О ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЫХ И КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ, II

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 2, 1997

В первой статье с тем же названием (настоящий журнал, т. 31, № 6, стр. 11 – 25, 1996) была рассмотрена задача о максимальной скорости убывания целых или квазицелых функций в угловой области $|\arg z| \le \alpha/2$ при $0 < \alpha < \pi$. В отличие от теоремы Н. У. Аракеляна, не было сделано какого–либо утверждения относительно расположения нулей целых функций. Целью было выяснить существенность условия $p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и вывести условия, при которых аналоги результатов Аракеляна оставались бы справедливыми для целых и квазицелых функций. В настоящей работе рассматривается та же задача для $\pi \le \alpha < 2\pi$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является продолжением исследования, проведенного в работе [3]. Нас интересуют целые и квазицелые функции конечного порядка с быстрейшей скоростью убывания в угле $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\gamma} = \dfrac{\alpha}{2}$. Случай $\gamma \ge 1$ был рассмотрен в [3]. В настоящей статье рассматривается случай $1/2 < \gamma \le 1$. Обе работы тесно связаны с работой Н. У. Аракеляна, доказавшего следующее утверждение (см. [1], стр. 189).

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max\left\{\dfrac{\pi}{\alpha}, \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}\right\}$, *и пусть* $p(r)$, $r \ge 1$ – *неотрицательная функция такая, что*

$$p(r)r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty, \quad \int_1^{\infty} r^{-(\pi/\alpha+1)}\, p(r)\, dr \le k < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ *порядка* ρ *и нормального типа, все нули*

которой лежат вне угла $|\arg z| \le \dfrac{\alpha}{2}$ *и которая удовлетворяет неравенствам*

$$\exp\left(-k|z|^{\pi/\alpha}\right) < |\omega_\alpha(z)| < \exp\left(-[Rez^{\pi/\alpha} + p(|z|)]\right), \qquad |\arg z| \le \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \ge 1. \tag{2}$$

Указанный тип или порядок нельзя понизить. По данному вопросу см. также [2] и замечание 1 в [3].

В данной работе рассматривается та же задача в случае $1/2 < \gamma = \dfrac{\pi}{\alpha} \le 1$. В отличие от теоремы Аракеляна, не сделано какого–либо утверждения относительно нулей. Целью является выяснение существенности условия $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ в (1) и вывод аналогичных теорем для целых и квазицелых функций.

Пусть $T_*(r)$, $r > a > 0$ – монотонно возрастающая функция такая, что сходится интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = \int^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr, \qquad a > 0. \tag{3}$$

Последовательность $\{M_n\}$ определим как

$$M_n = \sup_{r \ge a} \frac{r^n}{T_*(r)}. \tag{4}$$

Из [4], стр. 10 – 14 (см. также [3]) следует, что

$$T_*(r) = \sup_{n \ge 0} \frac{r^n}{M_n}, \tag{5}$$

т.е. $\{M_n\}$ является порождающей последовательностью для $T_*(r)$ и обладает свойством минимальности.

Рассмотрим последовательность $\{\mathring{M}_n\}$, где $\mathring{M}_n = M_n^\rho$, $\rho \ge 1$, и положим

$$\mathring{T}(r) = \sup_{n \ge 0} \frac{r^n}{\mathring{M}_n}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Из сходимости (3), где* $T_*(r)$ *определена в (5) и* $1/2 < \gamma \le 1$, $\rho = \dfrac{\gamma}{2\gamma - 1} \ge 1$, *следует сходимость интеграла*

$$\int^\infty \frac{\ln \mathring{T}(r)}{r^{1+1/\beta}}\, dr, \quad \beta = 2\rho - 1, \quad \rho \ge 1. \tag{7}$$

Доказательство. После замены r на $r^{1/\rho}$, будем иметь

$$\int^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = \frac{1}{\rho} \int^\infty \frac{\ln \mathring{T}(r^{1/\rho})}{r^{1+1/\beta}}\, dr. \tag{8}$$

Но согласно (6)

$$T_*(r^{1/\rho}) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^{n/\rho}}{M_n} = \sup_{n\geq 0} \left(\frac{r^n}{\overset{\circ}{M}_n}\right)^{1/\rho} = \left[\overset{\circ}{T}(r)\right]^{1/\rho}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует одновременная сходимость (3) и (7).

Определение 1. Последовательность чисел $\{\mu_\nu\}$, где

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots, \qquad \mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

принадлежит классу $A^*(1/\omega)$, $\omega > 0$, если сходится ряд

$$\sum \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\mu_\nu} \tag{11}$$

и

$$\mu_\nu - \omega\nu = \alpha_\nu = o(\nu^\delta), \quad 0 \leq \delta < 1/2, \quad \nu \to \infty. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует

$$\sum_{\mu_\nu \leq r} \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{\omega} \ln r + O(1), \quad r \to +\infty, \quad \frac{1}{\omega} = \rho.$$

Теорема 2 (см. [5], Теорема 8). *Из сходимости (7) следует существование функции* $0 \neq \varphi \in C^\infty[0,1]$, *удовлетворяющей условиям*

1. $\varphi^{(n)}(1) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ (13)

2. $\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-\widetilde{\mu}_k}\, dt = 0, \quad \mu_{k_n} \leq n,$ (13′)

3. $|\varphi^{(n+1)}(x)|\, x^\delta \leq c c_1^n \overset{\circ}{M}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad x \in [0,1], \quad \delta \in (0, 1/2),$ (14)

где последовательность $\widetilde{\mu} = \{\widetilde{\mu}_k\} \in A^*(\rho)$, $\overset{\circ}{M}_n = M_n^\rho$.

Нам потребуются оценки (вообще говоря двусторонние) модулей следующих функций :

$$\Lambda_*(z, \mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_\nu^2}\right), \quad z = \sigma + iy, \quad |z \pm \mu_\nu| \geq \frac{h}{4}, \tag{15}$$

$$W(z, \mu) = e_{1,\infty}(z, \mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\mu_\nu}\right) e^{-z/\mu_\nu}, \quad \mathrm{Re} z = \sigma > 0, \tag{16}$$

где μ_n – произвольная последовательность типа (10).

Теорема А. *Вне кругов* $\min|z \pm \mu_\nu| \le h_1$ *имеем*

$$e^{-c_1|\sigma|}\Lambda^2(y,\mu) \le |\Lambda_*(\sigma+iy,\mu)| \le e^{c_2|\sigma|}\Lambda^2(y,\mu), \tag{17}$$

где $h_1 \le h/4$ *и*

$$\Lambda(y,\mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{\mu_\nu^2}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *не зависят от* σ *и* y.

Доказательство. См. [6], теорему 2.2.

Теорема В. *Для функции* $W(\sigma+iy,\mu)$, $\sigma > 0$, *имеем*

$$\begin{aligned} &c_1\Lambda(y,\mu)\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}+c_1'\right)\right) \le \\ &\le |W(\sigma+iy,\mu)| \le c_2\Lambda(y,\mu)\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu\le r}\frac{1}{\mu_\nu}-c_2'\right)\right), \end{aligned} \tag{19}$$

где постоянные $c_1 > 0$, $c_1' > 0$, $c_2 > 0$ *и* $c_2' > 0$ *не зависят от* σ *и* y.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $x > 0$

$$|W(x+iy,\mu)| = \Lambda(r,\mu)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{2\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right)^{1/2} e^{-x/\mu_\nu},$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, достаточно получить двусторонние оценки для функции

$$P(x,y) = \prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(x,y),$$

где

$$p_\nu(x,y) = \left(1+\frac{2\mu_\nu x}{r^2+\mu_\nu^2}\right)^{1/2} e^{-x/\mu_\nu}.$$

Обозначим

$$P_{a,b}(x,y) = \prod_{a<\mu_\nu\le b} p_\nu(x,y),$$

и оценим функции $P_{1,r-a}(x,y)$, $P_{r-a,r+a}(x,y)$, $P_{r+a,\infty}(x,y)$. Заметим, что функции $P_{1,r-a}(x,y)$ и $P_{r+a,\infty}(x,y)$ оценивается аналогично ввиду того, что функция

$$g(u) = \frac{u}{r^2+u^2}, \qquad u \in (0,\infty)$$

достигает максимума в точке $u_0 = r$.

Для $\mu_\nu \geq r - a > 0$ и $\mu_\nu \geq r + a > 0$, $a > 0$ имеем

$$0 < \frac{2r\,\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} < q < 1.$$

Поэтому для оценки

$$p_\nu(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right) - x/\mu_\nu\right)$$

мы можем воспользоваться свойством степенного ряда логарифмической функции. Имеем

$$\exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu}\right) < P_{1,r-a}(x, y) < \exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu} + \sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right).$$

С другой стороны

$$\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2} < \frac{x}{r^2}\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\mu_\nu \leq \frac{x \cdot r \cdot n(r)}{r^2} \leq c_2 x,$$

где $n(r)$ – числовая функция последовательности $\{\mu_\nu\}$. Так как $\mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0$, то $n(r) = O(r)$. Таким образом, мы доказали неравенства

$$\exp\left(-x\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu}\right) < P_{1,r-a}(x, y) < \exp\left(-x\left(\sum_{\mu_\nu \leq r-a}\frac{1}{\mu_\nu} - c_2\right)\right). \tag{20}$$

Для оценки $P_{r+a,\infty}(x, y)$ сперва заметим, что

$$\exp\left[-x\sum_{\mu_\nu \geq r+a}\left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} + \left(\frac{\mu_\nu\sqrt{x}}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)^2\right)\right] < P_{r+a,\infty}(x, y) <$$
$$< \exp\left[-x\sum_{\mu_\nu \geq r+a}\left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)\right]. \tag{21}$$

Поскольку

$$\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} = \frac{r^2}{\mu_\nu\,(r^2 + \mu_\nu^2)},$$

то можем записать

$$\frac{1}{2}\frac{r^2}{\mu_\nu^3} \leq \frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} < \frac{r^2}{\mu_\nu^3}, \qquad \left(\frac{\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2}\right)^2 < \frac{x^2}{\mu_\nu^2}.$$

Поскольку $\mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0$, то имеем

$$0 < c' < \frac{r^2}{2} \sum_{\mu_\nu \geq r+a} \frac{1}{\mu_\nu^3} < \sum_{\mu_\nu \geq r+a} \left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{\mu_\nu}{r^2 + \mu_\nu^2} \right) < 2r^2 \sum_{\mu_\nu \geq r+a} \frac{1}{\mu_\nu^3} \leq c'' < \infty.$$

Принимая во внимание неравенство

$$0 < \sum_{\mu_\nu \geq r+a} \left(\frac{\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2} \right)^2 \leq x^2 \sum_{\mu_\nu \geq r+a} \frac{1}{\mu_\nu^2} \leq c \frac{x^2}{r} \leq c_2 x,$$

получим

$$0 < c_1 < P_{r+a,\infty}(x, y) < c_2 x, \tag{21'}$$

где постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от r и x.

Для оценки $P_{r-a,r+a}(x, y)$ используем следующее очевидное неравенство :

$$e^{-x/\mu_\nu} < p_\nu(x, y) < \exp\left(-\frac{x}{\mu_\nu} + \frac{\mu_\nu x}{r^2 + \mu_\nu^2} \right).$$

Имеем

$$e^{-x/\mu_\nu} < p_\nu(x, y) < \exp\left(-x \sum_{r-a < \mu_\nu \leq r+a} \frac{r^2}{\mu_\nu (r^2 + \mu_\nu^2)} \right).$$

Так как $\mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0$, то получим

$$0 < \sum_{r-a < \mu_\nu \leq r+a} \frac{1}{\mu_\nu} = O\left(\ln \frac{r+a}{r-a} \right) < c.$$

Это означает, что

$$e^{-c_1' x} < P_{r-a,r+a}(x, y) < e^{c_2' x}, \quad c_1' > 0, \quad c_2' > 0. \tag{22}$$

Далее имеем (см. (18))

$$\Lambda(y, \mu) \leq \Lambda(r, \mu) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{\mu_\nu^2} \right)^{1/2} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{y^2 + \mu_\nu^2} \right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \Lambda(y, \mu) \cdot \Lambda(x, \mu) \leq \Lambda(y, \mu) \cdot e^{cx}.$$

Поскольку $\mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0$, то получим

$$1 < \Lambda(x, \mu) < e^{cx}.$$

Комбинируя эти неравенства с (20) — (22), мы завершим доказательство.

Перейдем теперь к выводу оценок для $|W(-\sigma - iy, \mu)|$ вне малых окрестностей $u_\delta(\mu_\nu) = |z - \mu_\nu| < \delta$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Теорема С. *Для функции* $|W(-\sigma - iy, \mu)|$, $\sigma > 0$ *выполняются неравенства*

$$A\frac{e^{-c_1\sigma}\,\Lambda(y,\mu)}{\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu \le r}\frac{1}{\mu_\nu} - c_1'\right)\right)} \le |W(-\sigma - iy,\mu)| \le B\frac{e^{c_2\sigma}\,\Lambda(y,\mu)}{\exp\left(-\sigma\left(\sum_{\mu_\nu \le r}\frac{1}{\mu_\nu} + c_2'\right)\right)} \tag{23}$$

вне окрестностей $u_\delta(\mu_\nu)$, $\nu = 1, 2, ...$, $0 < \delta < h/4$.

Доказательство. Имеем

$$W(-\sigma - iy, \mu) = e_{1,\infty}(-\sigma - iy, \mu) = \frac{\Lambda_*(\sigma + iy, \mu)}{e_{1,\infty}(\sigma + iy, \mu)} = \frac{\Lambda_*(\sigma + iy, \mu)}{W(\sigma + iy, \mu)}.$$

Применяя теоремы A и B, получим (23). Теорема C доказана.

Обозначим

$$\widetilde{\Gamma}(z, \mu) = \widetilde{\Gamma}(\sigma + iy, \mu) = \frac{1}{e_{1,\infty}(\sigma + iy, \mu)}, \qquad \sigma > 0. \tag{24}$$

Нам нужна следущая версия теоремы B.

Теорема B′. *Для функции* $\widetilde{\Gamma}(\sigma + iy, \mu)$ *и* $\sigma > 0$, $|z| = |\sigma + iy| = r$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\exp\left(\sigma\left(\sum_{\mu_\nu \le r}\frac{1}{\mu_\nu} - c_1\right)\right)}{\Lambda(y,\mu)} \le |\widetilde{\Gamma}(\sigma + iy, \mu)| \le \frac{\exp\left(\sigma\left(\sum_{\mu_\nu \le r}\frac{1}{\mu_\nu} + c_2\right)\right)}{\Lambda(y,\mu)},$$

где постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *не зависят от* σ *и* y.

Наконец, напомним определение квазицелых функций. Пусть $\{\lambda_\nu\}$ – числовая последовательность такая, что

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < ..., \quad \lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \ge h > 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\nu} = \infty.$$

Функция вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{\lambda_k}, \tag{25}$$

определенная на римановой поверхности логарифмической функции $\mathrm{Ln}(z)$, называется квазицелой, если радиус сходимости ряда (25) равен бесконечности.

Для квазицелых функций порядок и тип нами определяются так же, как это делается для целых функций, т.е.

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln \lambda_n}{\ln |a_n|^{-1/\lambda_n}}, \qquad (\sigma\, e\, \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{1/\rho}\,|a_n|^{1/\lambda_n}$$

(см. [7], стр. 250, 251).

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 3. *Из сходимости интеграла (3) следует существование целой или квазицелой функции, соответственно видов*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k,\quad \{\mu_\nu\}\in A^*(\rho)\quad \text{и}\quad f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{\mu_k\rho},\quad \{\mu_\nu\rho\}\in A^*(1)$$

порядка $\rho\geq 1$ и нормальных типов, удовлетворяющих условию

$$0\not\equiv |f(z)|\leq c\frac{r^{l_0}}{[T_*(r)]^\rho},\quad |\arg z|\leq\frac{\pi}{2\gamma},\quad \frac{1}{2}<\gamma\leq 1,$$

где число $l_0>0$ не зависит от z ($l_0\geq 4\rho$).

Доказательство. Доказательство проведем для целой функции, где по ходу доказательства будет видно, что теорема 3 остается в силе и для квазицелых функций, указанного в теореме вида.

Из сходимости интеграла (3) следует сходимость интеграла (7). Следовательно удовлетворены условия теоремы 2.

Рассмотрим частный случай последовательности

$$\begin{aligned}&A^*(\rho)\ni\bar\mu=\{\bar\mu_\nu\}=\{\mu'_\nu\}\cup\{\mu''_\nu=\nu\}_1^\infty,\ \bar\mu_{\nu+1}-\bar\mu_\nu\geq h>0,\\&\{\mu'_\nu\}\in A^*(\rho-1),\ \{\mu''_\nu\}\in A^*(1),\ \{\mu'_\nu\}\cap\{\mu''_\nu\}=\emptyset,\end{aligned}\tag{26}$$

а также последовательность вида (10), удовлетворяющую условию

$$\mu=\{\mu_\nu\}\in A^*(\rho),\quad \mu_{\nu+1}-\mu_\nu\geq h>0.\tag{27}$$

Заметим, что во всех проводимых в настоящей работе вычислениях и оценках последовательность $\mu=\{\mu_\nu\}$ может быть заменена на $\{\nu/\rho\}$.

Обозначим

$$f_1(z)=\int_0^1\varphi(t)\,p(zt,\sigma)\,\frac{dt}{t},\quad -\frac{1}{\rho}<\sigma<\mu_1,\tag{28}$$

где функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и

$$p(t,\sigma)=p_0(t,\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\zeta t^{-\zeta}\,d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\,e_{1,\infty}(\zeta,\mu)},\tag{29}$$

где $e_{1,\infty}(\zeta,\mu)$ определена в (16), последовательности $\mu=\{\mu_\nu\}$ и $\mu'=\{\mu'_\nu\}$ определены в (27) и (26), соответственно.

Утверждаем, что искомая теоремой 3 целая (при $\mu = \{\nu/\rho\}$) или квазицелая (при $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$) функция имеет представление

$$f(z) = f_1(l\, z^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, z^{\mu_\nu\, \rho}, \tag{30}$$

где $f_1(z)$ определена в (28), $l > 0$ – удобно подобранное число.

Доказательству предпошлем следующие две леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы 3 функция (30) целая (при $\mu = \{\nu/\rho\}$) или квазицелая (при $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$).*

Доказательство. Доказательство проведем для случая $\mu = \{\nu/\rho\}$. Случай $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$ доказывается аналогично.

Нетрудно заметить, что из (29) следует равенство

$$p(t,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta=-k/\rho} \frac{\zeta\, t^{-\zeta}}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\, e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho)} + p(t,-\sigma_n), \tag{31}$$

где $n/\rho < \sigma_n < (n+1)/\rho$.

Поэтому

$$p(t,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_k t^{k/\rho} + p(t,-\sigma_n), \tag{32}$$

где

$$a_k = \left(\frac{k}{\rho}\right)^2 \frac{e^{-1}}{e_{1,\infty}(k/\rho,\mu') \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq k}} \left(1-\frac{k}{\nu}\right) e^{k/\nu}}.$$

Из (28), согласно (32) будем иметь

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k z^{k/\rho} + \int_0^1 \varphi(t)\, p(zt,-\sigma_n)\, \frac{dt}{t}, \tag{33}$$

где

$$b_k = a_k \int_0^1 t^{-1+k/\rho}\, \varphi(t)\, dt.$$

Полагая $y = 0$, $r = k/\rho$ и применяя теоремы B, C и B′, получим

$$|a_k| = \frac{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu')}{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu)} \frac{1}{|\Lambda_*(k/\rho,\{\nu/\rho\})|_{\nu\neq k}} \frac{1}{2} \left(\frac{k}{\rho}\right)^2 = e^{O(k)} \frac{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu')}{\widetilde{\Gamma}(k/\rho,\mu)} = e^{O(k)} \frac{1}{\Gamma(k/\rho)}.$$

Аналогичную оценку можно получить для b_k. Докажем, что

$$\lim_{\sigma_n\to\infty} p(zt,-\sigma_n) = 0, \tag{34}$$

где $x = \mathrm{Re}z > 0$. Действительно, имеем

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n + iy, \mu')|} = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\sigma_n}{\mu'_\nu}\right)^2 + \frac{y^2}{\mu'^2_\nu}\right]^{1/2} e^{-\frac{\sigma_n}{\mu'_\nu}}} = \\ = \frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu'_\nu)^2}\right)^{1/2}}, \tag{35}$$

и

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(-\sigma_n - iy, \mu)|} = \frac{\left|\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)\exp\left(-\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)\right|}{\left|\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{\sigma_n+iy}{\mu_\nu}\right)^2\right)\right|} \leq \\ \leq \frac{e^{c\,\sigma}}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu_\nu)^2}\right)^{1/2}}{\Lambda^2(y,\mu)}, \tag{36}$$

где $\Lambda(y, \mu)$ определена в (18).

Из (31), согласно (35) и (36) будем иметь

$$|p(xt, -\sigma_n)| \leq \frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c\,\sigma}}{\Lambda^2(y,\mu)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu_\nu)^2}}{1+\frac{y^2}{(\sigma_n+\mu'_\nu)^2}}\right)^{1/2} dy \leq$$

$$\leq 2\frac{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu')}{\widetilde{\Gamma}(\sigma_n, \mu)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{c\,\sigma}}{1+y^2}\, dy \leq \frac{\exp\left(\sigma_n \sum_{\mu' \leq \sigma_n} \frac{1}{\mu'_\nu}\right)}{\exp\left(\sigma_n \sum_{\mu' \leq \sigma_n} \frac{1}{\mu_\nu}\right)} e^{c'\,\sigma_n} \leq$$

$$\leq e^{c'\,\sigma_n} \exp\left(-\sigma_n \ln \sigma_n\right),$$

так как $\mu' \in A^*(\rho - 1)$, $\mu \in A^*(\rho)$. Этим доказана справедливость (34).

Поэтому из (33), после предельного перехода при $n \to \infty$, получим

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^{k/\rho}, \quad 0 < x < \infty.$$

Следовательно функция $f_1(z)$ аналитически продолжается на всю римановую поверхность логарифмической функции $\mathrm{Ln}z$, поэтому $f_1(z)$ является квазицелой. Следовательно, функция

$$f(z) = f_1(lz^\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k l^k z^k \tag{37}$$

целая и роста (ρ, σ).

Совершенно очевидно, что если бы вместо последовательности $\mu = \{\nu/\rho\}$ мы взяли произвольную последовательность $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$, то получили бы квазицелую функцию роста (ρ, σ) по степеням $\{\mu_\nu \rho\}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Функция $f_1(z)$ определенная в (28), где $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, имеет представление*

$$f_1(z) = \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^n\, p_n(zt, \sigma_n)\, dt, \quad \sigma < \sigma_n < n, \tag{38}$$

где

$$p_n(zt, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=1}^{n} (-\zeta + \nu)\, e_{1,\infty}(-\zeta, \mu')\, e_{1,\infty}(\zeta, \nu/\rho)}, \quad -\frac{1}{\rho} < \sigma < \widetilde{\mu}_1. \tag{39}$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует

$$\varphi(t) = \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_t^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, (t - \tau)^n\, d\tau.$$

Поэтому из (28) будем иметь

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 p_n(zt, \sigma)\, \frac{dt}{t} \int_t^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, (t - \tau)^n\, d\tau = \\ &= \frac{\pm 1}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, \mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma)\, d\tau, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\tau p_n(zt, \sigma)\, (t - \tau)^n\, \frac{dt}{t}. \tag{41}$$

Далее имеем

$$\mathcal{G}_n(z, \tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{z^{-\zeta}\, \zeta d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta, \mu')\, e_{1,\infty}(\zeta, \nu/\rho)} \int_0^\tau \frac{t^{-\zeta}\, (\tau - t)^n}{\Gamma(n+1)}\, \frac{dt}{t}.$$

С другой стороны, для $\operatorname{Re}(-\zeta - 1) > -1$ $(\sigma = \operatorname{Re}\zeta < 0)$

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\tau t^{-\zeta - 1}\, (\tau - t)^n\, dt = \frac{\tau^{-\zeta + n}}{\Gamma(n+1)}\, \frac{\Gamma(-\zeta)\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(-\zeta + n + 1)} = \frac{\tau^{-\zeta + n}}{\prod_{\nu=1}^{n} (-\zeta + \nu)}.$$

Из условия (13′) теоремы 2 и равенства

$$p_n(zt, \sigma) = \sum_{0 < \widetilde{\mu}_k < \sigma_n} b_k^*\, (z \cdot t)^{-\widetilde{\mu}_k} + p_n(zt, \sigma_n),$$

получим (38). Лемма 2 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Нам нужна оценка сверху для $|p_n(zt,\sigma_n)|$, где $0 < n - l_0 < \sigma_n < n$, а z принимает комплексные значения, для которых существует интеграл

$$|p_n(zt,\sigma_n)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_n-i\infty}^{\sigma_n+i\infty} \frac{(zt)^{-\zeta}\,d\zeta}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\,e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho)\,\prod_{\nu=1}^{n}(-\zeta+\nu)}. \tag{42}$$

Для этого оценим отдельно модули множителей подынтегральной функции в (42).

Заметим, что для $\zeta = \sigma_n + iy$, согласно теореме B, будем иметь

$$\frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n+iy,\nu/\rho)|} \le \frac{\exp\left(\sigma_n\sum_{\nu/\rho\le r}\frac{\rho}{\nu}\right)e^{c''\sigma_n}}{\Lambda(r,\{\nu/\rho\})} \le e^{c''\sigma_n}\,\frac{\exp(\rho\sigma_n\ln r)}{\sinh(\frac{\pi}{2}\rho|y|)} \tag{43}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{|e_{1,\infty}(\sigma_n+iy,\mu')|} &\le \frac{e^{c'\sigma_n}\,\Lambda(y,\mu')}{\Lambda^2(y,\mu')\,\exp((\rho-1)\sigma_n\ln r)} \le \\ &\le \frac{e^{c'\sigma_n}}{\exp((\rho-1)\sigma_n\ln r)}\cdot\frac{1}{\sinh(\frac{\pi}{2}(\rho-1)|y|)}.\end{aligned} \tag{44}$$

Оценим, наконец, сверху

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} = \frac{1}{\prod_{1\le\nu\le\sigma_n}[y^2+(\sigma_n-\nu)^2]^{1/2}\,\prod_{\sigma_n\le\nu\le n}[y^2+(\sigma_n-\nu)^2]^{1/2}}.$$

Разберем два случая : а) $|y| \ge \sigma_n$ и б) $|y| < \sigma_n$.

В первом случае будем иметь ($k_0 = n - \sigma_n$)

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le \frac{1}{|y|^{\sigma_n}}\,\frac{1}{(1+y^2)^{k_0/2}} \le e^{c''\sigma_n}\frac{\exp(-\sigma_n\ln r)}{(1+y^2)^{k_0/2}},$$

так как $r = (\sigma_n^2+y^2)^{1/2} \le \sigma_n + |y| < 2|y|$.

В случае б) будем иметь

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le \frac{c}{\prod_{0<\nu<\sigma_n}(\sigma_n-\nu)\,(1+y^2)^{k_0/2}} \le e^{c_2\sigma_n}\frac{\exp(-\sigma_n\ln r)}{(1+y^2)^{k_0/2}}.$$

Таким образом, в любом случае

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}|\zeta-\nu|} \le e^{c_0\sigma_n}\frac{\exp(-\sigma_n r)}{(1+y^2)^{k_0/2}}. \tag{45}$$

Далее, с учетом (43) — (45) и неравенства

$$0 < c' < \frac{\Lambda(y,\mu')}{\Lambda(y,\{y/(\rho-1)\})} \le c''$$

при $n - k_0 < \operatorname{Re} z = \sigma_n < n$, будем иметь

$$\left|\frac{1}{e_{1,\infty}(-\zeta,\mu')\,e_{1,\infty}(\zeta,\nu/\rho)\prod_{\nu=1}^{n}(-\zeta+\nu)}\right| \le$$
$$\le c_0\, e^{c\sigma_n}\frac{1}{\sinh(\frac{\pi}{2}\rho|y|)\sinh(\frac{\pi}{2}(\rho-1)|y|)}\cdot\frac{1}{1+y^2}.$$

Это значит, что если $|\arg z| \le \frac{\pi}{2}(2\rho-1)$, то

$$|p_n(zt,\sigma_n)| \le c_0' e^{c}|zt|^{-\sigma_n}\int_0^\infty \frac{e^{y|\arg z|}}{e^{\frac{\pi}{2}(2\rho-1)y}}\frac{dy}{1+y^2} \le$$
$$\le c_0\frac{e^{c\sigma_n}}{|z|^{\sigma_n}}t^{-\sigma_n}, \quad n-k_0<\sigma_n<n, \quad k_0\ge 4. \tag{46}$$

Возвращаясь к оценке $f_1(z)$, согласно (42), (46) и теореме 2, будем иметь

$$|f_1(z)| \le c e^{c'n}\frac{\overset{\circ}{M}_n}{|z|^{\sigma_n}}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2}(2\rho-1), \quad n=1,2,....$$

Заменяя z на lz^ρ, где $l>0$ – удобно выбранное число, для функции (37) получим

$$|f(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k^* z^k\right| \le \frac{\overset{\circ}{M}_n}{|z|^{\sigma_n\rho}} = \frac{|z|^{l_0}M_n^\rho}{|z|^{n\rho}}$$

для любого $n-k_0<\sigma_n<n$, если только

$$|\arg z| \le \frac{\pi}{2}\,\frac{2\rho-1}{\rho} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

где $\gamma\in(1/2,1]$, $l_0=\rho k_0\ge 4\rho$.

Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. In the first paper under the same title (this Journal, vol. 31, no. 6, pp. 11 – 25, 1996) the problem of maximal decrease rate of an entire or quasi–entire functions in an angular domain $|\arg z| \le \alpha/2$ for $0<\alpha<\pi$ was considered. In contrast to N. U. Arakelian's theorem, no assumption concerning positions of zeros of entire functions was done. The purpose was to clarify whether the condition $p(r)r^{-\pi/\alpha}\downarrow 0$ as $r\to\infty$ is essential, and to derive conditions under which the analogs of the Arakelian's results remain valid for entire and quasi–entire functions. The present paper considers the same problem for $\pi\le\alpha<2\pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. У. Аракелян, "Построение целых функций, равномерно убывающих в угле", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 1, № 3, стр. 162 — 191, 1966.
2. К. Н. Хачатрян, "Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скоростью", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 11, № 1, стр. 34 – 55, 1976.
3. Г. В. Бадалян, "О целых и квазицелых функциях конечного порядка, равномерно убывающих в угле, I", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 6, стр. 11 – 25, 1996.
4. С. Мандельбройт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.
5. Г. В. Бадалян, "Построение бесконечно дифференцируемой функции с нулевыми моментами производных", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 3, стр. 1 – 12, 1995.
6. Г. В. Бадалян, "Обобщенная квазианалитичность и критерий единственности для одного класса аналитических функций", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 38, № 2, стр. 339 – 378, 1974.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, Наука, 1968.

2 июля 1996

Ереванский государственный университет