

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

М. Г. Мурадян, А. Г. Мурадян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 1, 1997

В статье изучается матричное уравнение Риккати $\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t)$, где $Q = (Q_{ij})$ — $m \times m$ -мерная непрерывная матрица-функция, удовлетворяющая условиям $Q_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m Q_{ij} \geq 0$, $0 < \sup_i Q_{ii}(t) < \infty$, $i = 1, \dots, m$. Доказано, что это уравнение имеет ограниченное решение на полуоси, которое обладает свойствами $\rho_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m \rho_{ij} \leq 0$. Предлагается редукционный способ определения этого решения. В случаях постоянной и периодической Q решения можно получить итерационным методом. Доказано, что если Q — постоянная матрица, то квадратный корень из матрицы Q обладает вышеуказанными свойствами.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучается матричное уравнение Риккати

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1)$$

где $Q = (Q_{ij})$ — $m \times m$ -мерная непрерывная матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$Q_{ij} \leq 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad \sum_{j=1}^m Q_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$0 < \sup_i Q_{ii}(t) < \infty, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Помимо различных прикладных задач, обильным источником уравнений типа (1), (2) являются краевые задачи для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = Q(t)S + f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4)$$

решаемые методом прогонки или инвариантного погружения. К системе (4), (2) сводится, например, стационарное уравнение диффузии при дискретизации по одной из переменных (см. [1]). К системе (4), (2) можно свести также стационарное интегро-дифференциальное уравнение переноса, когда интегралы заменяются конечными суммами [2].

§1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Одним из основных результатов настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Уравнение (1) – (3) имеет ограниченное решение всей полуоси $[0, \infty)$, которое обладает свойствами

- а) $\rho_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$;
- б) $\sum_{j=1}^m \rho_{ij} \leq 0$ при $i = 1, \dots, m$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_i = \sqrt{\sup_t Q_{ii}(t)}$, $i = 1, \dots, m$, $\alpha_i > 0$. Пусть A – диагональная матрица с диагональными элементами α_i . Преобразуем уравнение (1) с помощью подстановки

$$\rho(t) = -A + AR(t), \quad (5)$$

в результате чего получим другое уравнение Риккати :

$$-\frac{dR}{dt} + AR + RA = RAR + A - A^{-1}Q(t). \quad (6)$$

Докажем, что уравнение (6) имеет решение $R = (R_{ij})$, удовлетворяющее условиям

$$R_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m R_{ij}(t) \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$-\frac{dR_{n+1}}{dt} + AR_{n+1} + R_{n+1}A = R_n AR_n + A - A^{-1}Q(t), \quad (8)$$

$$R_0(t) = 0, \quad R_{n+1}(t) = O(1), \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Из (8) следует, что

$$-\frac{d}{dt}(e^{-AT} R_{n+1} e^{-AT}) = e^{-AT} (R_n AR_n + A - A^{-1}Q(t)) e^{-AT}.$$

С учетом ограниченности матрицы-функции R_{n+1} на $[0, \infty)$, получаем

$$R_{n+1}(t) = \int_0^\infty e^{-A\tau} [R_n(t+\tau)AR_n(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)] e^{-A\tau} d\tau. \quad (9)$$

Легко проверить, что $A - A^{-1}Q(t) \geq 0$ (поэлементно). По индукции нетрудно проверить, что $R_n(t) \geq 0$, $0 \leq t < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Из (9) следует также, что последовательность $\{R_n(t)\}$ монотонно возрастает по n . Пусть σ — m -мерный вектор столбец, все компоненты которого равны 1. По индукции докажем, что $R_n\sigma \leq \sigma$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть это неравенство выполняется для некоторого n . Из (2) следует, что $A^{-1}Q(t)\sigma \geq 0$. Поэтому из (8) имеем

$$-\frac{dR_{n+1}\sigma}{dt} + AR_{n+1}\sigma + R_{n+1}A\sigma \leq R_nA\sigma + A\sigma.$$

Так как $R_{n+1} \geq R_n$, то

$$-\frac{dR_{n+1}\sigma}{dt} + AR_{n+1}\sigma \leq A\sigma$$

или

$$-\frac{d}{dt}(e^{-At}R_{n+1}\sigma) \leq e^{-At}A\sigma.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от t до ∞ , получаем

$$R_{n+1}\sigma \leq \left(\int_0^\infty e^{-A\tau} A d\tau \right) \sigma = \sigma.$$

Таким образом, последовательность $\{R_n(t)\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Поэтому существует предел $R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t)$, $0 \leq t < \infty$. Очевидно, $R(t)$ обладает свойствами (7). Переходя в (9) к пределу при $n \rightarrow \infty$ (в законности предельного перехода под знаком интеграла можно убедиться применением теоремы Лебега или Леви) получим интегральное уравнение

$$R(t) = \int_0^\infty e^{-A\tau} [R(t+\tau)AR(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)] e^{-A\tau} d\tau. \quad (10)$$

Из (10) имеем

$$e^{-At}R(t)e^{-At} = \int_0^\infty e^{-A\tau} [R(\tau)AR(\tau) + A - A^{-1}Q(\tau)] e^{-A\tau} d\tau.$$

Отсюда следует, что $R(t)$ дифференцируема. Дифференцированием легко убедиться, что $R(t)$ удовлетворяет уравнению (6). Доказательство теоремы 1 следует из (5) и (7).

Следуя [3], предел $R(t)$ последовательных приближений (8) назовем *каноническим решением* уравнения (6). Матрицу-функцию $\rho(t) = -A + AR(t)$, аналогично, назовем *каноническим решением уравнения Риккати* (1).

Замечание. Из хода доказательства теоремы 1 видно, что условие (2) можно заменить более общим условием : существуют положительные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ такие, что $\sum_{j=1}^m Q_{ij} \sigma_j \geq 0$. В этом случае утверждение б) заменяется условием

$$\sum_{j=1}^m \rho_{ij} \sigma_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть $Q(t)$ – симметричная матрица. Тогда $\rho(t)$ также симметрична. Для доказательства этого определим $\{R_n\}$ посредством (8). Очевидно, $AR_n(t) \rightarrow AR(t)$ при $n \rightarrow \infty$. Если умножить (9) слева на матрицу A , то по индукции легко проверить, что $AR_n(t)$ – симметрическая матрица, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, матрица $AR(t)$ также будет симметрической. Теперь доказательство утверждения следует из (5).

Каноническое уравнение $R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t)$ является минимальным неотрицательным решением уравнения (6). Для этого рассмотрим произвольное неотрицательное решение $\tilde{R}(t)$ уравнения (6). Неравенства $R_n(t) \leq \tilde{R}(t)$, $n = 1, 2, \dots$ можно проверить по индукции, используя (9). Следовательно, $R(t) \leq \tilde{R}(t)$.

§2. СВЯЗЬ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

Теорема 2. Пусть ρ – каноническое решение уравнения (1). Если s – решение задачи Коши

$$\frac{ds}{dt} = \rho(t)s, \quad s(0) = \alpha, \quad t > 0, \quad (11)$$

то одновременно s является решением краевой задачи

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = Q(t)s, \quad s(0) = \alpha, \quad S(t) = O(1) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть s – решение задачи Коши (11). Дифференцируя (11) и учитывая (1), находим, что s удовлетворяет уравнению (12). Докажем, что $s(t)$ ограничена при $t \rightarrow +\infty$. Для этого заметим, что $s(t) = S(t)\alpha$, где $S(t)$ – решение матричной задачи Коши

$$\frac{dS}{dt} = \rho(t)S, \quad S(0) = I, \quad t > 0, \quad (13)$$

I – единичная матрица. С учетом (5) нетрудно проверить, что (13) эквивалентно интегральному уравнению

$$S(t) = e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} AR(\tau) S(\tau) d\tau, \quad (14)$$

где R удовлетворяет условиям (7). Рассмотрим последовательные приближения

$$S_{n+1}(t) = e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} AR(\tau) S_n(\tau) d\tau, \quad S_0(t) = 0. \quad (15)$$

Пусть σ – m -мерный вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. По индукции нетрудно проверить, что последовательность матриц $\{S_n(t)\}$ неотрицательна, монотонно возрастает по n и ограничена: $S_n \sigma \leq \sigma$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому существует предел $S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$, $0 \leq t < \infty$. Стандартным путем можно убедиться, что $S(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (14), тем самым задаче Коши (13). Очевидно, $S(t) \geq 0$ и $S(t)\sigma \leq \sigma$. Следовательно $S(t)$ и вектор-функция $s(t)$ ограничены на полуоси $(0, \infty)$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Краевая задача (12) имеет решение, если матрица $Q(t)$ удовлетворяет условиям (2), (3).

Следствие 2. Если задача (12) однозначно разрешима, то решение уравнения (1), обладающее свойствами а) и б), единственно.

В математической экономике, теории случайных процессов, в математической медицине важную роль играют матрицы Q , удовлетворяющие условию (см. [4])

$$Q_{ij} \leq 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad \sum_{j=1}^m Q_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (16)$$

Из теоремы 1 следует, что при условиях (16), (3) уравнение Риккати (1) имеет ограниченное решение $\rho = (\rho_{ij})$, обладающее свойствами а) и б) на всей полуоси. Если задача (12) имеет единственное решение, то этот результат можно уточнить.

Следствие 3. Если задача (12), (16) однозначно разрешима, то каноническое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^m \rho_{ij}(t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $s(t)$ – решение задачи Коши (11) с $\alpha = \sigma = (1, \dots, 1)^T$. Из теоремы 2 следует, что $s(t)$ – решение уравнения (12). Из однозначной разрешимости задачи (12) следует, что $s(t) = \sigma$. Подставляя $s(t) = \sigma$ в (11), получим $\rho(t)\sigma = 0$. Следствие 3 доказано.

§3. КАНОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Определение канонического решения уравнения (1) сводится к определению канонического решения матричного уравнения (6). В интервале $0 \leq t \leq r$ рассмотрим задачу Коши

$$-\frac{dR}{dt} + AR + RA = RAR + A - A^{-1}Q(t), \quad R(r) = 0. \quad (18)$$

Аналогичным путем, как и в доказательстве теоремы 1, можно доказать лемму.

Лемма 1. Задача Коши (18) имеет единственное решение $R = (R_{ij})$, удовлетворяющее условию (7).

Отметим, что матрица-функция $R(t)$ является равномерным пределом на $[0, r]$ последовательных приближений

$$R_{n+1}(t) = \int_0^{r-t} e^{-A\tau} [R_n(t+\tau)AR_n(t+\tau) + A - A^{-1}Q(t+\tau)] e^{-A\tau} d\tau, \quad R_0(t) = 0. \quad (19)$$

Пусть $R(t, r)$ – решение задачи Коши (18) на $[0, r]$, $R(t, r) = 0$ при $t > r$. Используя последовательные приближения (9) и (19), нетрудно установить следующее утверждение.

Лемма 2. Каноническое решение $R(t)$ уравнения (6) является оценкой сверху для $R(t, \tau)$, т.е. $R(t, \tau) \leq R(t)$, $t \geq 0$.

Используя последовательные приближения типа $R(t, \tau_1)$ и $R(t, \tau_2)$ как и в (19), можно доказать следующее :

Лемма 3. Если $0 \leq t < \infty$, $\tau_2 > \tau_1$, то $R(t, \tau_2) \geq R(t, \tau_1)$.

Комбинируя вышеприведенные леммы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\tau_1, \tau_2, \dots$ – неограниченная, возрастающая последовательность положительных чисел. Пусть $R(t, \tau_n)$ – решение задачи Коши (18) на $[0, \tau_n]$ при $\tau = \tau_n$, и пусть $R(t, \tau_n) = 0$ при $t > \tau_n$. Тогда каноническое решение $R(t)$ уравнения (6) представляется в виде $R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(t, \tau_n)$, $0 \leq t < \infty$.

По теореме Дини на каждом компакте сходимость равномерная.

§4. СЛУЧАЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Периодические решения матричного уравнения Риккати возникают в различных приложениях (см. [5]). Пусть $Q(t)$ – периодическая матрица-функция с периодом T . По индукция легко проверить, что итерации $R_n(t)$, определенные посредством соотношений (9), также будут T -периодическими. Поэтому T -периодической будет также матрица функция $R(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t)$, т.е. каноническое решение уравнения (6). Следовательно, T -периодической будет также каноническое решение $\rho(t) = -A + AR(t)$ уравнения (1). Для определения последовательности $\{R_n(t)\}$ ($R_0(t) = 0$) к уравнению (8) присоединим условия периодичности

$$R_{n+1}(0) = R_{n+1}(T). \quad (20)$$

Из (8) следует, что для элементов R_{n+1}^{ij} матрицы R_{n+1}

$$R_{n+1}^{ij}(t) = e^{-(a_i + a_j)(T-t)} R_{n+1}^{ij}(T) + \int_t^T e^{-(a_i + a_j)(\tau-t)} C_n^{ij}(\tau) d\tau, \quad (21)$$

где $(C_n^{ij}) = R_n A R_n + A - A^{-1} Q(t)$. Из (20) и (21) имеем

$$R_{n+1}^{ij}(T) = \frac{1}{1 - e^{-(a_i + a_j)T}} \int_0^T e^{-(a_i + a_j)(\tau)} C_n^{ij}(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Таким образом, $R_n(t)$, $0 \leq t \leq T$, $n = 1, 2, \dots$ последовательно можно определить из (21) и (22).

§5. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ МАТРИЦЫ Q

Пусть Q – постоянная матрица, удовлетворяющая (2) и $Q_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, m$. Небольшие дополнительные усилия позволяют получить алгебраический результат – существование квадратного корня $\sqrt{Q}$, удовлетворяющего условиям типа (2).

Действительно, из теоремы 1 следует существование канонического решения уравнения Риккати (1) с матрицей Q , удовлетворяющей вышеуказанным условиям. Так как Q – постоянная матрица, то из результатов §4 следует, что каноническое решение ρ уравнения (1) тоже постоянная матрица. Поэтому ρ удовлетворяет уравнению $\rho^2 = Q$. Очевидно, матрица $-\rho$ – другой квадратный корень из Q . Из теоремы 1 следует, что элементы матрицы $-\rho$ удовлетворяют условиям типа (2). Согласно следствию 2, квадратный корень, обладающий этими свойствами, будет единственным, если задача (12) имеет единственное решение.

Отметим один важный случай, когда это условие выполнено. Пусть Q – неразложимая матрица (см. [6]). Если $\sum_{j=1}^m Q_{ij} > 0$ хотя бы для одного i , то вещественные части всех собственных значений матрицы Q положительны. Если $\sum_{j=1}^m Q_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, то 0 является простым собственным значением матрицы Q , а остальные собственные значения имеют положительные вещественные части (см. [6]). В обоих случаях, используя явный вид решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, можно убедиться, что задача (12) имеет единственное решение.

Матрицы, удовлетворяющие условию (2), иногда называют M -матрицами. Извлечению квадратного корня из M -матриц посвящена работа [7].

Из (8) следует, что квадратный корень является пределом следующих итераций :

$$AR_{n+1} + R_{n+1}A = R_n AR_n + A - A^{-1}Q, \quad R_0 = 0.$$

Отметим, что общее решение системы (4) на интервале $a \leq t \leq b$ с $Q = \text{Const}$, $f = 0$ пишется в виде

$$s(t) = e^{-\sqrt{Q}(t-a)}\alpha + e^{-\sqrt{Q}(b-t)}\beta,$$

где α и β – произвольные m -мерные векторы.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения результатов работы.

ABSTRACT. The paper studies Riccati matrix equation $\frac{d\rho}{dt} + \rho^2 = Q(t)$, where $Q = (Q_{ij})$ is $m \times m$ -dimensional continuous matrix-valued function, satisfying the conditions $Q_{ij} \leq 0$ for $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m Q_{ij} \geq 0$, $0 < \sup_i Q_{ii}(t) < \infty$, $i = 1, \dots, m$. It is proved that this equation has a bounded solution on half-line, possessing the properties $\rho_{ij} \geq 0$ for $i \neq j$, $\sum_{j=1}^m \rho_{ij} \leq 0$. These solutions can be obtained by a reduction method. In the cases of constant and periodic Q the solutions can be obtained by iterations. It is proved that if Q is a constant matrix, then the square root of the matrix Q possesses the above properties.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Э. Энджел, Р. Белман, Динамическое Программирование и Уравнения в Частных Производных, Мир, М., 1974.
2. С. Чандрасекар, Перенос Лучистой Энергии, ИЛ, М., 1953.
3. Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, "Перенос излучения в плоском слое и уравнение Амбарцумяна", В сб. Принцип Инвариантности и Его Приложения, стр. 326 - 333, Ереван, 1989.
4. R. Bellman, Mathematical Methods in Medicine, World Scientific, 1983.
5. М. Г. Мурадян, "Периодические решения матричного уравнения Риккати", Диффер. ур., т. 20, № 12, стр. 2176 - 2178, 1984.
6. В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, Матрицы и Вычисления, Наука, М., 1984.
7. G. Alefeld, N. Schneider, "On square roots of M -matrices", Linear Alg. and Appl., vol. 42, pp. 119 - 132, 1982.

14 августа 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении