

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Г. Г. Геворкян, Н. Б. Енгибарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 32, № 1, 1997

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение восстановления $\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t)\varphi(t)dt$, где $0 \leq v \in L_1^+ \equiv L_1(0, \infty)$, $\int_0^\infty v(x)dx = 1$. Пусть Φ – резольвентная функция, определяемая из того же уравнения при $g = v$. Получены следующие разновидности классических теорем восстановления: а) $\Phi(x) = v^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x)$, где $\rho_0 \in C[0, \infty)$, $\rho_0(+\infty) = 0$, $\Psi \in L_1^+$, $\nu = \int_0^\infty x\nu(x)dx \leq +\infty$, $\nu^{-1} \geq 0$. б) Если $g \in L_1^+$ ограничен и $g(+\infty) = 0$, то $\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x)dx$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее, хорошо известное в теории вероятностей и в математической физике, интегральное уравнение восстановления (см. [1] — [4])

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t)\varphi(t)dt, \quad (1.1)$$

где ядро v удовлетворяет следующим условиям консервативности:

$$v \geq 0, \quad v \in L_1 \equiv L_1(0; \infty), \quad \int_0^\infty v(x)dx = 1. \quad (1.2)$$

Условие (1.2) означает, что v является плотностью распределения вероятностей на $(0, \infty)$.

Теория уравнения (1.1) тесно связана со свойствами резольвентной функции Φ , определяемой из уравнения восстановления

$$\Phi(x) = v(x) + \int_0^x v(x-t)\Phi(t)dt. \quad (1.3)$$

Пусть L_1^{loc} – класс функций, локально интегрируемых на $[0, +\infty)$, т.е. $f \in L_1(0, r)$ для любого $r < +\infty$. Известно (см. [3]), что если $v, g \in L_1^{\text{loc}}$, то уравнение (1.1)

имеет в L_1^{loc} единственное решение, которое представляется формулой

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)g(t)dt. \quad (1.4)$$

Если $v \geq 0$, то $\Phi \geq 0$. Если $v, g \geq 0$, то $\varphi \geq 0$.

Центральная проблема теории восстановления для уравнения (1.1), (1.2) связана с изучением асимптотических свойств функций Φ и φ . Основной результат в указанном направлении содержится в теореме восстановления (см. [1]), который мы сформулируем специально для уравнений (1.1), (1.2) и (1.3), (1.2).

Теорема В (восстановления).

а) Основная форма. Решение $\Phi(t)$ уравнения (1.3), (1.2) обладает свойством

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+h} \Phi(t)dt = h\nu^{-1}, \quad h > 0, \quad (1.5)$$

где

$$\nu = \int_0^{\infty} x v(x)dx \leq +\infty, \quad \nu^{-1} \geq 0.$$

б) Альтернативная форма. Если функция g из (1.1) непосредственно интегрируема по Риману (НИР) и выполняется (1.2), то

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \text{ существует и } \varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^{\infty} g(x)dx. \quad (1.6)$$

Определение НИР будет дано в §3.

Настоящая работа посвящена усилению вышеуказанной теоремы восстановления. Для функции Φ мы получим следующее представление :

$$\Phi(x) = \nu^{-1} + \Phi_1(x) + \Phi_2(x), \quad (1.7)$$

где $\Phi_1 \in C[0; \infty)$, $\Phi_1(+\infty) = 0$ и $\Phi_2 \in L_1$.

Также будет установлена справедливость (1.6) в случае, когда g – ограниченная функция из L_1 , причем существует предел $g(+\infty)$, равный нулю.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СВЕРТКИ

В настоящем параграфе будут установлены некоторые свойства свертки, используемые в дальнейшем. Рассмотрим банаховы пространства (БП) L_1 , M , M_u , M_0 , C_M , C_u , C_0 функций, определенных на $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Через M обозначим БП существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$, а через $C_M = M \cap C[0, \infty)$ – БП ограниченных, непрерывных функций на $\mathbb{R}^+$. Классы $M_u \subset M$ или $C_u \subset C$ состоят из функций f , для которых существует предел $f(+\infty)$. Если $f \in C_0 \subset C_u$ или $f \in M_0 \subset M_u$, то $f(+\infty) = 0$. Через $\mathbb{E}$ обозначим одно из вышеуказанных БП. Через L_1^{loc} и M^{loc} обозначаются, соответственно, линейные топологические пространства локально суммируемых и локально ограниченных функций на $\mathbb{R}^+$. Рассмотрим свертку $\Psi = f * g$ функций $f, g \in L_1^{\text{loc}}$:

$$\Psi(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt. \quad (2.1)$$

Операция $*$ свертки является коммутативной и ассоциативной билинейной операцией, как в L_1^{loc} так и в L_1 . Хорошо известно, что если $g \in L_1^+$ и f принадлежат одному из пространств $\mathbb{E}$, то $\Psi \in \mathbb{E}$ (см. [5]).

Лемма 2.1. Пусть $g \in L_1$, $f \in M$. Тогда $\Psi \in C_M$. Если $g \in L_1^{\text{loc}}$ и $f \in M^{\text{loc}}$, то $\Psi \in C[0, \infty)$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только второе утверждение, поскольку первое следует из второго и из того факта, что свертка ограниченной и суммируемой функции является ограниченной функцией. Пусть $x \in \mathbb{R}^+$ фиксировано и h – любое число с условием, что $|h| < x$. Введем обозначение $A = \sup_{t \in [0, x]} \text{ess}|f(t)|$. Тогда (для определенности предположим, что $h > 0$)

$$\begin{aligned} |\Psi(x+h) - \Psi(x)| &\leq \int_0^x |g(x+h-t) - g(x-t)| |f(t)| dt + \\ &+ \int_0^{x+h} |g(x+h-t)| |f(t)| dt \leq A \sup_{|\delta| < h} \int_0^x |g(t+\delta) - g(t)| dt + A \int_0^h |g(t)| dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При $h \rightarrow 0$ второе слагаемое правой части (2.2) стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, а первое слагаемое стремится к нулю в силу того, что интегральный модуль непрерывности $\omega(g, h)$ интегрируемой

функции g стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ (см. [7] (напомним, что $g \in L_1(0, 2x)$)).

Лемма доказана.

Лемма 2.2.

а) Пусть $f \in L_1$ и $g \in M_u$. Тогда $\Psi \in C_u$

$$\Psi(+\infty) = g(+\infty) \int_0^\infty f(t) dt. \quad (2.3)$$

б) Пусть $f \in L_1$, $g \in L_1^{\text{loc}}$, $f(+\infty) = 0$ и существует $g(+\infty)$. Тогда $\Psi \in L_1^{\text{loc}}$ и выполняется равенство (2.3).

Доказательство. Имеем

$$\Psi(x) = \int_0^{x/2} f(x-t)g(t) dt + \int_{x/2}^x f(x-t)g(t) dt \equiv \Psi_1(x) + \Psi_2(x). \quad (2.4)$$

В обоих случаях а) и б) для $\Psi_2(x)$ получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_2(x) = g(+\infty) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(x-t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(x-t)(g(t) - g(+\infty)) dt. \quad (2.5)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x/2}^x f(x-t) dt &= \int_0^\infty f(t) dt, \\ \left| \int_{x/2}^x f(x-t)(g(t) - g(+\infty)) dt \right| &\leq \sup_{t \geq x/2} |g(t) - g(+\infty)| \int_0^\infty |f(t)| dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_2(x) = g(+\infty) \int_0^\infty f(t) dt.$$

Для завершения доказательства нужно показать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_1(x) = 0$. В случае

а) это очевидно. В случае б) для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $y > 0$ такое, что

$$\sup_{t > y} |g(t)| \int_0^\infty |f(t)| dt < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Тогда из соотношения (2.7) и очевидного неравенства

$$\left| \int_0^y f(x-t)g(t) dt \right| \leq \sup_{t > x-y} |f(t)| \int_0^y |g(t)| dt$$

получим $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_1(x) = 0$. Лемма доказана.

Пусть u_0 — непрерывная ненулевая неотрицательная финитная функция на $\mathbb{R}^+$.

Если выполнено неравенство $u_0(x) \leq f(x)$, то функцию u_0 назовем непрерывной ячейкой функции f .

Лемма 2.3.. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ – любые множества с положительной мерой Лебега. Тогда существует отрезок $[a, b]$ и число $\gamma > 0$ такие, что при любом $z \in [a, b]$ неравенство

$$\mu \{x \in A: \text{существует } y \in B, x + y = z\} > \gamma \quad (2.8)$$

имеет место, где $\mu(G)$ – лебегова мера множества G .

Доказательство. Существуют $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ и $\delta_1 > 0$ такие, что (см. [8], гл. 9, §6, Теорема 1)

$$\mu \left(A \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \right) > 2\delta_1 (1 - 0.01) \quad (2.9)$$

и

$$\mu \left(B \cap (y_0 - \delta_1, y_0 + \delta_1) \right) > 2\delta_1 (1 - 0.01). \quad (2.10)$$

Убедимся, что отрезок $[a, b] \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где $x_0 = x_0 + y_0$, $\delta = \frac{\delta_1}{100}$, удовлетворяет (2.8) при $\gamma = \frac{\delta_1}{2}$. Пусть $z = x_0 + 2t$ и $|t| \leq \frac{\delta}{2}$. Тогда (см. (2.9), (2.10))

$$\mu \left(A \cap (x_0 + t - \delta_1, x_0 + t + \delta_1) \right) > 2\delta_1 (1 - 0.02) \quad (2.11)$$

и

$$\mu \left(B \cap (y_0 + t - \delta_1, y_0 + t + \delta_1) \right) > 2\delta_1 (1 - 0.02). \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) следует

$$\mu \left\{ h: x_0 + t + h \in A \cap (x_0 + t - \delta_1; x_0 + t + \delta_1), y_0 + t - h \in B \cap \right. \\ \left. \cap (y_0 + t - \delta_1; y_0 + t + \delta_1) \right\} > \frac{\delta_1}{2}.$$

Следовательно, выполняется (2.8) для точки z . Лемма доказана.

Теорема 2.1. Пусть $f_i(x) \geq 0$ и $\int_0^\infty f_i(x) dx > 0$ при $i = 1, 2$. Тогда функция $f \equiv f_1 * f_2$ обладает непрерывной ячейкой.

Доказательство. Существуют множества $A, B \subset (0, +\infty)$, $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ и положительное число $\lambda > 0$ такие, что $f_1(x) > \lambda$ при $x \in A$ и $f_2(x) > \lambda$ при $x \in B$. В силу леммы 2.3 существуют отрезок $[a, b]$ и число γ , для которых имеет место (2.8) при любом $z \in [a, b]$. Следовательно, при $z \in [a, b]$ имеем

$$f(z) = \int_0^z f_1(z-x) f_2(x) dx > \gamma \lambda^2.$$

Теорема доказана.

§3. НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО РИМАНУ

Приведем определение НИР (см. работу [1]). Пусть Π – следующее разбиение $\mathbb{R}^+$: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots, x_n \uparrow +\infty$. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Пусть $\lambda = \sup_k \Delta x_k < +\infty$ – диаметр разбиения Π . Пусть $\bar{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$ суть верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f \geq 0$, определенной на $\mathbb{R}^+$:

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{m}_k \Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{m}_k \Delta x_k,$$

где $\bar{m}_k = \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$, и $\underline{m}_k = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$.

Функция f называется НИР, если $\bar{\sigma} - \underline{\sigma} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Обозначим через R_d класс НИР функций на $\mathbb{R}^+$. Через R_{dC} обозначим класс непрерывных НИР функций. Имеем $R_d \subset M_0$ и $R_{dC} \subset C_0$. Пусть S – интегральная сумма для функции $f \geq 0$, соответствующая разбиению Π :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} f(r_k) \Delta x_k, \quad r_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Ясно, что для того чтобы $f \in R_d$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел интегральных сумм S при $\lambda \rightarrow 0$.

Лемма 3.1. Пусть $f \geq 0$. Для того чтобы $f \in R_d$, необходимо и достаточно выполнение условий

а) функция f интегрируема по Риману на каждом конечном отрезке $[0, a]$;

б) сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где $c_k = \sup_{x \in [k, k+1)} |f(x)|$.

Доказательство: достаточность. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем такое $a < +\infty$, что

$$\int_a^{+\infty} f^*(x) dx < \varepsilon,$$

где $f^*(x) = c_k$, когда $x \in [k, k+1)$.

Пусть λ удовлетворяет следующему условию: если σ – интегральная сумма интеграла Римана на отрезке $[0, a]$ с диаметром разбиения меньше чем λ , то

$$\left| \sigma - \int_0^a f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Пусть $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$ — некоторое разбиение $[0, +\infty)$ с диаметром меньше чем λ , и $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ — интегральная сумма для непосредственного интеграла Римана. Без ограничения общности можно считать, что $a \in \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, например, $a = \xi_k$. Следовательно

$$\begin{aligned} \left| S - (L) \int_0^{\infty} f(x) dx \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^i f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_0^a f(x) dx \right| + \\ &+ \sum_{k=i+1}^{\infty} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \int_a^{\infty} f^*(x) dx \leq \varepsilon + \\ &+ \sum_{k=i+1}^{\infty} f^*(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \varepsilon < 2\varepsilon + 2 \int_a^{\infty} f^*(x) dx < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $S \rightarrow (L) \int_0^{\infty} f(x) dx$ и существует непосредственный интеграл Римана.

Необходимость. Соотношение б) есть прямое следствие конечности верхней интегральной суммы непосредственного интеграла Римана. Лемма доказана.

Замечание 3.1. Ограниченная функция интегрируема по Риману на конечном отрезке тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна. Поэтому в лемме 3.1 условие а) можно заменить требованием почти всюду непрерывности функции f .

Замечание 3.2. Из леммы 3.1 и замечания 3.1 следует, что для существования НИР необходимо и достаточно, чтобы функция f была почти всюду непрерывной и верхняя сумма Дарбу для нее была конечной.

Замечание 3.3. Из леммы 3.1 следует, что $f \in \mathbb{R}_{dC}$ тогда и только тогда, когда $f \in C(0, \infty)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$, где $c_k = \sup_{x \in [k, k+1]} |f(x)|$.

Лемма 3.2. Пусть в (2.1) $g \in L_1$ и $f \in \mathbb{R}_d$. Тогда $\Psi \in \mathbb{R}_{dC}$.

Доказательство. Из леммы 3.1 следует ограниченность функции f . Применяя лемму 2.1, получим непрерывность функции Ψ . Учитывая замечание 3.1, для завершения доказательства леммы достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \quad \text{где} \quad b_k = \sup_{x \in [k, k+1]} |\Psi(x)|. \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) следует из цепи простых неравенств

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} b_k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in [k, k+1]} \int_0^x f(x-t) |g(t)| dt \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in [k, k+1]} \sum_{j=0}^k \int_j^{j+1} f(x-t) |g(t)| dt \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sup_{\tau \in [k-j-1, k-j+1]} f(\tau) \int_j^{j+1} |g(t)| dt \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k (c_{k-j-1} + c_{k-j}) \int_j^{j+1} |g(t)| dt \leq \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_j^{j+1} |g(t)| dt \sum_{k=0}^{\infty} (c_{k-j-1} + c_{k-j}) \right) < +\infty.
 \end{aligned}$$

§4. ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ

Пусть Ω – следующий класс интегральных операторов свертки : если $U \in \Omega$, то

$$(Uf)(x) = \int_0^x u(x-t) f(t) dt, \quad u \in L_1.$$

Оператор $U \in \Omega$ ограничен в пространствах L_p , M , C , C_u (см. [3]). Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что U переводит M_u и M_0 в C_u и C_0 , соответственно. Во всех пространствах E имеет место равенство

$$\|U\|_E = \gamma \equiv \int_0^{\infty} |u(x)| dx. \quad (4.1)$$

Класс Ω образует коммутативную алгебру. Ядром произведения $U = U_1 \cdot U_2$, где $U_1, U_2 \in \Omega$, служит свертка ядер сомножителей $u = u_1 * u_2$.

Уравнение (1.1) можно переписать в операторной форме :

$$(I - U)\varphi = g, \quad (4.2)$$

где I – единичный оператор, $U \in \Omega$.

Если $\gamma < 1$, то согласно (4.1), U – сжимающий в E . Поэтому при $g \in E$ уравнение (3.2) имеет единственное решение в E . Если $u \geq 0$, то $\Phi \geq 0$, где Φ – резольвентная функция, определяемая из уравнения

$$\Phi(x) = u(x) + \int_0^x u(x-t) \Phi(t) dt.$$

Если также $g \geq 0$, то $\varphi \geq 0$. При $\gamma < 1$ имеем

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = \gamma(1 - \gamma)^{-1}, \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = (1 - \gamma)^{-1} \int_0^{\infty} g(x) dx. \quad (4.3)$$

Лемма 4.1. Пусть в уравнении (4.2) $u \geq 0$, $\gamma < 1$ и $g \in \mathbb{R}_d$. Тогда $\varphi \in \mathbb{R}_d$. Если же $g \in \mathbb{R}_{dC}$, то $\varphi \in \mathbb{R}_{dC}$.

Доказательство. В условиях леммы имеем $\Phi \in L_1$ и $\Phi \geq 0$. Утверждение леммы следует из формулы (1.4) и леммы 3.2. Лемма доказана.

Изучение уравнения (1.1), (1.2) связано с построением факторизации специального вида оператора $I - U$. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x u(x-t) \varphi(t) dt \quad (4.4)$$

при предположении, что ядро u обладает непрерывной ячейкой u_1 . Обозначим $u_2 = u - u_1$. Тогда

$$u_i \geq 0, \quad \gamma_i \equiv \int_0^\infty u_i(x) dx \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad \gamma_2 < 1, \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

Пусть U_1 и U_2 — операторы из Ω с ядрами u_1 и u_2 , соответственно. Имеем $U = U_1 + U_2$.

Рассмотрим факторизацию

$$I - U_1 - U_2 = (I - U_2)(I - W), \quad (4.5)$$

где W — искомый оператор из Ω с ядром $w \in \mathbb{R}_{dC}$. Из (4.5) имеем $(I - U_2)W = U_1$. Поэтому ядро w должно удовлетворять уравнению

$$w(x) = u_1(x) + \int_0^x u_2(x-t) w(t) dt. \quad (4.6)$$

Из $\gamma_2 < 1$, $U_1 \in \mathbb{R}_{dC}$ и леммы 4.1 следует, что $0 \leq w \in \mathbb{R}_{dC}$. С учетом второго из равенств (4.3) и равенства $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ заключаем, что w удовлетворяет условиям консервативности (1.2):

$$0 \leq w \in L_1, \quad \int_0^\infty w(x) dx = 1. \quad (4.7)$$

Нам остается вычислить первый момент функции w . Пусть $\nu_k(f) < +\infty$ — момент порядка $k \geq 0$ измеримой функции $f \geq 0$ на $\mathbb{R}^+$:

$$\nu_k(f) = \int_0^\infty x^k f(x) dx (\leq +\infty).$$

Рассмотрим следующие итерации для (4.6) :

$$w_{n+1}(x) = u_1(x) + \int_0^x u_2(x-t) w_n(t) dt, \quad w_0 = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.8)$$

Итерации (4.8) монотонно возрастают сходятся в L_1 к решению w уравнения (4.6).

Мы воспользуемся следующей легко проверяемой формулой (см. [3]) :

$$\nu_k(f * g) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \nu_m(f) \nu_{k-m}(g). \quad (4.9)$$

Применяя эту формулу к равенству (4.8) при $k = 1$, получаем

$$\nu_1(w_{n+1}) = \nu_1(u_1) + \nu_1(u_2)\nu_0(w_n) + \nu_0(u_2)\nu_1(w_n). \quad (4.10)$$

Согласно (4.7) имеем $\nu_0(w_n) \uparrow$ при $n \rightarrow +\infty$.

Если $\nu = \nu_1(u) = +\infty$, то хотя бы одно из чисел $\nu_1(u_1)$ и $\nu_1(u_2)$ равно $+\infty$. Тогда

из (4.10) следует, что $\nu_1(w_n) = +\infty$ при $n \geq 2$. Пусть теперь $\nu = \nu_1(w) < +\infty$.

Тогда из (4.10) индукцией по n проверяются оценки

$$\nu_1(w_n) \leq (1 - \gamma_2)^{-1} \nu_1(u).$$

Следовательно $\nu_1(w) < +\infty$. Совершая в (4.10) предельный переход при $n \rightarrow +\infty$, приходим к равенству

$$\nu_1(w) = (1 - \gamma_2)^{-1} [\nu_1(u_1) + \nu_1(u_2)] = (1 - \gamma_2)^{-1} \nu. \quad (4.11)$$

Это равенство справедливо также при $\nu = +\infty$. Таким образом, нами доказана

Теорема 4.1. Пусть консервативное ядро u обладает непрерывной ячейкой u_2 .

Тогда имеет место разложение (4.5), где $u_1 = u - u_2$. Ядро w удовлетворяет условиям консервативности (4.7) и имеет место равенство (4.11).

§5. ТЕОРЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим консервативное уравнение (4.4) при предположении о существовании непрерывной ячейки u_1 у ядра u . С учетом разложения (4.5) рассматриваемое уравнение сводится к последовательному решению следующих двух уравнений восстановления :

$$(I - U_2)\Psi = g, \quad (5.1)$$

$$(I - W)\varphi = \Psi. \quad (5.2)$$

Заметим, что (5.1) является уравнением со сжимающим оператором. Если $g \in L_1$, то $\Psi \in L_1$ и имеет место равенство, вытекающее из второго равенства (4.3) :

$$\int_0^\infty \Psi(x) dx = (1 - \gamma_2)^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (5.3)$$

Перейдем к уравнению (5.2) с консервативным ядром $w \in \mathbb{R}_{dC}$. Обозначим через Φ_1 резольвентную функцию этого уравнения. Она определяется из уравнения

$$\Phi_1(x) = w(x) + \int_0^x w(x-t) \Phi_1(t) dt. \quad (5.4)$$

Так как свободный член этого уравнения принадлежит $\mathbb{R}_{dC}$, то согласно теореме В (см. введение) существует предел $\Phi_1(+\infty)$, причем

$$\Phi_1(+\infty) = [\nu_1(w)]^{-1} \int_0^\infty w(x) dx = [\nu_1(w)]^{-1} (\geq 0). \quad (5.5)$$

Из непрерывности w и леммы 2.1 следует $\Phi_1 \in C[0, +\infty)$. И так (см. (5.5)) $\Phi \in C_u$. Для решения уравнения (4.4), согласно (1.4), имеем выражение

$$\varphi(x) = \Psi(x) + \int_0^x \Phi_1(x-t) \Psi(t) dt \equiv \Psi(x) + \varphi_1(x). \quad (5.6)$$

Из $\Psi \in L_1$, $\Phi_1 \in C_u$ и леммы 2.2 следует, что $\varphi_1 \in C_u$, причем

$$\varphi_1(+\infty) = \Phi_1(+\infty) \int_0^\infty \Psi(x) dx.$$

С учетом равенств (5.5), (5.3) и (4.9) получаем

$$\varphi_1(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx. \quad (5.7)$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 5.1.. Пусть в консервативном уравнении (4.4) ядро u обладает непрерывной ячейкой u_1 и $g \in L_1$. Тогда решение уравнения имеет вид (5.6), где $\Psi \in L_1$, $\varphi_1 \in C_u$ и имеет место равенство (5.7).

Теорема 2.1 дает возможность существенно усилить результат теоремы 5.1, освободив ее от требования существования непрерывной ячейки. Для удобства

вместо общего уравнения (1.1) мы рассмотрим уравнение (1.3) для резольвенты в консервативном случае (1.2). Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\Phi = g_1 + V^2 \Phi, \quad (5.8)$$

где $g_1 = V + V * V \in L_1$.

Ядром оператора V^2 , фигурирующего в (5.8), служит функция w , определяемая по формуле $w = V * V$. Согласно теореме 2.1 функция w обладает непрерывной ячейкой. Поэтому уравнение (5.8) удовлетворяет условиям теоремы 5.1 и его решение Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \tilde{\mu} + \rho_0(x) + \Psi(x), \quad (5.9)$$

где $\rho_0 \in C_0$, $\Psi \in L_1$, $\tilde{\mu} = (\nu_1(w))^{-1} \int_0^\infty [V(x) + w(x)] dx$.

Для определения значения $\tilde{\mu}$ воспользуемся формулой (4.9) при $k = 0$ и $k = 1$.

Получим $\nu_1(w) = 2\nu_1(V)$, $\nu_0(w) = \nu_0(V) = 1$. Поэтому $\tilde{\mu} = \nu^{-1}$. Нами доказана

Теорема 5.2 (Теорема восстановления, основная форма). Резольвентная функция Φ консервативного уравнения (1.1), (1.2), определяемая из уравнения восстановления (1.3), имеет вид

$$\Phi(x) = \nu^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x), \quad (5.10)$$

где $\rho_0 \in C_0$, $\Psi \in L_1$.

Формула (5.10) в сочетании с (1.4) дает возможность получить асимптотические свойства решения уравнения (1.1) при тех или иных ограничениях на g . Из (5.10) и (1.4) имеем

$$\varphi(x) = g(x) + \nu^{-1} \int_0^x g(t) dt + \int_0^x \rho_0(x-t) g(t) dt + \int_0^x \Psi(x-t) g(t) dt.$$

Пусть $g \in L_1$. Тогда

$$\varphi(x) = \mu + \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad (5.10')$$

где

$$\mu = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx, \quad (5.11)$$

$$\varphi_2(x) = g(x) + \int_0^x \Psi(x-t) g(t) dt \in L_1, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x \rho_0(x-t) g(t) dt \in C_0.$$

Пусть теперь $g \in L_1 \cap M_0$. Тогда, согласно лемме 2.2, $\varphi_2 \in L_1 \cap M_0$. Мы пришли к такой теореме.

Теорема 5.3 (Теорема восстановления, альтернативная форма).

а) Если $g \in L_1$, то решение уравнения (1.1) имеет вид (5.10'), где $\varphi_0 = C_0$, $\varphi_2 \in L_1$ и μ определяется по формуле (5.11);

б) если $g \in L_1 \cap M_0$, то $\varphi_2 \in L_1 \cap M_0$ и

$$\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^{\infty} g(x) dx. \quad (5.12)$$

§6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из теоремы 5.2 следует пункт а) теоремы В. А из теоремы 5.3 следует пункт б) теоремы В. Действительно, пусть $g \in \mathbb{R}_d$. Тогда, в силу леммы 3.1, $g \in L_1 \cap M_0$ и поэтому (см. теорему 5.3, пункт б)) имеет место (1.6). Теоремы 5.2 и 5.3 применимы для более широкого класса свободных членов g чем теорема В. Даже такая простая функция $g \in L_1$ как

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \in (n; n+1/n) \\ 0 & \text{если } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (n; n+1/n) \end{cases}$$

не является непосредственно интегрируемой по Риману. Следовательно, к ней не применим пункт б) теоремы В, в то же время к ней применима теорема 5.3. Более того, любую ненулевую функцию можно умножить на ограниченную функцию так, чтобы произведение было разрывной на множестве положительной меры. Следовательно, произведение не будет НИР и к нему не применима теорема В. В этом смысле теорема 5.3 более устойчива, поскольку если $g \in L_1 \cap M_0$, то $gf \in L_1 \cap M_0$ при любом $f \in M$. Для иллюстрации докажем следующую лемму.

Лемма 6.1. Пусть $f(x) \geq 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} f(x+k) = +\infty$ для некоторого $x \in [0, 1)$. Тогда существует $\varphi(x) \in C_0$ такое, что $f(x)\varphi(x) \notin \mathbb{R}_d$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = +\infty. \quad (6.1)$$

Из (6.1) следует существование натуральных чисел $n_m \uparrow +\infty$ таких, что

$$\sum_{k=n_m}^{n_m+1} f(k) > n_m 2^{2m}. \quad (6.2)$$

Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{если } x = k, n_m < k < n_{m+1} \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (k - 1/k^2; k + 1/k^2), \end{cases}$$

и пусть φ линейна на отрезках $[k - 1/k^2; k]$, $[k; k + 1/k^2]$.

Пусть $\lambda > 0$. Положим $x_n = \frac{n}{2^p}$, где p выбрано так, что $2^{-p} < \lambda$, и рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n) \varphi(\xi_n) (x_n - x_{n+1}).$$

Если среди точек ξ_n будут все натуральные числа, то

$$\sigma \geq \sum_{n=n_m 2^p+1}^{n_{m+1} 2^p} f(\xi_n) \varphi(\xi_n) 2^{-p} - n_m > \frac{1}{m} 2^{-p} 2^{2m} n_m - n_m \rightarrow +\infty \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Аналогично можно установить, что если вместо условия $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_0 + k) = +\infty$ выполняется более слабое условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = +\infty$, где $c_k = \sup_{x \in [k, k+1)} f(x)$, то можно построить функцию φ из C_0 такую, что $f\varphi \notin \mathbb{R}_d$.

Лемма 6.2.. Пусть $\varphi \notin M$, $\varphi(+\infty) = 0$ и $0 \leq \varphi \in L_1$. Тогда существует $f(x) \in L_1$ такая, что функция

$$\Psi(x) = \int_0^x f(x-t) \varphi(t) dt$$

не принадлежит $M(a, +\infty)$ при любом a .

Доказательство. Существует такое n , что $\varphi(x) \notin M(0, n)$ и $\varphi(x) < 1$, когда $x \in (n, \infty)$. Обозначим

$E_k = \{t \in (0, n): \varphi(t) > 2^k\}$ и положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x - n(k-1)), \quad \text{где } f_k(x) = \frac{1}{k^2 \mu(E_k)} \chi_{E_k}(n-x).$$

Тогда очевидно, что

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^n f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \Psi(nm) &= \int_0^{nm} f(nm-x) \varphi(x) dx = \\ &= \sum_{k < m} \int_0^{nm} f_k(nm-x) \varphi(x) dx + \int_0^n f_m(n-x) \varphi(x) dx = O(1) + \frac{2^k}{k^2} \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Поскольку $f(x)$ — локально ограниченная функция и $\varphi \in L_1$, то Ψ — непрерывная функция (см. лемму 2.1). Поэтому из (6.3) следует, что $\Psi \notin M(a, \infty)$ при любом a .

Теперь вернемся к теореме 5.3. Из леммы 5.2 следует, что если $g \notin M$, то существует $0 \leq v \in L_1$ и $v_0(v) = 1$ такая, что функция

$$\Theta(x) = \int_0^x v(x-t)g(t)dt \quad (6.4)$$

не принадлежит $M(a, \infty)$ при любом a . Если φ – решение уравнения $\varphi = g + v * \varphi$, то $\varphi = g + \Phi * g$, где Φ определяется из уравнения (1.3) и

$$\varphi(x) = g(x) + \int_0^x \Phi(x-t)g(t)dt \geq g(x) + \int_0^x v(x-t)g(t)dt \geq \Theta(x).$$

Таким образом, для выполнения соотношения (5.12) необходимо, чтобы $g \in M$.

Мы увидели, что при любом $g \notin M$ существует ядро $v \in L_1$ такое, что решение $\varphi(x)$ уравнения восстановления (1.1), (1.2) не удовлетворяет (5.12).

Теперь укажем класс ядер v , удовлетворяющих условиям (1.2), для которых существуют функции $g \in L_1$, $g \notin M$ такие, что для решения φ уравнения (1.1) не выполняется (5.12).

Лемма 6.3. Пусть функция $0 \leq v \in L_1$ не принадлежит $M(a, \infty)$ при любом $a < \infty$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует $g \in L_1 \cap M(\varepsilon, \infty)$ такая, что функция $\Theta(x)$, определяемая формулой (6.4), не принадлежит $M(a, \infty)$ при любом a .

Доказательство. Существуют отрезки $I_k = [a_k - 2^k, a_k]$ такие, что $a_k > k$ и $\mu\{x \in I_k: v(x) > 2^{2k}\} = \alpha_k > 0$. Положим $g_k(x) = \frac{1}{2^k \alpha_k} \chi_{I_k}(a_k - x)$, где χ_{I_k} – характеристическая функция отрезка I_k . Тогда

$$\begin{aligned} (v * g_k)(a_k) &= \int_0^{a_k} g_k(a_k - t)v(t)dt > 2^{2k} \int_{I_k} g_k(a_k - t)v(t)dt = \\ &= \frac{2^{2k}}{2^k \alpha_k} \int_{I_k} \chi_{I_k}(t)dt = 2^k. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} g_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Из (6.5), с учетом леммы 2.1, получим, что при любом $a < \infty$ $v * g \notin M(a, \infty)$.

Ясно, что $g \in M(\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что если $0 \leq v \in L_1$ и $v \notin M(a, \infty)$ при любом $a < \infty$, то существует функция $g \in L_1 (\bigcap_{\varepsilon > 0} M(\varepsilon, \infty))$ с носителем в $[0, 1]$ такая, что решение уравнения (1.1) не удовлетворяет (5.2). Отметим, что в указанный класс ядер v входят также функции из $\bigcap_{p < \infty} L_p$.

ABSTRACT. We consider the renewal equation $\varphi(x) = g(x) + \int_0^x v(x-t) \varphi(t) dt$, where $0 \leq v \in L_1^+ \equiv L_1(0, \infty)$, $\int_0^\infty v(x) dx = 1$. Let Φ be the resolvent function which is determined from the same equation with $g = v$. The following modifications of classical renewal theorems have been obtained: i) $\Phi(x) = v^{-1} + \rho_0(x) + \Psi(x)$, where $\rho_0 \in C[0, \infty)$, $\rho_0(+\infty) = 0$, $\Psi \in L_1^+$, $\nu = \int_0^\infty x v(x) dx \leq +\infty$, $\nu^{-1} \geq 0$. ii) If $g \in L_1^+$ is bounded and $g(+\infty) = 0$, then $\varphi(+\infty) = \nu^{-1} \int_0^\infty g(x) dx$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и ее Приложения, т. 2, Мир, М., 1967.
2. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-Разностные Уравнения, Мир, М., 1967.
3. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. Анал., т. 22, стр. 175 — 244, 1984.
4. В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, М., 1967.
5. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в Свертках и Проекционные Методы их Решения, М., Наука, 1971.
6. И. П. Натансон, Теория Функций Вещественной Переменной, М., Гостехиздат, 1957.
7. Б. С. Каший, А. А. Саакян, Теория Ортогональных Рядов, М., Наука, 1984.

29 ноября 1996

Ереванский государственный университет,
Бюраканская астрофизическая обсерватория
НАН Армении