = -\varkappa, \ldots, -1 \tag{5.7}$$

и $dim\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(\Theta_j) = dim\Theta_j$.

Доказательство. Пусть $f \in \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j) \cap \tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(\Theta_j)$ $(j = -\varkappa, \ldots, -1)$. Существуют $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$ и $\bar{y} \in \Theta_j$ такие, что $\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}$ $(\bar{y} - \bar{h}_1 - \tau\bar{h}_2) = 0$. Из второго утверждения предложения 5.2 заключаем, что $\bar{y} - \bar{h}_1 - \tau\bar{h}_2 \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$. Отсюда $\bar{y} \in Ker\tilde{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\tilde{\mathcal{K}}_j$. Поэтому $\bar{y} = 0$ и $f = 0$. Равенства (5.7) доказаны.

Пусть $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \Theta_j$ и $\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = 0$. Из 2) предложения 5.2 имеем

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 \in \Theta_j \cap (Ker\mathcal{K}_j \cap \tau Ker\mathcal{K}_j).$$

Следовательно, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$. Доказательство завершено.

Теорема 5.2. *Пусть* $W \in (L_\infty^-)^{n\times n}$, $W^{-1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$ *и* $\varkappa = -ind_detW$, *и пусть частные индексы* $\varkappa_1 \le \ldots \le \varkappa_n$ *матрицы–функции* W *принимают значения* $\eta_1 < \ldots < \eta_s$ *с* $\mu(\eta_i) = n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. *Если пространства* Θ_j $(j = -\varkappa, \ldots, -1)$ *определены с помощью (5.6) и пространство* Θ_0 *есть прямое дополнение* $Im\tilde{\mathcal{K}}_{-1}$ *в* $\mathbf{C}^n$, *т.е.* $Im\tilde{\mathcal{K}}_{-1} \oplus \Theta_0 = \mathbf{C}^n$, *то* $\Theta_i = \{0\}$ *для* $i \notin \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ *и* $dim\Theta_{\eta_i} = n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Пусть $\{\bar{y}_{\eta_i,1}, \ldots, \bar{y}_{\eta_i,n_i}\}$ $(i = 1, \ldots, s)$ *– базис пространства* Θ_{η_i}. *Если вектор–функции* $u_{\eta_i,j}$ $(i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, n_i)$ *и матрицы–функции* U, W_+, Λ, W_- *определены следующим образом :*

$$u_{\eta_i,j} = t^{\eta_i+1}\tilde{H}(W^{-1})\tilde{\psi}_{-\varkappa}\bar{y}_{\eta_i,j} \qquad при \quad \eta_i < 0; \quad i = 1, \ldots, s; \quad j = 1, \ldots, n_i,$$

$$u_{0,j} = \bar{y}_{0,j} \quad if \quad \eta_s = 0; \quad j = 1, \ldots, n_s,$$

$$U = \left[u^T_{\eta_1,1}, \ldots, u^T_{\eta_1,n_1}, u^T_{\eta_2,1}, \ldots, u^T_{\eta_s,n_s}\right],$$

$$W_+ = U^{-1}, \quad \Lambda = diag\left[t^{\varkappa_1}, \ldots, t^{\varkappa_n}\right], \quad W_- = WW_+^{-1}\Lambda^{-1},$$

то представление $W = W_-\Lambda W_+$ *является GWH–факторизацией матрицы–функции* W.

Доказательство. Из 2), 3) предложения 5.3 и 1) предложения 5.4 имеем

$$\Omega_j = t^j\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j) = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(\tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j), \quad j = -\varkappa, \ldots, -1.$$

В силу 1) предложения 5.2

$$\Omega_0 = Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = \bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(\mathbf{C}^{n\varkappa}).$$

Следовательно

$$\Omega_j + t\Omega_j = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(Ker\bar{\mathcal{K}}_j + \tau Ker\bar{\mathcal{K}}_j), \quad j = -\varkappa, \ldots, -1.$$

Из предложения 5.5 пространство $\Xi_j = t^{j+1}\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(\Theta_j)$ $(j = -\varkappa, \ldots, -1)$ является прямым дополнением пространства $\Omega_j + t\Omega_j$ в Ω_{j+1}. Более того, $dim\,\Xi_j = dim\Theta_j$ $(j = -\varkappa, \ldots, -1)$.

Из подпункта 2.5 и (2.4) следует, что $\dim\Omega_1 = n + \varkappa$. Так как $\mathbf{C}^n \subset \Omega_1$ и $t\Omega_0 \subset \Omega_1$, то

$$\Omega_1 = \mathbf{C}^n \oplus t\Omega_0 = \mathbf{C}^n \oplus tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}). \tag{5.8}$$

С другой стороны, из предложения 5.4 следует, что $Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$ совпадает с пространством вектор–функций вида $t\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})\bar{\psi}_{-\varkappa}(\tau\bar{y} + \bar{h}) + \bar{\mathcal{K}}_{-1}\bar{y}$, где $\bar{y}, \bar{h} \in \mathbf{C}^{n\varkappa}$. Взяв $\bar{h} = -\tau\bar{y}$, получим $Im\bar{\mathcal{K}}_{-1} \subset Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1})$. Следовательно

$$\Omega_0 + t\Omega_0 = Im\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) + tIm\bar{H}(\mathrm{W}^{-1}) = Im\bar{\mathcal{K}}_{-1} \oplus t\Omega_0.$$

Сравнивая последнее тождество с (5.8), заключаем, что пространство $\Xi_0 = \Theta_0$ – прямое дополнение $\Omega_0 + t\Omega_0$ в Ω_1.

С помощью предложения 2.2 получим доказательство теоремы.

5.4. Замечание. Из определения $\mathcal{M}_\infty^+(\mathcal{M}_\infty^-)$ следует, что для каждой мероморфной матрицы–функции W, удовлетворяющей условию $W^{\pm 1} \in (\mathcal{M}_\infty^+)^{n\times n}$ ($W^{\pm 1} \in (\mathcal{M}_\infty^-)^{n\times n}$), существует скалярная функция $f \in \mathcal{R}$, не исчезающая на γ и удовлетворяющая условию $fW \in (L_\infty^+)^{n\times n}$ ($fW \in (L_\infty^-)^{n\times n}$) (см. [5]). Это замечание позволяет редуцировать задачу GWH–факторизации мероморфной матрицы–функции W к задаче GWH–факторизации голоморфной матрицы–функции fW.

ABSTRACT. The paper presents some explicit formulas for generalized Wiener–Hopf factorization of bounded holomorphic matrix-functions, relative to a closed contour. Formulas for the partial indices are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. C. Gohberg, N. Krupnik, One Dimensional Linear Singular Integral Equations, vol. I, Introduction, vol. II, General Theory and Applications, OT, vol. 53 — 54, Birkauser Verlag, Basel, 1992.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами от разности аргументов", УМН, т. 13, вып. 2, стр. 3 – 72, 1958.
3. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, "Уравнение в свертках и проекционные методы их решения", Наука, М., 1971.
4. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Гамильтонов подход в теории солитонов, Наука, М., 1986.
5 G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii, Factorization of Measurable Matrix Function, Akademic - Verlag, Berlin, 1987.
6. I. C. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, "Factorization indices for matrix polynomials", Bull. AMS, vol. 84, pp. 275 — 277, 1978.
7. В. М. Адуков, "Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц–функций", Алгебра и анализ, т. 4, № 1, стр. 54 – 74, 1992.
8. H. Bart, I. C. Gohberg, M. A. Kaashoek, "The coupling method for solving integral equations", OT 12, pp. 39 — 73, Birkhauser, Basel, 1984.
9. G. David, L'integrale de Cauchy sur le Courbes Rectifiables, Prepublications Univ. Paris - Sud., Dept. Math., 82T05, 21 pp., 1982.
10. И. Б. Симоненко, "Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана", Изв. АН СССР, т. 2, № 5, стр. 1091 – 1099, 1968.
11. А. Г. Камалян, В. А. Оганян, "Метод конструктивного построения факторизации для одного класса матриц–функций", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 — 15, 1993.
12. K. Clancey, I. C. Gohberg, Factorization of Matrix–Functions and Singular Integral Operators, OT, vol. 3, Birkauser, Basel, 1981.

14 ноября 1996

Институт математики
НАН Армении