ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА СВЕРТКИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

М. Т. Акопян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 1, 1997

Изучается уравнение $f(x, y) = g(x, y) + \iint_G K(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy'$, где G — неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, ядро K — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию консервативности. Используя факторизацию Вольтерра, мы доказываем существование положительного решения однородного уравнения ($g = 0$) при некоторых дополнительных условиях на G и K .

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению интегрального уравнения

$$f(x, y) = g(x, y) + \iint_G K(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy', \quad (1)$$

где область $G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию $\Pi_{r_1} \subset G \subset \Pi_r$, $r < r_1$, а Π_r — полуплоскость $(r, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Для простоты будем считать, что граница ∂G области G является кусочно-гладкой. Предполагается также, что ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) dx dy = \mu \leq 1, \quad K(x, y) \geq 0. \quad (2)$$

Случай $\mu = 1$ назовем *консервативным случаем*, а случай $\mu < 1$ — *диссипативным*. Основное внимание будет уделено изучению однородного уравнения (1) при $g = 0$ в консервативном случае. Как будет показано, консервативный случай относится к особым случаям уравнения (1). Применяемый подход опирается на построение вольтерровской факторизации уравнения (1).

§1. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Обозначим через $\lambda(x, y)$ характеристическую функцию области G :

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in G, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin G. \end{cases}$$

Наряду с (1) – (2) рассмотрим следующее уравнение :

$$f_1(x, y) = g_1(x, y) + \int_r^\infty \int_{-\infty}^\infty \lambda(x', y') K(x - x', y - y') f_1(x', y') dx' dy', \quad (3)$$

где

$$g_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } (x, y) \in \Pi_r \setminus G, \\ g(x, y) & \text{при } (x, y) \in G. \end{cases}$$

Легко проверить, что если f_1 удовлетворяет уравнению (3), то сужение $f = f_1|_G$ функции f_1 в G удовлетворяет условиям (1) – (2). Отметим, что некоторые уравнения вида (3) изучены в [1].

Пусть $\mathbb{T}$ – следующий интегральный оператор :

$$(\mathbb{T}f)(x, y) = \int_r^\infty \int_{-\infty}^\infty T(x, x', y, y') f(x', y') dx' dy',$$

где $T(x, x', y, y') = \lambda(x', y') K(x - x', y - y')$. Оператор $\mathbb{T}$ действует в целом семействе пространств измеримых на Π_r функций, в том числе в пространствах $L_p(\Pi_r)$, $p \geq 1$, $L_\infty(\Pi_r) = M(\Pi_r)$, $L_{\infty,1}(\Pi_r)$. В последнем пространстве норма определена следующим образом :

$$\|f\| = \sup_x \operatorname{ess} \int_{-\infty}^\infty |f(x, y)| dy.$$

Обозначим через E_r одно из указанных выше пространств. Обозначив через $\|\mathbb{T}\|_{E_r}$ норму $\mathbb{T}$ в E_r , имеем оценку $\|\mathbb{T}\|_{E_r} \leq \mu (\leq 1)$. Это следует из хорошо известных свойств интегрального оператора Винера–Хопфа ([2]). Все пространства E_r идеальны (см. [3]) : то есть если $0 \leq f_1(x, y) \in E_r$ и $g_1(x, y)$ – измеримая функция на Π_r такая, что $|g_1(x, y)| \leq f_1(x, y)$, то $g_1 \in E_r$.

Рассмотрим факторизацию

$$I - \mathbb{T} = (I - \Psi_-)(I - \Psi_+), \quad (4)$$

где I - единичный оператор, Ψ_-, Ψ_+ - формально вольтерровые по x операторы вида

$$\begin{aligned}(\Psi_+ f)(x, y) &= \int_x^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_+(x, x', y, y') f(x', y') dx' dy', \\(\Psi_- f)(x, y) &= \int_x^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_-(x', x, y, y') f(x', y') dx' dy'.\end{aligned}\quad (5)$$

Будем предполагать, что равенства (5) порождают операторы, действующие в пространствах E_r . Необходимые свойства функций $\psi_\pm$ мы рассмотрим позже.

Факторизация (4) понимается как равенство операторов, действующих в E_r . Она эквивалентна следующим двум нелинейным уравнениям относительно (ψ_+, ψ_-) (см. [4], [5]) :

$$\psi_\pm(x, x', y, y') = T_\pm(x, x', y, y') + \int_x^\infty \int_{-\infty}^\infty \psi_\mp(t, x, z, y) \psi_\pm(t, x', z, y') dt dz, \quad (6)$$

где

$$T_+(x, x', y, y') = T(x, x', y, y'), \quad x > x', \quad T_-(x, x', y, y') = T(x', x, y, y), \quad x < x'.$$

Займемся вопросом построения решения нелинейных уравнений факторизации (6) в подходящем пространстве. Наряду с (6) рассмотрим следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений :

$$V_\pm(x, y) = K_\pm(x, y) + \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V_\mp(t, z) V_\pm(t + x, y - z) dt dz. \quad (7)$$

Решения $V_\pm(x, y)$ будем искать в пространстве $L_1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$. Эти уравнения являются аналогами нелинейных уравнений факторизации оператора Винера-Хопфа (см. [6], [7]). Они впервые изучены в [8]. Система (7) эквивалентна факторизации

$$I - \mathcal{K} = (I - \mathcal{V}_-)(I - \mathcal{V}_+), \quad (8)$$

где операторы $\mathcal{V}_\pm$ определены равенствами

$$(\mathcal{V}_\pm f)(x, y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty V_\pm[\pm(x-t), y-z] f(t, z) dt dz. \quad (9)$$

Прежде чем выяснить роль уравнений (7) в вопросе решения системы (8), мы остановимся на вопросах разрешимости и свойствах решения самой системы

(7). В работе [8] показано, что (7) имеет решение, которое является пределом итераций

$$V_{n+1}^{\pm}(x, y) = K_{\pm}(x, y) + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_n^{\mp}(t, x) V_n^{\pm}(t+x, y-z) dt dx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad V_0^{\pm}(x, y) = 0. \quad (10)$$

Это решение назовем *каноническим решением*. Функции $V_{\pm}(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$a) \quad V_{\pm}(x, y) \geq 0, \quad (11)$$

$$б) \quad \|V_{\pm}\|_E = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_{\pm}(x, y) dx dy = \gamma_{\pm} \leq \mu (\leq 1), \quad (12)$$

$$в) \quad (1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 1 - \mu. \quad (13)$$

Если $K(+x, y) = K(-x, y)$ и $V_{\pm}(x, y) = V(x, y)$, то

$$\gamma_{\pm} = 1 - \sqrt{1 - \mu}. \quad (14)$$

Интегрируя уравнения (7) по y от $-\infty$ до $+\infty$, получаем (см. [8])

$$U_{\pm}(x) = N(\pm x) + \int_0^{\infty} U_{\mp}(t) U_{\pm}(t+x) dt, \quad (15)$$

где

$$U_{\pm}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{\pm}(x, y) dy, \quad N(\pm x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\pm x, y) dy. \quad (16)$$

(15) представляет собой нелинейное уравнение факторизации для скалярных операторов типа Винера-Хопфа (см. [6], [7]). Из (13) следует, что в консервативном случае $(1 - \gamma_-)(1 - \gamma_+) = 0$. С помощью дополнительных свойств функции $N(x)$ можем определить какое из чисел γ_+ , γ_- равно 1. Если $N(+x) = N(-x)$, то $\gamma_+ = \gamma_- = 1$. Пусть абсолютно сходится интеграл

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x N(x) dx \quad (17)$$

(ν_1 - первый момент функции $N(x)$ на $\mathbb{R}$). Тогда (см. [6])

$$a) \quad \nu_1 > 0 \iff \gamma_+ = 1, \quad \gamma_- < 1,$$

$$б) \quad \nu_1 < 0 \iff \gamma_- = 1, \quad \gamma_+ < 1,$$

$$в) \quad \nu_1 = 0 \iff \gamma_- = \gamma_+ = 1.$$

Рассмотрим теперь итерации для уравнения (6)

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^{\pm}(x, x', y, y') &= T_{\pm}(x, x', y, y') + \\ &+ \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mp}(t, x, z, y) \psi_n^{\pm}(t, x', z, y') dt dz, \quad n = 0, 1, \dots, \\ \psi_0^{\pm}(x, x', y, y') &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Можно показать индукцией по n , что

$$a) \quad \psi_n^{\pm}(x, x', y, y') \geq 0, \quad \psi_n^{\pm} \uparrow \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \tag{19}$$

$$b) \quad \psi_n^{\pm}(x, x', y, y') \leq V_n^{\pm}(x - x', y - y'), \tag{20}$$

$$c) \quad \psi_{n+1}^{\pm} - \psi_n^{\pm} \leq V_{n+1}^{\pm} - V_n^{\pm}. \tag{21}$$

Свойства а) и б) легко проверяются. Докажем утверждение в). Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{\pm}(x - x', y - y') &= V_{n+1}^{\pm}(x - x', y - y') - V_n^{\pm}(x - x', y - y'), \\ \delta_{n+1}^{\pm}(x, x', y, y') &= \psi_{n+1}^{\pm}(x, x', y, y') - \psi_n^{\pm}(x, x', y, y'). \end{aligned} \tag{22}$$

Для $n = 0$ оценка (21) следует из (20). Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^{\pm} - \sigma_n^{\pm} &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [V_n^{\pm}(x + t, y - z) \sigma_n^{\mp}(t, z) + V_{n-1}^{\mp}(t, z) \sigma_n^{\pm}(x + t, y - z)] dt dz, \\ \delta_{n+1}^{\pm} - \delta_n^{\pm} &= \\ &= \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_n^{\pm}(t, x', z, y') \delta_n^{\mp}(t, x, z, y) + \psi_{n-1}^{\mp}(t, x, z, y) \delta_n^{\pm}(t, x', z, y')] dt dz. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть (21) выполняется для некоторого $n \geq 1$. Из (20), (22) и (23), а также ввиду того, что $T \leq K$, получаем $\delta_{n+1}^{\pm}(x, x', y, y') \leq \sigma_{n+1}^{\pm}(x - x', y - y')$. Итак (21) доказана.

Последовательности ψ_n^+ , ψ_n^- монотонно возрастают и согласно (20) ограничены сверху (20). Поэтому существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^{\pm}(x, x', y, y') = \psi_{\pm}(x, x', y, y').$$

Из (21) следует, что итерации (18) сходятся не медленнее чем $V_n^{\pm}$. Если (x, y) фиксированы, то ψ_+ и ψ_- принадлежат L_1 как функции от (x', y') . Из (18) с учетом (19) получаем

$$\psi_n^{\pm}(x, x', y, y') \leq T(x, x', y, y') + \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mp}(t, x, z, y) \psi^{\pm}(t, x', y', z) dt dz.$$

Так как неравенство верно для любого n , то

$$\psi^{\pm}(x, x', y, y') \leq T(x, x', y, y') + \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mp}(t, x, z, y) \psi_n^{\pm}(t, x', y', z) dt dz. \quad (24)$$

С другой стороны

$$\psi^{\pm}(x, x', y, y') \geq T(x, x', y, y') + \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{\mp}(t, x, z, y) \psi_n^{\pm}(t, x', y', z) dt dz. \quad (25)$$

Из теоремы Леви следует законность предельного перехода в (25) при $n \rightarrow \infty$, откуда получаем

$$\psi^{\pm}(x, x', y, y') \geq T(x, x', y, y') + \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{\mp}(t, x, z, y) \psi^{\pm}(t, x', y', z) dt dz. \quad (26)$$

Поэтому неравенства (24) и (26) обращаются в равенство (6). Из (20) следует

$$\psi^{\pm}(x, x', y, y') \leq V^{\pm}(x - x', y - y'). \quad (27)$$

Из вольтерровской структуры уравнения (6) в области Π_{r_1} следует, что

$$\psi_{\pm}(x, x', y, y') = V_{\pm}(x - x', y - y') \quad \text{при } x, x' > r_1. \quad (28)$$

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\Psi_n^{\pm}$, порожденных ядрами $\psi_n^{\pm}(x, x', y, y')$ и $\psi_n^{-}(x', x, y, y')$. Покажем, что последовательности $\Psi_n^{\pm}$ равномерно сходятся к $\Psi^{\pm}$ в пространстве E_r . Рассмотрим операторные ряды

$$\Psi_n^{\pm} = \sum_{k=0}^{n-1} (\Psi_{k+1}^{\pm} - \Psi_k^{\pm}). \quad (29)$$

Так как $0 \leq \delta_n^{\pm} \leq \sigma_n^{\pm}$, то используя (21), будем иметь

$$\|\Psi_{k+1}^{\pm} - \Psi_k^{\pm}\| \leq \gamma_{k+1} - \gamma_k.$$

Таким образом, ряды (29) мажорируются по норме в E_r сходящимися рядами $\sum_{k=0}^{n-1} (\gamma_{k+1}^{\pm} - \gamma_k^{\pm})$. Отсюда следует равномерная сходимость операторных рядов (29), стало быть, и последовательностей $\psi_n^{\pm}(x, x', y, y')$, $\psi_n^{-}(x', x, y, y')$ в пространстве E_r . Нами доказана следующая

Теорема 1. Оператор $I - \mathbb{T}$ допускает факторизацию (4), где Ψ_+, Ψ_- — суть операторы вида (5). Функции $\psi_{\pm}(x, x', y, y')$ являются основным решением нелинейных уравнений факторизации (6) и обладают свойствами (19) — (21). Последовательности операторов $\Psi_n^{\pm}$ сходятся к $\Psi_{\pm}$ равномерно в E_r .

§2. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Факторизация (4) сводит однородное уравнение

$$S(x, y) = \int_r^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, x', y, y') S(x', y') dx' dy' \quad (30)$$

к двум уравнениям

$$F(x, y) = \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x, x', y, y') F(x', y') dx' dy', \quad (31)$$

$$S(x, y) = F(x, y) + \int_r^x \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+(x, x', y, y') S(x', y') dx' dy'. \quad (32)$$

Рассмотрим уравнение (31) в области Π_{r_1} ($r < r_1$). Тогда равенства (28) выполняются и мы можем записать (31) в виде

$$F(x, y) = \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_-(x' - x, y - y') F(x', y') dx' dy'. \quad (33)$$

В случае $\gamma_- = 1$ уравнение (33) имеет нетривиальное решение $F(x, y) \equiv 1$. Продолжим это решение в область Π_r ($r < r_1$). При $r < x < r_1$ уравнение (31) будет иметь вид

$$F(x, y) = F^0(x, y) + \int_x^{r_1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x', x, y', y) F(x', y') dx' dy', \quad (34)$$

где

$$F^0(x, y) = \int_{r_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x', x, y', y) dx' dy'. \quad (35)$$

(34) представляет собой уравнение типа Вольтерра по первому аргументу. Покажем, что его решение удовлетворяет неравенству $0 \leq F(x, y) \leq 1$. В силу (27) и $\gamma_- = 1$ из (35) имеем $F^0(x, y) \leq \gamma_-$. Рассмотрим итерации

$$F_{n+1}(x, y) = F^0(x, y) + \int_x^{r_1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x', x, y', y) F_n(x', y') dx' dy', \quad n = 0, 1, \dots, \quad F_0 = 0. \quad (36)$$

Покажем индукцией по n , что $F_n(x, y) \leq 1$. Для $n = 0$ это неравенство очевидно выполняется. Пусть оно выполняется для некоторого $n \geq 0$. Из (36), с учетом (20), имеем

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, y) &\leq F^n(x, y) + \int_x^r \int_{-\infty}^{\infty} \psi_-(x', x, y', y) dx' dy' \leq \\ &\leq \int_x^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_-(x' - x, y - y') dx' dy' = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Из неравенства $F_n(x, y) \leq 1$ и монотонности последовательности $F_n(x, y)$ следует сходимость $F_n(x, y)$ к функции $F(x, y) \in M$ по топологии $L_1^{loc}(\Pi_r)$. Поэтому уравнение (34) имеет нетривиальное решение $F(x, y)$ и $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

Теперь рассмотрим уравнение (32). Вспомогательное уравнение

$$S^*(x, y) = 1 + \int_r^x \int_{-\infty}^{\infty} V_+(x - x', y - y') S^*(x', y') dx' dy' \quad (38)$$

имеет локально-интегрируемое решение $S^*(x, y) = \varphi(x)$, зависящее только от x и удовлетворяющее уравнению восстановления

$$\varphi(x) = 1 + \int_r^x U_+(x - x') \varphi(x') dx', \quad (39)$$

где $U_+(x)$ определяется из (16). Функция $\varphi(x)$ обладает следующими свойствами (см. [6]):

- а) $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна, монотонно возрастает на $[r, \infty)$ и $\varphi(r) = 1$;
- б) если $\gamma_+ < 1$, то $\varphi(x)$ ограничена и $\varphi(+\infty) = \frac{1}{1 - \gamma_+}$;
- в) если $\gamma_+ = 1$, то $\varphi(x) = O(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Сопоставление простых итераций для (32) и (38) показывает, что уравнение (32) имеет решение

$$0 \leq S(x, y) \leq \varphi(x). \quad (40)$$

Нами доказана

Теорема 2. Если в факторизации (4) $\|\Pi\| \leq 1$, то однородное уравнение (30) имеет положительное решение $S(x, y)$, удовлетворяющее неравенству (40), где $\varphi(x)$ обладает перечисленными выше свойствами а) – в).

Факторизация (4) может быть также применена для изучения неоднородного консервативного уравнения.

В заключение выражаю благодарность Н. Б. Енгибаряну и Л. Г. Арабаджяну за полезные обсуждения и ценные советы.

ABSTRACT. The paper studies the integral equation $f(x, y) = g(x, y) + \iint_G K(x - x', y - y') f(x', y') dx' dy'$, where G is an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$, the kernel K is nonnegative function satisfying the conservativity condition. Using Volterra factorization, the existence of positive solution of homogeneous equation ($g = 0$) is proved under some additional conditions on G and K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Арабаджян, М. А. Хачатрян, "О некоторых интегральных уравнениях теории переноса в неоднородной среде", Деп. в АрмНИИНТИ, № 31-AP-86, 1987.
2. М. Г. Крейн, "Интегральное уравнение на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов", Усп. Мат. Наук, т. 13, № 5, стр. 3 - 120, 1958.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, Наука, М., 1966.
4. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "О факторизации интегральных операторов", ДАН СССР, т. 206, № 4, стр. 792 - 795, 1972.
5. Н. Б. Енгибарян, "Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов", ДАН СССР, т. 230, № 5, стр. 1021 - 1024, 1976.
6. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 - 244, 1984.
7. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Мат. Сб., т. 97, № 1, стр. 35 - 58, 1975.
8. Н. Б. Енгибарян, М. Т. Акопян, "О факторизационной задаче в C^n ", Дифф. и Инт. Ур., АрмГПИ, Ереван, 1979.

27 октября 1996

Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении