РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Л. Г. Арабаджян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

Изучается проблема существования нетривиальных решений уравнения $G(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(G(t))\,dt$ относительно G. Предполагается, что ядро K – четная неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условию консервативности, а функция Y, определенная на $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$, имеет вид $Y(x) = x - \omega(x)$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau)$. Строится однопараметрическое семейство решений этого уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается скалярное нелинейное уравнение

$$G(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(G(t))\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0,\infty) \tag{1}$$

относительно искомой функции G, где ядро K – четная функция, удовлетворяющая условиям

$$K \geq 0, \quad K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,dt = 1, \tag{2}$$

а функция Y, определенная на $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$ при некотором $\tau \geq 0$ имеет вид

$$Y(x) = x - \omega(x), \quad x \in \mathbb{R}_\tau. \tag{3}$$

Предполагаем, что функция ω обладает свойствами

$$\omega \geq 0, \quad \omega \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_\tau, \quad \omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau). \tag{4}$$

В работе автора [4] было построено семейство решений уравнения (1) – (4), зависящее от параметра. В настоящей работе решается аналогичная задача при более слабых ограничениях на функцию Y.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1°. Наряду с (1) рассмотрим следующее однородное консервативное уравнение Винера-Хопфа :

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{5}$$

с тем же, что и в (1) ядром K. В работах [1], [2] (см. также [5]) построено положительное, абсолютно непрерывное, монотонно возрастающее неограниченное решение уравнения (5), (2). Решение этого уравнения определяется с точностью до числового множителя. Из результатов работ [1], [2] следует, что решение S уравнения (5), (2), удовлетворяющее условию $S(0) = \tau_0 > 0$, обладает следующими свойствами :

a) $\tau_0 \le S(x)\uparrow, \quad x \in \mathbb{R}^+$;

b) существуют $a, b \in \mathbb{R}^+$ такие, что $S(x) \le ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^+$;

c) $S(x) \ge \dfrac{\tau_0 x}{\sqrt{\nu_2}}$ при $x \in \mathbb{R}^+$, где $\nu_2 = \displaystyle\int_0^\infty t^2 K(t)\,dt$;

d) $$S(x) = \tau_0\left(1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt\right), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{6}$$

где Φ – решение уравнения

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

причем V определляется из нелинейного уравнения Енгибаряна

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{8}$$

Согласно результатам работ [1], [2], для функции K, удовлетворяющей условию (2), существует решение уравнения (8), причем

$$0 \le V \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty V(t)\,dt = 1.$$

При этих условиях решение Φ уравнения (8) существует и $\Phi \notin L_1(\mathbb{R}^+)$.

Выберем параметр $\tau_0 \ge \tau$ так, чтобы

$$\omega(\tau_0) + \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0}^\infty \omega(t)\,dt \le \frac{\tau_0}{2}. \tag{9}$$

Такой выбор возможен ввиду $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau)$ и соотношения $\omega(\tau_0)/\tau_0 \to 0$ при $\tau_0 \to +\infty$.

2°. В работе [3] получено достаточное условие существования положительного решения уравнения

$$B_*(x) = \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t) B_*(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{10}$$

с ядром, удовлетворяющим условиям (2) и $0 < \lambda(x) \le 1$. Там же доказано, что при условии

$$\int_0^\infty [1-\lambda(t)] t\, dt < \infty \tag{10'}$$

существует неотрицательное решение уравнения (10), (2), для которого справедливо асимптотическое соотношение $B_*(x) = O(x)$ при $x \to \infty$.

Пусть S – решение уравнения (5) со свойствами a) – d). Тогда функция $\omega(S(x))$ определена на $\mathbb{R}^+$ и принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^+)$. Действительно, в силу свойства c) и монотонности функции ω, имеем

$$\int_0^\infty \omega(S(t))\, dt \le \int_0^\sigma \omega(S(t))\, dt + \int_\sigma^\infty \omega\left(\frac{\tau_0 t}{\sqrt{\nu_2}}\right) dt < \infty, \quad \sigma = \sqrt{\nu_2}.$$

В равенстве (10) в качестве λ выберем функцию

$$\lambda(x) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{\omega(S(x))}{S(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Покажем, что для выбранного λ выполняются условия (10') и $0 < \lambda(x) \le 1$ при $x \in \mathbb{R}^+$ и, следовательно, существует положительное решение B_* соответствующего уравнения (10). Так как функции ω и S неотрицательны, то из (9) следует, что для $x \in \mathbb{R}^+$ $0 < \lambda(x) \le 1$. Выше было показано, что $\omega(S(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Поэтому

$$\int_0^\infty [1-\lambda(t)] S(t)\, dt < \infty,$$

что, в силу c), влечет за собой неравенство (10'). Итак, если λ выбрать согласно (11), то существует положительное решение B_* уравнения (10), (2). Оценим это решение. С этой целью представим B_* в виде $B_*(x) = 2S(x) - \rho(x)$. Относительно функции ρ получаем равенство

$$\rho(x) = 2\omega(S(x)) + \lambda(x) \int_0^\infty K(x-t)\rho(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Для оценки решения B_* достаточно оценить функцию ρ. В силу $\lambda \le 1$, на $\mathbb{R}^+$ функция ρ мажорируется п.в. на $\mathbb{R}^+$ решением (BS) неоднородного консервативного уравнения Винера–Хопфа (см. [2])

$$f(x) = 2\omega(S(x)) + \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Неравенства

$$2S(x) - f(x) \le B_*(x) \le 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

следуют из вышеуказанных фактов.

3°. Оценим решение уравнения (12), соответствующее уравнению (10). При этом воспользуемся вольтерровской факторизацией инегрального оператора Винера–Хопфа (см. [1], [2]). Указанная факторизация сводит решение уравнения (12) к последовательному решению следующих двух уравнений типа Вольтерра :

$$\varphi(x) = 2\omega(S(x)) + \int_x^\infty V(t-x)\varphi(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{15}$$

где V – решение уравнения (8). Согласно результатам работ [1], [2], решение уравнения (14) можно представить в виде

$$\varphi(x) = 2\left[\omega(S(x)) + \int_0^\infty \Phi(t)\omega(S(t+x))\,dt\right], \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

где Φ – решение уравнения (7). Учитывая монотонность функций ω, S и соотношения (6), (7), из (16) мы получаем следующую цепочку неравенств :

$$\varphi(x) \le 2\left[\omega(S(x)) + \int_0^\infty \Phi(t)\omega(S(t))\,dt\right] \le$$

$$\le 2\left[\omega(\tau_0) + \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau_0}^\infty \omega(t)\,dt\right] \le \tau_0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+.$$

Поэтому для решения f уравнения (15) (которое является также решением уравнения (12), см. [1], [2]) справедлива оценка

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x \Phi(x-t)\varphi(t)\,dt \le \tau_0\left(1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt\right) \equiv S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{17}$$

Из оценок (13) и (17) получаем

$$S(x) \leq B_*(x) \leq 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{18}$$

4°. Наряду с уравнениями (5) и (10) рассмотрим урвнение

$$B(x) = \int_0^\infty \lambda(t)K(x-t)B(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{19}$$

где ядро K совпадает с ядрами уравнений (5), (10) или (1) и удовлетворяет условию (2), а λ определена согласно (11). Пусть B_* – вышеуказанное решение уравнения (10). Тогда функция $B = B(x) \stackrel{def}{=} \dfrac{B_*(x)}{\lambda(x)}$ будет удовлетворять уравнению (19). Для B имеем оценки (см. также (18))

$$\tau_0 \leq S(x) \leq B(x) \leq 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{20}$$

Действительно, так как $\lambda \leq 1$, то очевидно, что $B(x) \geq B_*(x)$ на $\mathbb{R}^+$. С другой стороны, согласно результатам работ [2], [3] итерации

$$\begin{gathered} B_*^{(n+1)}(x) = \lambda(x)\int_0^\infty K(x-t)B_*^{(n)}(t)\,dt, \\ B_*^{(0)}(x) \equiv 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,\ldots \end{gathered} \tag{21}$$

монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^+$ и $B_*^{(n)} \to B_*$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. Поэтому для $n = 1$ п.в. на $\mathbb{R}^+$ имеем

$$B_*(x) \leq B_*^{(1)}(x) = \lambda(x) \cdot 2S(x),$$

что влечет за собой неравенство $B(x) \leq 2S(x)$, т.е. (20).

§2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть существует интеграл $\nu_2 = \int\limits_0^\infty t^2K(t)\,dt$. Тогда уравнение (1) – (4) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, причем для любой функции G из этого семейства справедливо*

$$G(x) = O(x) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим итерации

$$\begin{gathered} G^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(G^{(n)}(t))\,dt, \\ G^{(0)}(x) = 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,\ldots \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь S – решение соответствующего уравнения (5) с $S(0) = \tau_0$. Методом индукции покажем, что для любого $n = 0, 1, ...$

$$G^{(n)}(x) \geq B(x) \geq \tau_0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{24}$$

Для $n = 0$ имеем, по определению, $G^{(0)}(x) = 2S(x)$. В этом случае неравенство (24) очевидно. Если (24) выполняется для некоторого $n \geq 1$, то из (23) получаем

$$G^{(n+1)}(x) \geq \int_0^\infty K(x-t)B(t)\,dt - \int_0^\infty K(x-t)\omega(G^{(n)}(t))\,dt. \tag{25}$$

С учетом легко проверяемых оценок

$$\frac{\omega(B(x))}{B(x)} \leq \frac{\omega(S(x))}{S(x)}, \quad \omega(G^{(n)}(x)) \leq \omega(B(x)) \leq (1-\lambda(x))B(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

из (25) получаем $G^{(n+1)}(x) \geq B(x)$. Так как функция Y монотонно возрастает на $\mathbb{R}_{\tau_0}$, то итерации (23) монотонно убывают по n на $\mathbb{R}^+$. Действительно, для $n = 1$ имеем

$$G^{(1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t)Y(2S(t))\,dt = 2S(x) - \int_0^\infty K(x-t)\omega(2S(t))\,dt \leq 2S(x),$$

т.е. $G^{(1)}(x) - G^{(0)}(x) \leq 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$.

Пусть теперь $n > 1$. Тогда из (23), в силу монотонности функции Y на $\mathbb{R}_{\tau_0}$, получем

$$G^{(n+1)}(x) - G^{(n)}(x) =$$

$$= \int_0^\infty K(x-t)\left[Y(G^{(n)}(t)) - Y(G^{(n-1)}(t))\right] dt \leq 0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

если только $G^{(n)}(x) - G^{(n-1)}(x) \leq 0$. Таким образом, п.в. на $\mathbb{R}^+$ имеем $G^{(n)} \downarrow$ по n и $G^{(n)}(x) \geq B(x)$. Итак, п.в. на $\mathbb{R}^+$ существует предел $G(x) = \lim\limits_{n\to\infty} G^{(n)}(x)$. Покажем, что предельная функция G удовлетворяет уравнениям (1) – (4). Ввиду монотонности и непрерывности функции Y получаем, что для любого фиксированного значения x из $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^\infty K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right) dt \geq 0, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

а последовательность $K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right)$, монотонно убывая, сходится к функции $K(x-t)Y(G(t))$ при $n \to \infty$. В силу теоремы Леви (см. [5])

$$\int_0^\infty K(x-t)Y\left(G^{(n)}(t)\right) dt \to \int_0^\infty K(x-t)Y(G(t)\,dt, \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+.$$

Совершая в (23) предельный переход, получаем (1) относительно предельной функции G.

Теперь покажем, что различным значениям параметра τ_0 соответствуют различные решения уравнения (1) – (4). Пусть $\tau_0 \leq \tau_1 < \tau_2$. Обозначим через S_1 и S_2 решения уравнения (5), соответствующие параметрам τ_i, $i = 1, 2$, т.е. $S_i(0) = \tau_i$ и рассмотрим разность $S_0(x) = S_2(x) - S_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Согласно соотношению (6) $S_0 > 0$ на $\mathbb{R}^+$ и $S_0(0) = \tau_2 - \tau_1$. Построим итерации (23), где в качестве $G^{(0)}$ выбрана функция $2S_1$ или $2S_2$. Итерации (23) и предел, соответствующий функции $G^{(0)} = 2S_i$, соответственно обозначим через $G_i^{(n)}$ и G_i, $i = 1, 2$. Докажем по индукции, что для любого $n = 0, 1, ...$

$$G_2^{(n)}(x) - G_1^{(n)}(x) \geq 2S_0(x) > 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+. \tag{26}$$

Для $n = 0$ это очевидно. Пусть неравенство (26) выполняется для некоторого $n \geq 1$. Тогда из (23) получаем

$$G_2^{(n+1)}(x) - G_1^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty K(x-t)\left[G_2^{(n)}(t) - G_1^{(n)}(t)\right] dt +$$
$$+ \int_0^\infty K(x-t)\left[\omega(G_1^{(n)}(t)) - \omega(G_2^{(n)}(t))\right] dt.$$

Учитывая монотонность функции ω, оценки (26) и тот факт, что S_0 – решение уравнения (5), получаем $G_2^{(n+1)}(x) - G_1^{(n+1)}(x) \geq 2S_0(x) > 0$ п.в. на $\mathbb{R}^+$. В пределе при $n \to \infty$ имеем

$$G_2(x) - G_1(x) \geq 2S_0(x) > 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

что означает $G_1 \neq G_2$ на $\mathbb{R}^+$ при $\tau_1 \neq \tau_2$. Асимтотическое соотношение (22) следует из оценок

$$S(x) \leq G^{(n)}(x) \leq 2S(x), \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}^+,$$

которые слеуют из (20), (23), (24) и свойства b) функции S. Теорема доказана.

Замечание. Записав соотношения (23) в виде

$$G^{(n+1)}(x) = \int_{-\infty}^{x} K(t)Y(G^{(n)}(x-t))\, dt,$$
$$G^{(0)}(x) = 2S(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, ...,$$

методом индукции можно доказать, что функции $G^{(n)}$, $n = 0, 1, \ldots$ монотонно возрастают по x на $\mathbb{R}^+$ (так как $G^{(0)}(x) = 2S(x) \uparrow$ на $\mathbb{R}^+$). Поэтому предельная функция G также монотонно возрастает по x.

Отмемтим, что на основе результатов работы [3] можно доказать нетривиальную разрешимость уравнения

$$\widetilde{G}(x) = \lambda_1(x) \int_0^\infty \lambda_2(t) K(x-t) Y\left(\widetilde{G}(t)\right)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где функции K и Y удовлетворяют условиям (2) – (4), а функции λ_j – условиям

$$0 \le \lambda_j(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_j \ne 0, \quad \int_0^\infty t[1 - \lambda_j(t)]\, dt < \infty, \quad j = 1, 2.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения.

ABSTRACT. The problem of existence of nontrivial solutions of the equation $G(x) = \int\limits_0^\infty K(x-t)Y(G(t))\, dt$ with respect to G is studied. The main assumption is that the kernel K is an even nonnegative function from $L_1(\mathbb{R})$, satisfying the conservativity condition and the function Y defined on $\mathbb{R}_\tau = [\tau, \infty)$ has the form $Y(x) = x - \omega(x)$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}_\tau) \cap C(\mathbb{R}_\tau)$. A one-parameter family of positive solutions of this equation is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сборник, т. 97, № 5, стр. 35 – 58, 1975.
2. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники ВИНИТИ АН СССР, т. 22, стр. 175 – 244, М., 1984.
3. Л. Г. Арабаджян, "Об одном интегральном уравнении теории переноса излучения в неоднородной среде", Диффер. уравн., т. 23, № 9, стр. 1619 – 1622, 1984.
4. Л. Г. Арабаджян, "О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки", Украин. Мат. Журнал, т. 41, № 12, стр. 1587 – 1595, 1989.
5. F. Spitzer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density", Duke. Math. Jour., vol. 24, pp. 327 – 343, 1957.
6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, Наука, М., 1976.

20 июня 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении