ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРАТНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ К ОДНОРОДНОМУ УРАВНЕНИЮ СВЕРТКИ

Б. Н. Енгибарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе изучается однородное интегральное уравнение $f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda\int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt$, где $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, $K \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. С помощью трехфакторного разложения доказывается, что это уравнение обладает нетривиальным непрерывным решением f на $[0,\infty)$. Установлены некоторые свойства f.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению следующего однородного интегрального уравнения на полуоси и связанной с ним факторизационной задачи :

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda\int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt. \tag{0.1}$$

Предполагается, что $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, а ядро K удовлетворяет условиям

$$K \geq 0, \quad K \in L_1(-\infty,\infty), \quad \mu \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1. \tag{0.2}$$

Применяемый подход основан на факторизационном методе работы [1]. Будет показано, что при выполнении некоторых дополнительных условий уравнение (0.1) имеет нетривиальное непрерывное на $[0,\infty)$ решение при произвольном $\lambda \in \mathbf{C}$. Специально изучается частный случай $K_0(x) = K(x)$, $x > 0$, который представляет существенный интерес в физической кинетике (см. [2], [3]). Строится положительное решение этого уравнения при $0 \leq \lambda \leq 1$.

§1. ФАКТОРИЗАЦИЯ

1. Функциональные пространства. Классы операторов. Будем полагать, что $E^+ = E([0,\infty))$ – одно из функциональных банаховых пространств L_p $(1 \le p < \infty)$, $M^+ \equiv L_\infty^+$, C_u^+, $C_0^+ \subset C_u^+$. Здесь C_u – пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций, имеющих конечный предел в ∞, а C_0 состоит из непрерывных на $[0,\infty)$ функций, стремящихся к 0 в ∞. Пусть L_+^{loc} – класс функций на $[0,\infty)$, интегрируемых по Лебегу на каждом конечном промежутке $[0,r]$, $r < \infty$.

Введем в рассмотрение следующие классы интегральных операторов свертки на полуоси $[0,\infty)$. Пусть Ω – класс интегральных операторов Винера–Хопфа, а $\Omega^\pm \subset \Omega$ – алгебры вольтерровых операторов :

$$\Omega = \left\{\mathcal{K} : \ (\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt, \quad K \in L_1(-\infty,\infty)\right\}, \tag{1.1}$$

$$\Omega^+ = \left\{\mathcal{V}_+ : \ (\mathcal{V}_+f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt, \quad V_+ \in L_1^+\right\}, \tag{1.2}$$

$$\Omega^- = \left\{\mathcal{V}_- : \ (\mathcal{V}_-f)(x) = \int_x^\infty V_-(x-t)f(t)\,dt, \quad V_- \in L_1^+\right\}.$$

Введем также следующий класс Ω_0 интегральных операторов с ядрами, зависящими от суммы аргументов :

$$\Omega_0 = \left\{\mathcal{K}_0 : \ (\mathcal{K}_0f)(x) = \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt, \quad K_0 \in L_1^+\right\}. \tag{1.3}$$

Операторы из Ω и Ω_0 ограниченно действуют в E^+. Оператор $\mathcal{K}_0 \in \Omega_0$ является вполне непрерывным (компактным) в L_1^+, C_0^+ и в ряде других пространств (см. [4]). Интегральный оператор Винера–Хопфа $\mathcal{K} \ne 0$ не компактен ни в одном из пространств E^+. Оператор $\mathcal{K}_0 \in \Omega_0$ переводит C_u^+ в C_0^+. Кроме E^+, операторы из Ω^+ нами будут рассмотрены также в некоторых других классах функций из L_1.

Уравнение (0.1) в операторной форме имеет вид

$$(I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0)f = 0, \tag{1.4}$$

где I – единичный оператор, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_0$ определяются согласно (1.1) и (1.3), соответственно, причем выполняется условие консервативности (0.2).

2. Факторизация оператора $I - \mathcal{K}$. Оператор $I - \mathcal{K}$ допускает факторизацию

$$I - \mathcal{K} = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+), \tag{1.5}$$

где $\mathcal{V}_\pm \in \Omega^\pm$ – операторы вида (1.2). Пара (V_+, V_-) ядер $\mathcal{V}_\pm$ является *каноническим решением* следующей системы *нелинейных уравнений факторизации* Н. Б. Енгибаряна (см. [5], [6]) :

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\pm(x+t)V_\mp(t)\,dt. \tag{1.6}$$

Функции $\mathcal{V}_\pm$ обладают следующими свойствами :

$$V_\pm \geq 0, \quad \gamma_\pm \equiv \int_0^\infty V_\pm(x)\,dx \leq 1, \quad (1-\gamma_-)(1-\gamma_+) = 0. \tag{1.7}$$

Если $\gamma_+ < 1$ (или $\gamma_- < 1$), то оператор $\mathcal{V}_+$ (или $\mathcal{V}_-$) сжимающий в E^+, а $I - \mathcal{V}_+$ (или $I - \mathcal{V}_-$) обладает положительным обратным. Если $\gamma_+ = 1$ (или $\gamma_- = 1$), то оператор $I - \mathcal{V}_+$ (или $I - \mathcal{V}_-$) необратим ни в одном из пространств E^+. Если K – четная функция *(симметрический случай)*, то $V_\pm = V$ и $\gamma_\pm = 1$.

Пусть первый момент ν_1 функции K

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx$$

существует и интеграл сходится абсолютно или в смысле главного значения Коши. Тогда

$$\begin{aligned} &а)\ \ \nu_1 > 0 \iff \gamma_+ = 1, \quad \gamma_- < 1,\\ &б)\ \ \nu_1 < 0 \iff \gamma_+ < 1, \quad \gamma_- = 1,\\ &в)\ \ \nu_1 = 0 \iff \gamma_\pm = 1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

3. Факторизация оператора $I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0$. Мы будем рассматривать трехфакторное разложение оператора $I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0$, следуя работе [1], в которой впервые было построено такое разложение. Начнем с рассмотрения факторизации

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+ - \lambda\mathcal{U}_0), \tag{1.9}$$

где $\mathcal{V}_\pm$ суть операторы, фигурирующие в (1.5), а $\mathcal{U}_0 \in \Omega_0$ – искомый оператор. Ядро U_0 оператора $\mathcal{U}_0$ определяется из уравнения

$$U_0(x) = K_0(x) + \int_x^\infty V_-(t-x)U_0(t)\,dt. \tag{1.10}$$

При $\gamma_- < 1$ уравнение (1.10) имеет единственное решение $U_0 \in L_1^+$. Если $\gamma_- = 1$, то для любого $K_0 \in L_1^+$ уравнение (1.10) обладает так называемым ***основным решением*** U_0 (см. [6]), причем

$$\int_0^x |U_0(t)|\,dt = o(x), \quad x \to \infty. \tag{1.11}$$

Обозначим через $m_k(f)$ конечный момент порядка $k \geq 0$ функции f на $[0,\infty)$:

$$m_k(f) = \int_0^\infty x^k f(x)\,dx \leq \infty.$$

Пусть $\gamma_- = 1$, функция $|K_0|$ имеет конечные моменты до порядка n включительно : $\alpha_n \equiv m_n(|K_0|) < \infty$. Тогда функция $|U_0|$ имеет конечные моменты

$$\beta_k \equiv m_k(|U_0|) < \infty, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

В частности, из $\alpha_1 < \infty$ следует $U_0 \in L_1^+$. Основное решение уравнения (1.10) имеет вид

$$U_0(x) = K_0(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t)K_0(x+t)\,dt, \tag{1.12}$$

где резольвентная функция Φ_- определяется из следующего уравнения восстановления :

$$\Phi_-(x) = V_-(x) + \int_0^x \Phi_-(t)V_-(x-t)\,dt. \tag{1.13}$$

Рассмотрим теперь факторизацию

$$I - \mathcal{V}_- - \lambda\mathcal{U}_0 = (I - \lambda\mathcal{V}_0)(I - \mathcal{V}_+). \tag{1.14}$$

Как показано в [1], ядро V_0 оператора $\mathcal{V}_0$ определяется из уравнения

$$V_0(x) = U_0(x) + \int_x^\infty V_+(t-x)V_0(t)\,dt. \tag{1.15}$$

Уравнения (1.10) и (1.15) имеют одинаковую структуру. Поэтому сформулированные выше факты по уравнению (1.10) переходят к (1.15). Пусть выполнено одно из следующих условий :

а) $\gamma_\pm = 1$ и $\alpha_2 < \infty$,

б) либо $\gamma_+ < 1$ либо $\gamma_- < 1$ и $\alpha_1 < \infty$.

Тогда $V_0 \in L_1^+$ и существует факторизация (1.14). Из (1.9) и (1.14) имеем

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0)(I - \mathcal{V}_+). \tag{1.16}$$

Замечание. Факторизацию (1.16) можно было построить по другой последовательности, сперва построив факторизацию

$$I - \mathcal{K} - \lambda\mathcal{K}_0 = (I - \mathcal{V}_- - \lambda\widetilde{\mathcal{U}}_0)(I - \mathcal{V}_+),$$

а затем факторизацию

$$I - \mathcal{V}_- - \lambda\widetilde{\mathcal{U}}_0 = (I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0).$$

§2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (0.1)

Используя факторизацию (1.16), вместо (0.1) будем иметь

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \lambda\mathcal{V}_0)h = 0, \tag{2.1}$$

где новая искомая функция h связана с f соотношением

$$(I - \mathcal{V}_+)f = h. \tag{2.2}$$

В §1 было отмечено, что операторы из Ω_0 компактны в C_u^+. Обозначим через Λ множество характеристических чисел оператора $\mathcal{V}_0$.

Лемма 1. *Пусть $\gamma_- = 1$. Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ существует нетривиальное решение $h \in C_u^+$ уравнения (2.1).*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\lambda \in \Lambda$. Тогда в качестве h можно взять нетривиальное решение $h = h_\lambda \in C_u^+$ уравнения

$$h(x) = \lambda \int_0^\infty V_0(x+t)h(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Имеем

$$|h(x)| \le |\lambda| a\eta(x), \tag{2.4}$$

где

$$a = \sup_{x \in [0,\infty)} |h(x)| < \infty, \quad \eta(x) = \int_x^\infty |V_0(t)|\, dt \in C_0^+.$$

Так как $\eta \in C_0^+$, то и $h \in C_0^+$. Функцию h можно нормировать условием $a = 1$. Пусть теперь $\lambda \notin \Lambda$. Обозначим

$$F = (I - \lambda \mathcal{V}_0)h. \tag{2.5}$$

Функция F удовлетворяет однородному уравнению

$$F(x) = \int_0^\infty V_-(t) F(x+t)\, dt. \tag{2.6}$$

Из равенства $\gamma_- = 1$ следует, что функция $F(x) \equiv 1$ является решением уравнения (2.6). Нам остается построить функцию h из уравнения

$$h(x) = 1 + \lambda \int_0^\infty V_0(x+t) h(t)\, dt. \tag{2.7}$$

Так как $\lambda \notin \Lambda$, то уравнение (2.7) имеет единственное решение $h \in C_u^+$. Лемма 1 доказана.

Из (2.7) имеем

$$h(x) = 1 + h_0(x), \quad h_0(x) = \lambda \int_0^\infty V_0(x+t) h(t)\, dt \tag{2.8}$$

и

$$|h_0(x)| \le |\lambda| a \eta(x). \tag{2.9}$$

Для построения нетривиального решения уравнения (0.1) с помощью уже найденной функции h нам остается решить уравнение восстановления (2.2), т.е. уравнение

$$f(x) = h(x) + \int_0^x V_+(x-t) f(t)\, dt. \tag{2.10}$$

Решение уравнения (2.10) имеет вид

$$f(x) = h(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t) h(t)\, dt, \tag{2.11}$$

где резольвентная функция Φ_+ определяется из уравнения

$$\Phi_+(x) = V_+(x) + \int_0^x V_+(x-t) \Phi_+(t)\, dt. \tag{2.12}$$

Если $\gamma_+ < 1$, то $\Phi_+ \in L_1^+$, $f \in C_u^+$ при $\lambda \notin \Lambda$ и $f \in C_0^+$ при $\lambda \in \Lambda$. Если $\gamma_+ = 1$, то можно использовать известные свойства решений консервативных уравнений восстановления (2.10) и (2.12) (см. [6] – [8]). При $\lambda \notin \Lambda$ будем иметь

$$f(x) = S(x) + S_1(x), \tag{2.13}$$

где S – решение уравнения

$$S(x) = 1 + \int_0^x V_+(x-t)S(t)\,dt, \tag{2.14}$$

а S_1 – решение уравнения

$$S_1(x) = h_0(x) + \int_0^x V_+(x-t)S_1(t)\,dt. \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.14) (при $\gamma_+ = 1$) является абсолютно непрерывной неубывающей функцией на $[0,\infty)$, причем

$$S(x) = 1 + \int_0^x \Phi_-(t)\,dt, \quad S(x) = \frac{x}{\alpha_1} + o(x), \quad x \to \infty, \tag{2.16}$$

где $\alpha_1 = m_1(V_+)$ – первый момент функции V_+. При $\alpha_1 = \infty$ числу α_1^{-1} приписывается значение 0. Из $h_0 \in C_0^+$, с учетом леммы 3.1 из [6], следует, что решение уравнения (2.15) обладает свойством

$$S_1(x) = o(S(x)), \quad x \to \infty. \tag{2.17}$$

Пусть теперь $\lambda \in \Lambda$. Тогда (2.11) имеет решение f, которое обладает перечисленными выше свойствами функции S_1. Нами доказана

Теорема 1. *Пусть в уравнении (0.1) выполняется одно из условий*

а) $\gamma_\pm = 1$ и функция K_0 обладает конечным моментом второго порядка;

б) $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ и функция K_0 обладает конечным моментом первого порядка.

Тогда для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнение (0.1) имеет нетривиальное решение $f \in \mathbb{C}[0,\infty)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} O(x), & x \to \infty \quad \text{при } \gamma_+ = 1, \\ O(1), & x \to \infty \quad \text{при } \gamma_+ < 1. \end{cases} \tag{2.18}$$

Замечание. Условия теоремы 1 можно сформулировать в терминах функции K. Так, если $K(-x) = K(x)$ или $\nu_1 = 0$, то $\gamma_\pm = 1$. Если же существует $\nu_1 < 0$, то $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ (см. §1).

§3. СЛУЧАЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЯДРА

В настоящем параграфе будет рассмотена задача построения положительного решения уравнения (0.1). Будем считать, что

$$K_0(x) \geq 0 \tag{3.1}$$

и

$$K_0(x) = K(x), \quad x > 0. \tag{3.2}$$

Этот частный случай представляет большой интерес в кинетической теории газов. Полученные результаты содержат обобщение некоторых результатов работы [3], в которой данная задача изучена в случае, когда K – нечетная функция, вполне монотонная на положительной полуоси и обладающая конечными моментами всех порядков; предполагается также, что $0 < \lambda < 1$. Из (3.1) имеем $V_0 \geq 0$. Если $\gamma_- < 1$ или $m_1(K_0) < \infty$, то существует решение $U_0 \in L_1^+$ уравнения (1.10) и $U_0 \geq 0$. Если же выполняется равенство (3.2), то из (1.10) и (1.6) имеем

$$U_0(x) = V_+(x) \geq 0,$$

то есть уравнение (1.10), (3.2) имеет основное решение $U_0 \in L_1^+$, $U_0 \geq 0$, независимо от существования моментов функции $K_0 = K$ или значения γ_-.

Для построения факторизации (1.16) нам остается рассмотреть уравнение (1.15). Если $\gamma_+ < 1$, то (1.15) имеет решение

$$V_0(x) \in L_1^+, \quad V_0(x) \geq 0. \tag{3.3}$$

Если $\gamma_+ = 1$, то для существования такого решения приходится потребовать конечность второго момента функции K_0 при $\gamma_- = 1$ и первого момента при $\gamma_- < 1$ (см. теорему 1). Итак справедлива

Лемма 2. *Пусть $K_0 \geq 0$ и выполняются условия (0.2), (3.1). Тогда при выполнении одного из следующих условий а), б) и в) существует факторизация (1.16) и V_0 обладает свойством (3.3) :*

а) функция K_0 имеет конечный момент второго порядка;

б) выполняется одно из неравенств $\gamma_+ < 1$ или $\gamma_- < 1$ и функция K имеет конечный момент первого порядка;

в) $\gamma_+ < 1$ и выполняется равенство (3.2).

Пусть выполняются условия леммы 2 и

$$0 \leq \lambda < \lambda_1 \equiv ||\mathcal{V}_0||_{C_0^+}.$$

Тогда оператор $I - \lambda\mathcal{V}_0$ обладает обратным $I + \Gamma$, который разлагается в равномерно сходящийся ряд Неймана

$$I + \Gamma \equiv (I - \lambda\mathcal{V}_0)^{-1} = I + \lambda\mathcal{V}_0 + \lambda^2\mathcal{V}_0^+ + \cdots, \tag{3.4}$$

где Γ – интегральный оператор с положительным ядром. Остается рассмотреть уравнение (0.1) в том случае, когда выполняется равенство (3.2). Рассмотрим уравнение

$$f_1(x) = \int_0^\infty K(x-t)f_1(t)\,dt + \int_0^\infty K(x+t)f_1(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Из консервативности ядра K следует, что функция $f_1(x) \equiv 1$ удовлетворяет (3.5), которая в этом случае приводится к

$$1 = \int_{-\infty}^x K(y)\,dy + \int_x^\infty K(y)\,dy..$$

Пусть выполняются условия леммы 2 и существует разложение (1.16) для (3.5). Тогда функция $h_1 = (I - \mathcal{V}_+)f_1$ удовлетворяет уравнению

$$(I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_0)h_1 = 0. \tag{3.6}$$

Имеем

$$h_1(x) = 1 - \int_0^x V_+(t)\,dt = (1 - \gamma_+) + \int_x^\infty V_+(t)\,dt. \tag{3.7}$$

Обозначим

$$h_2 = (I - \mathcal{V}_0)h_1. \tag{3.8}$$

С учетом (3.7) получаем $h_2(x) = (1 - \gamma_+) + h_3(x)$, где

$$h_3(x) = \int_x^\infty V_+(t)\,dt + \int_0^\infty V_0(x+t)h_1(t)\,dt.$$

Имеем, $h_2 \in C_u^+$ и $h_3 \in C_0^+$. Из (3.6) и (3.7) видно, что функция h_2 удовлетворяет однородному уравнению

$$h_2(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)h_2(t)\,dt.$$

Покажем, что $h_2 = 1-\gamma_+$. Если $\gamma_- < 1$, то $h_2(x) = 0$ – единственное ограниченное решение уравнения (3.8). Если $\gamma_- = 1$ и существует предел $C < \infty$ решения $h_2 \in L_1^{loc}$ уравнения (3.8), то по лемме 3.4 работы [6] $h_2 = Const$. Следовательно

$$h_2(x) = 1 - \gamma_+ \geq 0. \tag{3.9}$$

В случае $\gamma_+ = 1$, согласно (3.8) и (3.9), компактный в C_u^+ оператор $\mathcal{V}_0$ с положительным ядром V_0 имеет положительную неподвижную функцию h_1. Поэтому число $\lambda_1 = 1$ является наименьшим по модулю характеристическим числом оператора $\mathcal{V}_0$ в пространствах C_u^+ и C_0^+ (см. [9]) и

$$||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} = ||\mathcal{V}_0||_{C_0^+} = 1.$$

Если $\gamma_+ < 1$, то функция h_2 удовлетворяет уравнению

$$h_2(x) = (1-\gamma_+) + \int_0^\infty V_0(t+x)h_2(t)\,dt,$$

и (см. [9]) имеем $||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} < 1$. Поэтому для произвольного $\gamma_+ \leq 1$

$$\lambda_1 \equiv ||\mathcal{V}_0||_{C_u^+} \leq 1.$$

Из сказанного следует, что для произвольного $\lambda \in [0, \infty)$ оператор $I - \lambda\mathcal{V}_0$ обладает положительным обратным, который является суммой равномерно сходящегося в C_u^+ ряда Неймана (3.4). Если $\gamma_+ < 1$, то этот ряд сходится также при $\lambda = 1$.

Займемся вопросом применения результатов §2 к построению положительного решения уравнения

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda \int_0^\infty K(x+t)f(t)\,dt. \tag{3.10}$$

Будем считать, что $\gamma_- = 1$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Как и в §2 мы будем исходить из решения $F(x) \equiv 1$ уравнения (2.6), что приводит нас к уравнению (2.7). Если

$\gamma_+ < 1$ или $\gamma_+ = 1$ и $\lambda < 1$, то оператор обладает положительным обратным. Поэтому уравнение (2.7) имеет единственное решение $h \in C_u^+$. Из (2.7) имеем

$$h(x) = 1 + h_0(x), \quad h_0 \geq 0, \quad h_0 \in C_0^+.$$

Применяя результаты из §2 к уравнению (2.10) для f, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $\gamma_- = 1$ и $0 \leq \lambda < 1$. Тогда уравнение (3.10) имеет положительное решение вида (2.13). Функция S определяется из (2.14). Имеют место асимптотики (2.16) – (2.18). Если $\gamma_+ < 1$, то $f \in C_u^+$.*

Используя разложение (3.4), можно получить разложение решения уравнения (2.14) по степеням λ.

ABSTRACT. The paper studies the homogeneous integral equation $f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt + \lambda \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)\,dt$, where $\lambda \in \mathbf{C}$, $K_0 \in L_1^+ \equiv L_1(0,\infty)$, $K \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1$. The corresponding three-factor decomposition proves that this equation possesses a non-trivial continuous solution f on $[0,\infty)$. Some properties of f are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, М., 1978.
3. Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях свертки в кинетической теории", Жур. Высш. Мат. и Мат. Физ. (в печати).
4. С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, Мир, М., 1971.
5. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., т. 97, № 1, стр. 35 — 58, 1975.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
7. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально–Разностные Уравнения, Мир, М., 1967.
9. М. А. Красносельский, Положительные Решения Операторных Уравнений, Физматиздат, М., 1962.

22 декабря 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении