О ЧИСЛЕ РАЗЛИЧНЫХ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА

М. А. Мкртчян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 6, 1996

В работе [1] Р. Браун получил некоторые результаты относительно числа *различных* нулей многочлена. Тому же вопросу посвящена настоящая заметка.

Теорема 1. *Количество различных нулей многочлена*

$$P(z) = 1 + a_k z^k + \cdots + a_n z^n,$$

где $n \geq k$, $a_n \neq 0$, *не меньше* k.

Теорема 2. *Количество различных нулей многочлена*

$$P(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + a_m z^m + \cdots + a_n z^n,$$

где $n \geq m > k \geq 0$, $a_n a_k a_m \neq 0$, *не меньше* $\dfrac{n}{n-m+k+1}$.

При $m = n$ из теоремы 2 получаем

Следствие. Количество различных нулей многочлена

$$P(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + a_n z^n,$$

где $n > k \geq 0$ и $a_n a_k \neq 0$, не меньше $\dfrac{n}{k+1}$.

Замечание. Если в теореме 2 положить $k = 0$ и $m = k$, то оценка числа различных нулей многочлена $P(z)$ будет $\dfrac{n}{n-k+1}$. Так как $n \geq k$, то

$$\frac{n}{n-k+1} = 1 + \frac{k-1}{n-k+1} \leq 1 + k - 1 = k,$$

т.е. результат теоремы 1 сильнее результата теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. При $P(z)$ точка $z = 0$ является 1-точкой кратности k. Следовательно, число различных 1-точек $P(z)$, т.е. число различных корней уравнения $P(z) - 1 = 0$, не больше чем $n - k + 1$ ($z = 0$ есть k-кратный корень, а остальные могут быть простыми корнями).

Известен следующий факт (см. [2]) : количество различных точек, в которых многочлен степени n принимает значения 0 или 1, не больше $n + 1$. Если обозначить через $N(a)$ количество различных a-точек многочлена $P(z)$, т.е. количество различных корней уравнения $P(z) - a = 0$, то из вышесказанного следует

$$N(1) \leq n - k + 1, \quad N(0) + N(1) \geq n + 1.$$

Отсюда $N(0) \geq k$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если $P(\xi) = 0$, то в условиях теоремы 2 кратность $z = \xi \neq 0$ не больше $n - m + k + 1$. Действительно, $k + 1$-ая производная многочлена $P(z)$ представляется в виде

$$P^{(k+1)}(z) = z^{m-k-1}Q(z),$$

где $Q(z)$ - многочлен степени $n - m$. Следовательно, $z = \xi$ может быть нулем многочлена $P^{(k+1)}(z)$ с кратностью не больше $n - m$. Тогда кратность нуля $z = \xi$ многочлена $P(z)$ не больше $n - m + k + 1$. А так как число нулей многочлена $P(z)$ с учетом их кратностей равно n, то $N(0) \cdot (n - m + k + 1) \geq n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Brown, A. Robert, "A topological bound on the number of distinct zeros of an analytic function", Pacific J. of Mathem., vol. 118, № 1, 1985.
2. М. А. Мкртчян, "Об одной задаче Янга", – в кн : Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, стр. 237, Красноярск, 1980.

26 февраля 1995

Красноярский региональный
центр развития образования
Россия