ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ВЕЙЛЮ В ОБОБЩЕННЫХ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССАХ

Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 6, 1996

Исследуется дробное интегродифференцирование по Вейлю в обобщенных гельдеровских классах $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$. Характеристика $\omega(t)$ предполагается принадлежащей классам $A_{\lambda,\mu}$ или классам Φ_s^m типа Бари–Стечкина, где число m характеризует порядок производной, а k – порядок конечной разности. Основной результат заключается в изоморфизме, устанавливаемом дробным интегральным оператором $J_{(\alpha)}\varphi = \psi_\alpha * \varphi$ при произвольном $\alpha > 0$, между пространствами

$H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ и $H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi)$, где

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}, \quad \omega_\alpha(t) = t^\alpha\omega(t),$$

а параметры m, k, ω удовлетворяют некоторым условиям согласования. Для $\omega \in A_{\lambda,\mu}$ эти условия $0 \le m \le \lambda < \mu \le m+k$, а для $\omega \in \Phi_s^m$ эти условия даются в терминах так называемых индексных чисел.

Помимо этого в работе получены оценки типа Зигмунда интегрального модуля непрерывности и изучено действие операторов дробного интегродифференцирования.

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется дробное интегродифференцирование по Вейлю произвольного порядка $\alpha > 0$ в обобщенных гельдеровских классах $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$. Характеристика $\omega(t)$ берется из классов $A_{\lambda,\mu}$, $0 \le \lambda < \mu$ неотрицательных непрерывных функций таких, что $t^{-\lambda}\omega(t)$ почти возрастает, а $t^{-\mu}\omega(t)$ почти убывает, либо из классов Φ_s^m типа Бари–Стечкина, где число m характеризует порядок производной, а k – порядок конечной разности (подробнее об этих классах и их свойствах см. [3], [8], [10], [13] – [15]).

Известно, что оператор дробного интегрирования устанавливает изоморфизм в гельдеровской шкале между пространствами $H_0^{\lambda}(0,1)$ и $H_0^{\lambda+\alpha}(0,1)$, где $\alpha > 0$ – порядок дробного интеграла, $\lambda + \alpha < 1$ и H_0 соответствует условию. При переходе к классам $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ возникает необходимость найти замену нулевому начальному условию. В непериодическом случае это сделано в [4], [6], [9], [10]. В периодическом случае эта проблема решается отчасти легче за счет возможности периодического продолжения вне $[0,2\pi]$, при этом рассматриваются функции со средним значением на $[0,2\pi]$, равным нулю. В [13] рассмотрено дробное интегродифференцирование в пространствах периодических функций $H_\infty^{\omega,0,k}(0,2\pi)$. В указанных работах даны оценки типа Зигмунда модулей непрерывности первого порядка дробного интеграла Вейля и дробных производных Маршо при $0 < \alpha < 1$.

В настоящей работе нам удается рассмотреть случай $p < \infty$ и произвольного порядка $\alpha > 0$. Возможность перехода к произвольному α основывается на двух подходах. Один связан с выяснением условий на характеристику $\omega(t)$, при которых классы $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ не зависят от параметров m и k. Например, для классов $A_{\lambda,\mu}$ это будет при $0 \le m \le \lambda < \mu \le m+k$, а для Φ_s^m подобное условие дается в терминах индексных чисел m_ω и M_ω.

Другой подход связан с получением оценок для L_p-модулей непрерывности ω_p^k дробного интеграла J_α и дробной производной $\mathcal{D}^\alpha$ при любом $\alpha > 0$. На основании этих подходов устанавливается основной результат работы – теорема об изоморфизме обобщенных периодических гельдеровских пространств, осуществляемом дробным интегралом при произвольном $\alpha > 0$. В свою очередь этот результат опирается на два центральных утверждения : теорему о действии дробного интеграла

$$J_\alpha\varphi: \; H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi) \longmapsto H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi),$$

где $\omega_\alpha(h) = h^\alpha\omega(h)$ при условии согласования m,k с характеристикой ω, и аналогичного утверждения

$$\mathcal{D}^\alpha f: \; H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi) \longmapsto H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$$

для дробной производной. Отметим, что дробное интегродифференцирование

Вейля встречается в различных приложениях (см., например, [2], [14], [15], а также [1] и [17]).

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ И КЛАССЫ ХАРАКТЕРИСТИК

Через $L_p = L_p(0, 2\pi)$, $p \geq 1$ будем обозначать пространства 2π-периодических функций с нормой $||f||_p < \infty$, где

$$||f||_p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in(0,2\pi)} |f(x)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть Δ_h^k обозначает нецентрированную конечную разность порядка k с шагом $h > 0$:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+k} C_k^i f(x + ih), \quad k \in \mathcal{N}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{N}$ – множество натуральных чисел. Модулем непрерывности порядка k функции $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ для $\delta \geq 0$ называют величину

$$\omega_p^k(f, \delta) = \sup_{0 \leq t \leq \delta} ||\Delta_t^k f(x)||_p, \quad k \in \mathcal{N}. \tag{1.2}$$

Напомним, что функция $\omega(t)$ называется *почти возрастающей (почти убывающей)*, если для $t_1 < t_2$ существует постоянная $c > 0$ такая, что $\omega(t_1) \leq c\omega(t_2)$ $(\omega(t_1) \geq c\omega(t_2))$.

Определение 1. Классом W называется множество почти возрастающих непрерывных на $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющих условиям $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ при $t > 0$.

Определение 2. Для $\mu > \lambda \geq 0$ класс $A_{\lambda,\mu}$ определяется как множество тех функций $\omega(t) \in W$, для которых $\omega(t)t^{-\lambda}$ почти возрастает, а $\omega(t)t^{-\mu}$ почти убывает.

Определение 3. Для $l > 0$ и $0 \leq m < s$ класс $\Phi_s^m = \Phi_s^m[0, l]$ определяется как множество тех функций $\omega(t) \in W$, для которых

$$\int_0^t \frac{\omega(\xi)}{\xi^{m+1}}\,d\xi \leq c_\omega \frac{\omega(t)}{t^m}, \quad \int_t^l \frac{\omega(\xi)}{\xi^{s+1}}\,d\xi \leq c_\omega \frac{\omega(t)}{t^s},$$

где c_ω – постоянные. Заметим, что при $m \geq s$ класс Φ_s^m пуст.

Определение 4. Для целых $m \geq 0$, $k > 0$ и для $p \geq 1$, $\omega(t) \in W$ класс $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ определяется как множество тех функций $f \in L_p(0,2\pi)$, которые имеют обобщенные производные $f^{(j)}$ до порядка m и удовлетворяют неравенству

$$||\Delta_h^k f(x)||_p \leq \frac{M\omega(h)}{h^m}, \tag{1.3}$$

где $M > 0$ – постоянная, не зависящая от $h \in \mathbb{R}_+^1$. Положим

$$||f||_{H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)} = ||f||_p + M_f, \quad f \in H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi),$$

где M_f – наименьшая постоянная в (1.3). В нижеследуемых оценках будем писать $M = M_{p,\omega,m,k}(f)$. Пусть $\omega(h) \in W$. Пространство $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ *не зависит от выбора* параметров m и k, если

$$H_p^{\omega,m_1,k_1}(0,2\pi) = H_p^{\omega,m_2,k_2}(0,2\pi). \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$, и пусть m_i, k_i, $i = 1,2$ – целые числа, удовлетворяющие условию*

$$\max(m_1,m_2) \leq \lambda < \mu \leq \min(m_1+k_1, m_2+k_2). \tag{1.5}$$

Тогда равенство (1.4) справедливо.

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [11], стр. 255 и опирается на следующую легко проверяемую лемму (ср. [11], стр. 200).

Лемма 1.1. *Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ и $0 \leq m \leq \lambda < \mu \leq m+k$. Если для наилучшего приближения $E_\nu(f)_p$ в метрике L_p, $p \geq 1$ тригонометрическими полиномами порядка ν выполняется неравенство $E_\nu(f)_p \leq k\omega((\nu+1)^{-1})$, $\nu \in N$, то $f \in H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$.*

Отметим некоторые свойства классов $W, A_{\lambda,\mu}, \Phi_s^m$. Прежде всего они замкнуты относительно сложения, а класс W еще и относительно умножения. Пусть $u \circ v$ обозначает суперпозицию функций u и v, т.е. $(u \circ v)(x) = u(v(x))$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения :*

1) если $u \in A_{\lambda,\mu}$, $v \in A_{\eta,\nu}$, то $uv \in A_{\lambda+\eta,\mu+\nu}$, $u \circ v \in A_{\lambda\eta,\mu\nu}$;

2) если $u \in \Phi_s^m$, $v \in \Phi_r^p$, *то* $uv \in \Phi_{r+s}^{m+p}$, $u \circ v \in \Phi_{rs}^{mp}$;

3) если $u \in \Phi_s^m$, *то* $u^\alpha \in \Phi_{\alpha s}^{\alpha m}$, *где* $\alpha > 0$;

4) если $u \in A_{\lambda,\mu}$, $v \in W$, *то* $uv \in W$;

5) если $u \in \Phi_s^m$, $v \in W$, *то* $uv \in W$;

6) если $u, v \in W$, v *возрастает,* u *почти возрастает, то* $u \circ v \in W$.

Доказательство следует из определений классов $W, A_{\lambda,\mu}, \Phi_s^m$ и следующего важного утверждения : если $\omega(t) \in \Phi_s^m$, то для некоторого $\varepsilon > 0$ функция $t^{-m-\varepsilon}\omega(t)$ почти возрастает, а $t^{-s+\varepsilon}\omega(t)$ почти убывает.

Следующий пример показывает, что 6) не влечет $v \circ u \in W$.

Пример. Пусть

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad u(x) = x^\gamma\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Очевидно, $v(x)$ убывает, а $u(x)$ почти возрастает. Следовательно, $u \circ v \in W$, а $v \circ u \notin W$.

Для классов Φ_s^m и W можно ввести понятие *индексных чисел* (см., например, [18]). Функции $\overline{\Omega}(\xi)$ и $\underline{\Omega}(\xi)$, определенные как

$$\overline{\Omega}(\xi) = \overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}, \quad \underline{\Omega}(\xi) = \underline{\lim_{h\to 0}}\frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}, \tag{1.6}$$

называются *верхней и нижней индексными функциями*, соответственно.

Определение 5. Для функции $\omega \in W$ (или $\omega \in \Phi_s^m$) числа m_ω и M_ω, определенные из

$$m_\omega = \sup_{\xi>1}\frac{\ln\underline{\Omega}(\xi)}{\ln\xi} = \sup_{\xi>1}\left\{\frac{1}{\ln\xi}\ln\left[\underline{\lim_{h\to 0}}\frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}\right]\right\}, \tag{1.7}$$

$$M_\omega = \inf_{\xi>1}\frac{\ln\overline{\Omega}(\xi)}{\ln\xi} = \inf_{\xi>1}\left\{\frac{1}{\ln\xi}\ln\left[\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\omega(\xi h)}{\omega(h)}\right]\right\}, \tag{1.8}$$

называются *нижней и верхней индексными числами* функции ω, соответственно.

Отметим некоторые свойства m_ω и M_ω при условии их конечности. Прежде всего заметим, что если $\omega \in W$, то $\omega \in \Phi_s^m$ тогда и только тогда, когда $m < m_\omega \le M_\omega < s$. Среди функций класса W выделим те, которые удовлетворяют одному из условий

(A) существует $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(xh)}{u(h)}$,

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(xh)}{u(h)} = x^\mu$.

Лемма 1.3 (см. [10]). *Пусть $u, v \in W$. Тогда*

a) если выполнено условие (A), то

$$m_{u^\alpha} = \alpha m_u, \quad M_{u^\alpha} = \alpha M_u, \quad \alpha > 0, \qquad m_{uv} \le m_u + m_v, \quad M_{uv} \ge M_u + M_v;$$

b) если выполнено условие (B), то

$$m_u = M_u = \mu, \qquad m_{uv} = \mu + m_v, \quad M_{uv} = \mu + M_v.$$

Отметим еще (см. [18] и [7], стр.76), что если $u, v \in W$ не убывают и существуют конечные индексные числа m_u, m_v, M_u и M_v, то из сравнимости $c_1 u \le v \le c_2 u$ следует, что $m_u = m_v$, $M_u = M_v$, причем это утверждение необратимо. Наконец, отметим, что если $\omega \in \Phi_s^m$ и удовлетворяет условию (A), то $m_\omega = M_\omega$.

Важное значение для дальнейшего имеют следующие две теоремы из [10].

Теорема 1.2. *Пусть $\omega(t) \in W$ и существуют индексные числа m_ω, M_ω, причем $0 < m_\omega \le M_\omega < \infty$, $m < m_\omega$, $s > M_\omega$. Тогда*

$$\Phi_s^m = \bigcup_{m<\lambda<m_\omega} \bigcup_{M_\omega<\mu<s} A_{\lambda,\mu}. \tag{1.9}$$

Теорема 1.1$'$. *Пусть $\omega(t) \in W$ и существуют индексные числа m_ω, M_ω, причем $0 < m_\omega \le M_\omega < \infty$. Если*

$$m < m_\omega \le M_\omega < m + k, \tag{1.10}$$

то пространство $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ не зависит от выбора параметров m и k.

Для дальнейшего важна следующая лемма, выводимая из неравенства Маршо (см. [14]).

Лемма 1.4. *Пусть*

$$\varphi \in H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi),\ 1 \le p \le \infty,\ \omega(h) \in A_{\lambda,\mu},\ m \le \lambda < \mu,\ k_0 = [\mu]+1,\ k > k_0,$$

где $[\mu]$ – целая часть μ. Тогда

$$\omega_p^{k_0}(\varphi,h) \le c\omega(h)\left(||\varphi||_p + \sup_{h>0}\frac{\omega_p^k(\varphi,h)}{\omega(h)}\right). \tag{1.11}$$

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $m = 0$. Воспользуемся неравенством Маршо. Имеем

$$\omega_p^{k_0}(\varphi,h) \le ch^{k_0}\int_h^\pi \frac{\omega_p^k(\varphi,t)}{t^{k_0+1}}\,dt + h^{k_0}||\varphi||_p \le cM_\varphi h^{k_0}\frac{\omega(h)}{h^\mu}\int_h^\pi \frac{dt}{t^{k_0+1-\mu}} + h^{k_0}||\varphi||_p.$$

Так как $k_0 > \mu$, то $h^{k_0} \le c\omega(h)$. Поэтому

$$\omega_p^{k_0}(\varphi,h) \le c\omega(h)\left(M_\varphi h^{k_0-\mu}\int_h^\infty \frac{dt}{t^{k_0+1-\mu}} + ||\varphi||_p\right) \le$$

$$\le c\omega(h)\left(||\varphi||_p + \sup_{h>0}\frac{\omega_p^k(\varphi,h)}{\omega(h)}\right),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичную лемму можно доказать для характеристик из класса Φ_s^m.

В заключение этого пункта остановимся на вопросе о том, сохраняется ли гладкость функций при периодическом продолжении. Пусть

$$\widetilde{\omega}_p^k(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta}\left(\int_0^{2\pi-kh} |(\Delta_h^k f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 0<\delta\le\frac{2\pi}{k} \tag{1.12}$$

– *непериодический модуль непрерывности.* Будем говорить, что *периодическое продолжение сохраняет гладкость*, если $\omega_p^k(f,\delta) \sim \widetilde{\omega}_p^k(f,\delta)$, т.е. существуют постоянные $c_2 > c_1 > 0$ такие, что

$$c_1\widetilde{\omega}_p^k(f,\delta) \le \omega_p^k(f,\delta) \le c_2\widetilde{\omega}_p^k(f,\delta).$$

Нетрудно проверить, что эта эквивалентность имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sup_{0<h<\delta}\left(\int_{2\pi-kh}^{2\pi} |(\Delta_h^k f)(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \sim \widetilde{\omega}_p^k(f,\delta). \tag{1.13}$$

Простые примеры (см. также [12]) показывают, что периодическое продолжение, вообще говоря, не сохраняет свойство гладкости.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^n & \text{при } 0\le x\le 2\pi, \\ f(x-2\pi) & \text{при } x>2\pi, \end{cases} \qquad n\in\mathcal{N}.$$

Учитывая, что

$$\Delta_h^k x^n = \begin{cases} 0 & \text{при } n<k, \\ (-1)^k k!\,h^k & \text{при } n=k, \end{cases}$$

нетрудно понять, что $\widetilde{\omega}_p^k(f,\delta) = 0$ при $k > n \geq 2$, в то время как $\omega_p^k(f,\delta) \neq 0$, $k > n \geq 2$. Различны эти модули и при $k \geq n = 1$. Имеем $\widetilde{\omega}_p^k(f,\delta) \leq c\delta^k$, в то время как $\omega_p^k(f,\delta) \sim \delta^{1/p}$. Если ввести классы

$$\widetilde{H}_p^\mu(0,2\pi) = \left\{f : \widetilde{\omega_p^1}(f,\delta) \leq c\delta^\mu\right\}, \quad H_p^\mu(0,2\pi) = \left\{f : \omega_p^1(f,\delta) \leq c\delta^\mu\right\},$$

то из сказанного выше следует, что $f(x) = x \in \widetilde{H}_p^\mu(0,2\pi)$ для всех $0 < \mu \leq 1$, в то время как $f(x) = x \in H_p^\mu(0,2\pi)$ лишь для $0 < \mu \leq 1/p$.

§2. СВЕРТКА В $L_p(0,2\pi)$

Через $L_{p,\sigma} = L_{p,\sigma}(0,2\pi)$ будем обозначать те функции $\varphi(x) \in L_p(0,2\pi)$, для которых $\varphi_k = 0$, $k \in \sigma \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ – множество целых чисел), где

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\exp(-ikx)\,dx$$

– коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$. Если $\sigma = \emptyset$, то пишем $L_{p,\sigma} = L_p$, если $\sigma = \{0\}$, то $L_{p,\sigma} = L_{p,0}$. Очевидно, что $L_{p,\nu} \subset L_{p,\sigma}$, если $\sigma \subset \nu$. Напомним, что интегральный оператор

$$u * v = (u * v)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x-t)v(t)\,dt \tag{2.1}$$

называют *оператором свертки*.

Лемма 2.1. *Пространство $L_{p,\sigma}$, $p \geq 1$ етсь коммутативное нормированное кольцо относительно свертки. Если $\mathbb{Z} \setminus \sigma$ не ограничено, то это кольцо без единицы. Если $\sigma \subset \nu$, то $L_{p,\nu}$ есть идеал кольца $L_{p,\sigma}$. Если $u \in L_p$ и $v \in L_{1,\sigma}$, то $u * v \in L_{p,\sigma}$.*

Доказательство. То, что $L_{p,\sigma}$ есть кольцо относительно свертки, следует из вложений $L_{p,\sigma} \subset L_{1,\sigma}$, $p \geq 1$ и $L_p * L_1 \subset L_p$. Для коэффициентов Фурье справедливо равенство

$$(u * v)_k = 2\pi v_k u_k = (v * u)_k. \tag{2.2}$$

Из единственности коэффициентов Фурье и (2.2) следует, что $L_{p,\sigma}$ – коммутативное кольцо. Кроме того, если $u \in L_{p,\sigma}$ то для любого $v \in L_{p,\nu}$ имеем $(u * v)_k = 0$

для любого $k \in \nu$, т.е. $(u*v)(x) \in L_{p\sigma}$. То, что $(u*v)(x)$ – периодическая функция, очевидно. Наконец, из (2.2) следует отсутствие единицы кольца. Иначе, пользуясь произволом в выборе $u(x)$ и выбирая $u_n(x) = e^{inx} \in L_{p,\sigma}$, $n \notin \sigma$, получим, что $v_k = 1/2\pi$ для любого $k \in \mathbb{Z} \setminus \sigma$, что невозможно, т.к. $v_k \to 0$ при $k \to \infty$. Отметим еще, что $||u*v||_p \leq c||u||_p||v_p||$. Наконец, последнее утверждение леммы следует из (2.2) и теоремы о свертке.

Отметим, что если $v(x)$ периодична и $(\Delta_h^k v)(x) \equiv 0$ для любого $h > 0$ при некотором $k \in \mathcal{N}$, то $v(x) = const$. Обознчим через $(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x+h)$ оператор сдвига.

Лемма 2.2. *Пусть $u, v \in L_{p,\sigma}$, $1 \leq p \leq \infty$. Оператор свертки инвариантен относительно сдвига*

$$\tau_h(u*v) = \tau_h u * v = u * \tau_h v, \quad \Delta_h^k(u*v) = u * \Delta_h^k v, \tag{2.3}$$

так что

$$||\Delta_h^k(u*v)||_p \leq ||u||_p \int_{-\pi}^{\pi} |(\Delta_h^k v)(t)|\, dt, \tag{2.4}$$

$$||\Delta_h^k(u*v)||_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} |(\Delta_h^k v)(t)|\, \omega_p^1(u, |t|)\, dt, \quad \sigma \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Доказательство. (2.3) следует из периодичности функций u и v, а уже из него применением теоремы о свертке получаем (2.4). Что касается (2.5), то при его доказательстве следует дополнительно воспользоваться тем, что $v_0 = 0$.

§3. ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВЕЙЛЮ

Всюду в дальнейшем рассматриваем класс $L_p = L_{p,0}$. Пусть $J_{(\alpha)}$ обозначает дробный интеграл по Вейлю (см. [13], стр. 264)

$$J_{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\psi_\alpha(t)\, dt, \tag{3.1}$$

где

$$\psi_\alpha(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{3.2}$$

причем при целых α имеем $\psi_n(t) = c_n B_n(t/(2\pi))$, $0 < t < 2\pi$, где $B_n(t)$ – многочлены Бернулли. Можно выписать явный вид $\psi_n(t)$ при $n \in \mathcal{N}$ и $t \in [0, 2\pi]$.

При этом $\psi_1(t) = \pi - t$, $c_2 = \pi^2/6$ и

$$\psi_{2n+1}(t) = \frac{(\pi-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{j=0}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{(\pi-t)^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad n = 1,2,...,$$

$$\psi_{2n}(t) = -\frac{(\pi-t)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{j=0}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{(\pi-t)^{2j}}{(2j)!}, \quad n = 1,2,...,$$

где

$$c_{2n} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} - \sum_{j=1}^{n-1} c_{2(n-j)} \frac{\pi^{2j}}{(2j+1)!}, \quad n = 2,3,...$$

В дальнейшем нам понадобится неравенство ($t \in (-\pi,\pi)$)

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}\psi_\alpha(t)\right| \le c|t|^{\alpha-1-j}, \quad j \ge [\alpha], \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \tag{3.3}$$

доказанное в [13] для $0 < \alpha < 1$. Покажем, что (3.3) верно и для $\alpha > 1$. Действительно, подействовав на $J_{(\alpha)}\varphi = c\psi_\alpha * \varphi$ при $1 < \alpha < 2$ оператором $D^1 = \frac{d}{dx}$, получим $D^1 J_{(\alpha)}\varphi = J_{(\alpha-1)}\varphi = c\psi_{\alpha-1} * \varphi$. Имеем $\psi_{\alpha-1} * \varphi = \frac{d}{dx}\psi_\alpha * \varphi$. Теперь для $\frac{d}{dx}\psi_\alpha(x)$ уже применима оценка из [13]. Аналогично можно рассуждать при и произвольном $\alpha \in (s, s+1)$ и $s \in \mathcal{N}$.

Отметим, что анализируя сходимость ряда для $\psi_\alpha(x)$, можно показать, что равенство

$$\frac{d^s}{dx^s}\psi_\alpha(x) = \psi_{\alpha-s}(x) \tag{3.3'}$$

имеет место при $\alpha > 2$, $\alpha - s > 1$, $x \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha > 1$, $\alpha - s \in (0,1)$, $x \in (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Кроме того, из приведенных рассуждений видно, что при целых α дробный интеграл $J_{(\alpha)}$ можно сводить к обычному дробному интегрированию, но при этом возникает добавка, связанная с тем, что должно выполняться условие $(J_{(\alpha)}\varphi)_0 = 0$. Например

$$J_{(1)}\varphi = \int_0^x \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-2\pi)\varphi(y)\,dy = J_1\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y-2\pi)\varphi(y)\,dy.$$

Всюду ниже будем использовать обозначение $\omega_\alpha(h) = h^\alpha\omega(h)$, $\alpha > 0$. Пусть теперь $\alpha = s \in \mathcal{N}$.

Лемма 3.1. *Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ и*

$$0 \le m \le \lambda < \mu \le m + k - s. \tag{3.4}$$

Тогда

$$J_{(s)}\varphi: \quad H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi) \longmapsto H_p^{\omega_s,m,k}(0,2\pi), \qquad 1 \le p \le \infty.$$

Доказательство. В силу (3.4) пространства $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ и $H_p^{\omega_s,m,k}(0,2\pi)$ не зависят от m и k, поэтому можно написать

$$M_{p,\omega_s,0,k}(J_{(s)}\varphi) \le c\left(M_{p,\omega_s,s,k}(J_{(s)}\varphi)^{(s)} + \|J_{(s)}\varphi)\|_p\right) =$$

$$= c\left(M_{p,\omega,0,k}(\varphi) + \|J_{(s)}\varphi)\|_p\right) \le c(M_{p,\omega,0,k}(\varphi) + \|\varphi)\|_p),$$

т.е. $M_{p,\omega_s,0,k}(J_{(s)}\varphi) < \infty$. Лемма 3.1 доказана.

Рассмотрим теперь случай нецелых α, полагая

$$J_{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\psi_\alpha(t)\,dt, \quad x \in (-\pi,\pi). \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ и*

$$0 \le m \le \lambda < \mu \le m + k - [\alpha] - 1, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \tag{3.6}$$

Тогда

$$J_{(\alpha)}\varphi: \quad H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi) \longmapsto H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi), \qquad 1 \le p \le \infty.$$

Доказательство. Пользуясь независимостью $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ и $H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi)$ от m и k, положим $m = 0$. Покажем (ср. [6]), что $M_{p,\omega_\alpha,0,k}(J_{(\alpha)}\varphi) < \infty$. Пусть $0 < \alpha < 1$. Будем использовать соотношения

$$\tau_h J_{(\alpha)} = J_{(\alpha)}\tau_h, \quad \Delta_h^k J_{(\alpha)} = J_{(\alpha)}\Delta_h^k, \quad h > 0. \tag{3.7}$$

Имеем

$$\left(\Delta_h^k J_{(\alpha)}\varphi\right)(x) = \overline{J}\varphi + \widetilde{J}\varphi, \tag{3.8}$$

где

$$\overline{J}\varphi = \int_{|t|<h} \psi_\alpha(t)(\Delta_h^k\varphi)(x-t)\,dt,$$

$$\widetilde{J}\varphi = \int_{h<|t|<\pi} \psi_\alpha(t)(\Delta_h^k\varphi)(x-t)\,dt.$$

В силу обобщенного неравенства Минковского имеем

$$\|\overline{J}\varphi\|_p \le \int_{-h}^{h} |\psi_\alpha(t)|\,dt \left(\int_0^{2\pi} |(\Delta_h^k\varphi)(x-t)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Сделаем замену $x - t = y$. Тогда с учетом периодичности рассматриваемых классов и (3.3), получим

$$\|\overline{J}\varphi\|_p \le c\|\Delta_h^k\varphi\|_p \int_0^h t^{\alpha-1}\,dt \le ch^\alpha\|\Delta_h^k\varphi\|_p.$$

При $p = \infty$ доказательство аналогично. Оценим теперь $\|\widetilde{J}\varphi\|_p$ при $0 < \alpha < 1$. В силу тождества $D^1J_1 = I$, где I – тождественный оператор, а также равенства (3.7), имеем $\Delta_h^k\varphi = D^1J_1\Delta_h^k\varphi = D^1\Delta_h^kJ_1\varphi$. Следовательно

$$\widetilde{J}\varphi = \int_{h<|t|<\pi} \psi_\alpha(t)(D^1\Delta_h^kJ_1\varphi)(x-t)\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\widetilde{J}\varphi = \psi_\alpha(-h)(\Delta_h^kJ_1\varphi)(x+h) - \psi_\alpha(h)(\Delta_h^kJ_1\varphi)(x-h)+$$

$$+c\int_{h<|t|<\pi} D^1\psi_\alpha(t)(\Delta_h^kJ_1\varphi)(x-t)\,dt.$$

Применяя неравенство треугольника, найдем

$$\|\widetilde{J}\varphi\|_p \le c_1h^{\alpha-1}\|\Delta_h^kJ_1\varphi\|_p + c_2\left(\int_0^{2\pi} dx\left|\int_{h<|t|<\pi} D^1\psi_\alpha(t)(\Delta_h^kJ_1\varphi)(x-t)\,dt\right|^p\right)^{1/p}.$$

Сделаем замену $x - t = y$ и применим неравенство Минковского. Тогда с учетом (3.3) получим

$$\|\widetilde{J}\varphi\|_p \le c_1h^{\alpha-1}\|\Delta_h^kJ_1\|_p + c_3\|\Delta_h^kJ_1\|_p\int_h^\infty t^{\alpha-2}\,dt \le ch^{\alpha-1}\|\Delta_h^kJ_1\|_p. \tag{3.9}$$

При $p = \infty$ получаем аналогичную оценку. Пусть теперь $\alpha > 1$. С учетом тождества $D^sJ_s = I$, $D^s = \dfrac{d^s}{dt^s}$ и равенства (3.7) имеем $\Delta_h^k = D^sJ_s\Delta_h^k = D^s\Delta_h^kJ_s$, где $s = [\alpha] + 1$. Пэтому

$$J_{(\alpha)}\varphi = \int_{|t|<\pi} \psi_\alpha(t)(D^s\Delta_h^kJ_s\varphi)(x-t)\,dt. \tag{3.10}$$

Интегрируя (3.10) по частям $(s-1)$ раз, получим $J_{(\alpha)}\varphi = J'\varphi + J''\varphi$, где (ср. (3.8))

$$J'\varphi = c\int_{|t|<h} D^{s-1}\psi_\alpha(t)(D^1\Delta_h^kJ_s\varphi)(x-t)\,dt,$$

$$J''\varphi = c\int_{h<|t|<\pi} D^{s-1}\psi_\alpha(t)(D^1\Delta_h^kJ_s\varphi)(x-t)\,dt.$$

Оценка $J'\varphi$ аналогична случаю $0 < \alpha < 1$. Для J'' имеем

$$J''\varphi = c_s D^{s-1}\psi_\alpha(-h)(\Delta_h^k J_s\varphi)(x+h) - c_s D^{s-1}\psi_\alpha(h)(\Delta_h^k J_s\varphi)(x-h)+$$

$$+c\int_{h<|t|<\pi} D^s\psi_\alpha(t)(\Delta_h^k J_s\varphi)(x-t)\,dt. \tag{3.11}$$

Сделаем замену $x - t = y$ и применим неравенство Минковского. Получим

$$||J''\varphi||_p \leq b_s h^{\alpha-s}||(\Delta_h^k J_s\varphi)(\cdot)||_p + ||(\Delta_h^k J_s\varphi)(\cdot)||_p \int_h^\infty t^{\alpha-s-1}\,dt. \tag{3.12}$$

Следовательно

$$||J''\varphi||_p \leq b_s h^{\alpha-s}||(\Delta_h^k J_s\varphi)(\cdot)||_p. \tag{3.13}$$

При $p = \infty$ оценка аналогична. Таким образом, при $\alpha > 0$

$$||(\Delta_h^k J_{(\alpha)}\varphi)(\cdot)||_p \leq \sum_{j=s-1}^{s} b_j h^{\alpha-j}||(\Delta_h^k J_j\varphi)(\cdot)||_p, \tag{3.14}$$

откуда

$$M_{p,\omega_\alpha,0,k}(J_{(\alpha)}\varphi) \leq c\sum_{j=s-1}^{s} b_j M_{p,\omega_j,0,k}(J_j\varphi), \tag{3.15}$$

и остается воспользоваться леммой 3.1. Лемма 3.2 доказана.

§4. ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВЕЙЛЯ–МАРШО. ИЗОМОРФИЗМ

Для произвольного $\alpha > 0$ введем дробную производную Вейля–Маршо

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi d_l(\alpha)}\int_0^{2\pi}(\Delta_{-t}^l f)(x)\frac{d}{dt}\psi_{1-\alpha}(t)\,dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, 2\pi,) \tag{4.1}$$

усеченную производную Вейля–Маршо

$$(\mathcal{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi d_l(\alpha)}\int_\varepsilon^{2\pi}(\Delta_{-t}^l f)(x)\frac{d}{dt}\psi_{1-\alpha}(t)\,dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, 2\pi), \tag{4.2}$$

а также усеченную производную Маршо

$$(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_l(\alpha)}\int_\varepsilon^\infty \frac{(\Delta_{-s}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \quad l > \alpha, \quad x \in (0, \infty). \tag{4.3}$$

Во всех этих производных

$$d_l(\alpha) = -\Gamma(-\alpha)\sum_{n=0}^{l}(-1)^{n-1}C_l^n n^\alpha, \quad \alpha > 0$$

(см. [13], стр. 100 – 102). Очевидно, производные (4.2) и (4.3) определены для всех $f \in L_{p,0}$ и переводят это пространство в себя.

Лемма 4.1. *Пусть $f(x) \in L_p$, $1 \le p < \infty$. Усеченные дробные производные $\mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f$ и $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f$ сходятся (как по норме так и для почти всех x) и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f. \tag{4.4}$$

Доказательство. Отметим вначале, что эта лемма для $l = 1$ есть в [13], стр. 270. Для простоты докажем лемму для $l = 2$. Общий случай можно доказать аналогично. Из того, что

$$\psi_{1-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \left[2\pi \sum_{k=0}^{n} (t+2\pi k)^{-\alpha} - \frac{(2\pi n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right],$$

получаем

$$\frac{d}{dt}\psi_{1-\alpha}(t) = -\frac{2\pi\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (t+2\pi n)^{-1-\alpha}, \quad 0 < t \le 2\pi. \tag{4.5}$$

С учетом (4.5) имеем для производной (4.2)

$$\mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f = -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha) d_2(\alpha)} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{(\Delta^2_{-t} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt - \int_{2\pi}^\infty \frac{(\Delta^2_{-t} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_\varepsilon^{2\pi} (\Delta^2_{-t} f)(x) \sum_{n=1}^{\infty} (t+2\pi n)^{-1-\alpha}\, dt \right). \tag{4.6}$$

Поменяем во втором слагаемом порядок суммирования и интегрирования, сделаем замену $t + 2\pi n = y$ и учтем, что $(\Delta^2_{-t} f)(x) = (\Delta^2_{-y} f)(x)$. В результате будем иметь

$$(\mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) = (\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f)(x) + c_\alpha \int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}} (\Delta^2_{-t} f)(x)\, dt, \tag{4.7}$$

где c_α – постоянная и

$$b_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in (2\pi k, \varepsilon + 2\pi k), \\ 0 & \text{при } t \notin (2\pi k, \varepsilon + 2\pi k), \end{cases} \quad k \in \mathcal{N}, \quad t^{-\alpha-1} b_\varepsilon(t) \in L_1(0,\infty).$$

Далее, при $\varepsilon \to 0$

$$\int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} [(2\pi n)^{-\alpha} - (2\pi n + \varepsilon)^{-\alpha}] \to 0.$$

Поэтому из (4.7) в силу неравенства Минковского имеем

$$||\mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f - \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f||_p \le c||f||_p \int_{2\pi}^\infty \frac{b_\varepsilon(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \to 0,$$

откуда следует сходимость по норме L_p. Из (4.6) в силу теоремы Лебега о предельном переходе следует сходимость почти всюду. Лемма 4.1 доказана.

Как известно (см. [13], стр. 267) на функциях $\varphi \in L_{1,0}(0,2\pi)$ дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана–Лиувилля по всей прямой :

$$J_{(\alpha)}\varphi = J_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt, \quad 0<\alpha<1, \tag{4.8}$$

где интеграл справа понимается как условно сходящийся :

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x-2\pi n}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt. \tag{4.9}$$

Если обозначить

$$J_N^{(\alpha)}\varphi = \int_0^{2\pi N}\xi^{\alpha-1}\varphi(x-\xi)\,d\xi, \tag{4.10}$$

то из сказанного выше следует, что для $\varphi \in L_{p,0}$ почти всюду $\lim\limits_{N\to\infty}(J_N^{(\alpha)}\varphi(x) =$ $= J_{(\alpha)}\varphi$. Можно дать оценку сходимости и по норме

$$||J_N^{(\alpha)}\varphi - J_{(\alpha)}\varphi||_q \le cN^{\alpha-1+1/q-1/p}||\varphi||_p, \quad p\le q<\infty. \tag{4.11}$$

Лемма 4.2. *Пусть $f \in L_{p,0}$, $1\le p\le\infty$. Тогда*

$$J_{(\alpha)}\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f = \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha J_{(\alpha)} f. \tag{4.12}$$

Доказательство. Заметим, что (4.12) имеет место, если $J_{(\alpha)}$ заменить на $J_N^{(\alpha)}$ при любом N, после чего можно воспользоваться (4.11) в случае $p = q$. В результате получим (4.12).

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha > 0$. Для $f \in L_p$, $1\le p\le\infty$ следующие утверждения эквивалентны :*

1) существует $\varphi \in L_{p,0}$ такая, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}||\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f - \varphi||_p = 0$;

2) $f(x) = f_0 + J_{(\alpha)}\varphi$, где $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$;

3) $||\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f||_p \le c$, где c не зависит от ε.

Доказательство. Без ограничения общноси можно считать $f_0 = 0$, так как если $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p)}}\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f = \varphi$, то $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p)}}\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha(f-f_0) = \varphi$ и $(f-f_0)_0 = 0$.

a) Пусть выполнено 2), т.е. $f(x) = J_{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in L_{p,0}$, но в силу (4.8) отсюда следует, что $f(x) = J_\alpha\varphi$. Применяя формулу (6.6) из [13], стр. 106 и переходя в ней к пределу при $\varepsilon \to 0$ по норме L_p, получим

$$||\mathcal{D}^\alpha_\varepsilon f - \varphi||_p \le \int_0^\infty K_{l,\alpha}(t)||\varphi(x - \varepsilon t) - \varphi(x)||_p \, dt,$$

откуда с учетом свойств $K_{l,\alpha}(t)$ (см. [13]) в силу мажорантной теоремы Лебега следует 1) а с ним и 3).

b) Пусть теперь выполнено 1). Тогда в силу ограниченности оператора $J_{(\alpha)}$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} ||J_{(\alpha)}\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f - J_{(\alpha)}\varphi||_p = 0.$$

Поскольку

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbb{D}^\alpha_\varepsilon J_{(\alpha)} f = \int_0^\infty K_{l,\alpha}(t) f(x - \varepsilon t)\, dt = f(x),$$

то с учетом (4.12) получаем 2).

c) Наконец, пусть выполнено 3). В этом случае доказательство аналогично доказательству достаточной части теоремы 6.2 в [13] (стр. 107 – 108). Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha > 0$ и $1 \le n \le l$. Для оператора дробного дифференцирования (4.1) справедлива оценка типа Зигмунда :*

$$\omega^n_p(\mathcal{D}^\alpha f, \delta) \le c \left(\int_0^\delta \frac{\omega^l_p(f,t)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \delta^{-\alpha}\omega^n_p(f,\delta) \right). \tag{4.13}$$

Доказательство. Отметим вначале, что при $n = l > \alpha$ в правой части (4.13) остается лишь первое слагаемое. Имеем

$$(\Delta^n_h \mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta^n_h \Delta^l_{-t} f)(x) \frac{d}{dt}\psi_{1-\alpha}(t)\, dt. \tag{4.14}$$

Применяя (3.3) и неравенство Минковского, получим

$$||(\Delta^n_h \mathcal{D}^\alpha f)(x)||_p \le J'\varphi + J''\varphi, \tag{4.15}$$

где

$$J'\varphi = c \int_{|t|<h} \frac{||(\Delta^n_h \Delta^l_{-t} f)(x)||_p}{|t|^{1+\alpha}}\, dt,$$

$$J''\varphi = c\int_{h<|t|<\pi} \frac{\|(\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f)(x)\|_p}{|t|^{1+\alpha}}\, dt.$$

Для оценки $J'\varphi$ и $J''\varphi$ воспользуемся неравенствами

$$\|\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f\|_p \le c\omega_p^n(f, h), \tag{4.16}$$

$$\|\Delta_h^n \Delta_{-t}^l f\|_p \le c\omega_p^l(f, |t|), \tag{4.17}$$

$$\omega_p^l(f, |t|) \le c\omega_p^n(f, |t|), \quad l \ge n. \tag{4.18}$$

С учетом (4.17) имеем

$$J'\varphi \le c\int_{|t|<h} \frac{\omega_p^l(f,|t|)}{|t|^{1+\alpha}}\, dt \le c\int_0^h \frac{\omega_p^l(f,|t|)}{|t|^{1+\alpha}}\, dt.$$

Из (4.16) получим $J''\varphi \le ch^{-\alpha}\omega_p^n(f, h)$. Из этих оценок с учетом (4.15) легко выводится нужная оценка.

Теорема 4.3. *Пусть $\alpha > 0$ и $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$. Тогда операторы $\mathcal{D}^\alpha$ и $\mathbb{D}^\alpha$ ограниченно действуют из $H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi)$ в $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$, где*

$$\omega_\alpha(h) = h^\alpha\omega(h), \quad 0 \le m \le \lambda < \mu \le m + k - \alpha.$$

Доказательство. Оценка для $\sup\limits_{h>0} \dfrac{\omega_p^k(\mathcal{D}^\alpha f, h)}{\omega(h)}$ немедленно следует из (4.13).

Замечание. При $m = \lambda = 0$ теорема 4.3 верна при дополнительном условии

$$\int_0^h t^{-1}\omega(t)\, dt \le c\omega(h).$$

Из результатов §§3,4 вытекает следующее утверждение об изоморфизме.

Теорема 4.4. *Пусть $0 < \lambda < \mu$, $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ и*

$$k \ge \begin{cases} \mu + \alpha, & \text{при } \alpha \in \mathcal{N}, \\ \mu + [\alpha] + 1, & \text{при } \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

Тогда оператор дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает пространство $H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi)$ на пространство $H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0,2\pi)$.

Доказательство. В силу лемм 3.1, 3.2 и теоремы 4.3 имеем

$$J_{(\alpha)}: \quad H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi) \longmapsto H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0,2\pi),$$

$$\mathbb{D}^\alpha : \quad H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0,2\pi) \quad \longmapsto \quad H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать представимость функций из $H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0,2\pi)$ функциями $H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi)$. Так как $H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi) \subset L_p(0,2\pi)$, то согласно теореме 4.1 функция $f(x) \in H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi)$ представима дробным нтегралом Вейля от функций из $L_p(0,2\pi)$, если $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f$ сходится по норме $L_p(0,2\pi)$. Так как $\omega(t)/t^\alpha$ почти возрастает при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, то

$$||\mathbb{D}_{\varepsilon_1}^\alpha f - \mathbb{D}_{\varepsilon_2}^\alpha f||_p \leq \frac{1}{d_l(\alpha)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{(\Delta_{-t}^k f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega_p^k(f,t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \leq c \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\omega(t)}{t}\, dt \to 0.$$

Поэтому $f = J_{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in L_p(0,2\pi)$. Так как $\mathbb{D}^\alpha J_\alpha \psi = \psi$, $\psi \in L_1(0,2\pi)$ и $p \geq 1$, то $\varphi \in H_p^{\omega,0,k}(0,2\pi)$. Теорема 4.4 доказана.

§5. ОЦЕНКИ ТИПА ЗИГМУНДА ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Такие оценки при $0 < \alpha < 1$ имеются в монографии [13], стр. 272 – 273, и их также используют при решении задачи об изоморфизме пространств $H_\infty^\omega(0,2\pi)$. Здесь мы покажем, что эти оценки можно получить и при произвольном $\alpha > 0$.

Теорема 5.1. *Если*

$$\varphi(x) \in L_p(0,2\pi), \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}, \quad l \geq [\alpha] + 1, \tag{5.1}$$

то справедливо следующее неравенство :

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)}\varphi, \delta) \leq c \left(\int_0^\delta \frac{\omega_p^1(\varphi,y)}{y^{1-\alpha}}\, dy + \delta^l \int_\delta^\pi \frac{\omega_p^1(\varphi,y)}{y^{l+1-\alpha}}\, dy \right). \tag{5.2}$$

Доказательство. Используя представление типа (3.8), находим

$$||\Delta_h^l J_{(\alpha)}\varphi||_p \leq A_1 + A_2, \tag{5.3}$$

где

$$A_1 = \int_{|t|<(1+l)h} \omega_p^1(\varphi,|t|)\, |(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)|\, dt,$$

$$A_2 = \int_{|t|>(1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|)\, |(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)|\, dt,$$

Так как $[\alpha] \le m \le l$, то

$$|(\Delta_h^l \psi_\alpha)(t)| \le ch^m |t|^{\alpha-1-m}. \tag{5.4}$$

Для оценки A_1 применим (5.4) с $m = [\alpha]$:

$$A_1 \le \int_{|t|<(1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) h^{[\alpha]} |t|^{\alpha-[\alpha]-1}\, dt \le ch^\alpha \omega_p^l(\varphi, h).$$

При оценке A_2 в (5.4) берем $m = l$:

$$A_2 \le \int_{|t|>(1+l)h} \omega_p^1(\varphi, |t|) h^l |t|^{\alpha-l-1}\, dt, \quad l \ge [\alpha] + 1.$$

При $\alpha > 0$, $l > 0$, $\delta \in (0,1)$ функция

$$\int_0^\delta \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{1-\alpha}}\, dy + \delta^l \int_\delta^1 \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{l+1-\alpha}}\, dy \tag{5.5}$$

почти возрастает (см. [5]). Объединение оценок для A_1, A_2 дает следующее :

$$||\Delta_h^l J_{(\alpha)} \varphi||_p \le c \left(\int_0^h \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{1-\alpha}}\, dy + h^l \int_h^\pi \frac{\omega_p^1(\varphi, y)}{y^{l+1-\alpha}}\, dy \right).$$

В силу монотонности по h отсюда, переходя к $\sup$ по $|h| < \delta$, получаем требуемое.

Следствие 5.1. Пусть

$$\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi), \quad 1 \le p \le \infty, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}, \quad l \ge [\alpha] + 2. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)}\varphi, \delta) \le c\delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta). \tag{5.7}$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.1 и того, что функции (5.5) и $\delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta)$ эквивалентны.

Теорема 5.2. *Пусть*

$$\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi), \quad 1 \le p \le \infty, \quad \alpha \in \mathcal{N}, \quad l \ge \alpha + 1. \tag{5.8}$$

Тогда

$$\omega_p^l(J_{(\alpha)}\varphi, \delta) \le c\delta^\alpha \omega_p^1(\varphi, \delta). \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть вначале $\alpha = 1$. В этом случае $\psi_1(t) = \pi - t$. При $l \geq 2$ имеем

$$(\Delta_h^l \psi_1)(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in (0, 2\pi - lh), \\ c, & \text{при } t \in (2\pi - lh, 2\pi). \end{cases}$$

Поэтому в (5.3) будем иметь

$$\|\Delta_h^l J_{(1)}\varphi\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \omega_p^1(\varphi, |t|)\, |(\Delta_h^l \psi_1)(t)|\, dt \leq \int_{-lh}^{0} \omega_p^1(\varphi, |t|)\, dt \leq ch\omega_p^1(\varphi, h),$$

откуда следует (5.9) при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha = k \in \mathcal{N}$, $l \geq k+1$. Так как $\psi_k(t)$ является многочленом степени k, то для $t \in (0, 2\pi - lh)$ имеем $(\Delta_h^l \psi_k)(t) = 0$. Функция $\psi_k(t)$ непрерывно дифференцируема при $k > 2$. Поэтому можно использовать формулу (3.3'). В оценке (5.4) при $m = k - 1$

$$|\Delta_h^l \psi_k)(t)| \leq ch^{k-1}|t|^{k-1-(k-1)} = ch^{k-1}, \quad t \in (-lh, 0).$$

Следовательно

$$\|\Delta_h^l J_{(k)}\varphi\|_p \leq ch^{k-1} \int_{-lh}^{0} \omega_p^1(\varphi, t)\, dt \leq ch^k \omega_p^1(\varphi, h),$$

что доказывает теорему 5.2.

Теорема 5.3. *Пусть $0 \leq \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$. Тогда оператор дробного интегрирования Вейля $J_{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ ограниченно действует из $H_p^{\omega,0,k}(0, 2\pi)$ в $H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0, 2\pi)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 1 + \alpha$.*

Доказательство немедленно следует из леммы 1.3 и оценки (5.9).

Теорема 5.4. *Для $0 \leq \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ оператор дробного интегрирования Вейля $J_{(\alpha)}$, $\alpha \notin \mathcal{N}$, $\alpha > 0$ ограниченно действует из $H_p^{\omega,0,k}(0, 2\pi)$ в $H_p^{\omega_\alpha,0,k}(0, 2\pi)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $k > \mu + \alpha$.*

Доказательство вытекает из леммы 1.3 и оценки (4.13).

Дадим теперь формулировку теоремы об изоморфизме, которая при данном подходе несколько отличается от формулировки теоремы 4.4.

Теорема 5.5. *Пусть $0 < \lambda < \mu < 1$, $\omega(h) \in A_{\lambda,\mu}$ и*

$$k \geq \begin{cases} 1 + \alpha, & \text{при } \alpha \in \mathcal{N}, \\ [\mu + \alpha] + 1, & \text{при } \alpha > 0, \quad \alpha \notin \mathcal{N}. \end{cases}$$

Тогда оператор дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает пространство $H_p^{\omega,0,k}$ на пространство $H_p^{\omega_\alpha,0,k}$.

Доказательство с учетом теорем 5.3 и 5.4 аналогично доказательству теоремы 4.4 и поэтому опускается. Отметим лишь, что подход, связанный с оценками Зигмунда, не требует использования независимости пространств и в некоторых случаях позволяет понизить порядок конечной разности в определении пространств.

В заключение отметим, что результаты §§3–5 легко переносятся на случай характеристик из классов Φ_s^m типа Бари–Стечкина.

ABSTRACT. **The paper studies fractional integro-differentiation by Weyl in the generalized periodic Hölder classes $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$. These classes depend on the characteristic $\omega(t)$ from the classes $A_{\lambda,\mu}$ or from the Bary–Stechkin type classes Φ_s^m, where m stands for the order of derivative and k for the order of finite difference. The main result is an isomorphism theorem asserting, that for an arbitrary order $\alpha > 0$ the Weyl's fractional integration operator $J_{(\alpha)}\varphi = \psi_\alpha * \varphi$ is an isomorphism between the spaces $H_p^{\omega,m,k}(0,2\pi)$ and $H_p^{\omega_\alpha,m,k}(0,2\pi)$, where**

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}, \quad \omega_\alpha(t) = t^\alpha\omega(t).$$

The parameters m, k, ω satisfy certain consistency conditions. For $\omega \in A_{\lambda,\mu}$ we require $0 \le m \le \lambda < \mu \le m + k$, while for $\omega \in \Phi_s^m$ these conditions are given in terms of index numbers.

We also establish Zigmund type bounds for integral modulus of continuity and investigate the properties of fractional integro-differentiation operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1. М. А. Баба-заде, "Дробный интеграл в модулях гладкости", Спец. вопросы теории фукций, т. 4, стр. 57 -73, 1989.
2. С. С. Волосивец, "Об ε–энтропии и поперечниках одного компакта гладких функций в пространстве функций ограниченной p-вариации", Вестник МГУ, сер. 1, № 5, стр. 81 – 84, 1992.
3. А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Наука, М., 1980.
4. Н. К. Карапетянц, Х. М. Мурдаев, А. Я. Якубов, "Об изоморфизме, осуществляемом дробными интегралами в обобщенных классах Гёльдера", ДАН СССР, т. 314, № 2, стр. 288 – 291, 1990.
5. Н. К. Карапетянц, З. У. Муссалаева, "Дробное интегродифференцирование по Вейлю в обобщенных классах Гёльдера", Деп. ВИНИТИ, № 2100-b93, 1993.
6. Г. П. Костомаров, "О свойствах интегральных операторов Вейля", Проблемы

матем. анал., ЛГУ, № 2, стр. 187 – 191, 1984.
7. С. Г. Крейн, Ю. И. Петурин, Е. М. Семенов, Интерполяция линейных операторов, Наука, М., 1978.
8. Х. М. Мурдаев, "Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности", Деп. ВИНИТИ, № 3351-b, 1986.
9. З. У. Муссалаева, "Обобщенные гельдеровские пространства с характеристиками из класса типа Бари–Стечкина. 1. Изоморфизм", Деп. ВИНИТИ, № 3724-b92, 1992.
10. З. У. Муссалаева, "Обобщенные гельдеровские пространства с характеристиками из класса типа Бари–Стечкина. 2. Классы характеристик", Деп. ВИНИТИ, № 3725-b92, 1992.
11. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1980.
12. К. В. Руновский, "О соотношениях между периодическими и непериодическими модулями гладкости", Матем. заметки, т. 52, № 2, стр. 111 – 113, 1992.
13. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Наука и техника, Минск, 1987.
14. С. Г. Самко, А. Я. Якубов, "Оценка Зигмунда для модуля непрерывности дробного порядка сопряженной функции", Изв. Вузов, Матем., т. 12, стр. 49 – 53, 1985.
15. С. Г. Самко, "Об ограниченности сингулярного оператора в весовых обобщенных гельдеровских пространствах $H_0^\omega(\tau, \rho)$ в терминах верхнего и нижнего индексов", Деп. ВИНИТИ, № 349-b91, 1990.
16. С. А. Теляковский, "О приближении суммами Фурье дифференцируемых функций высокой гладкости", Труды ин-та. РАН, т. 198, стр. 183 – 211, 1992.
17. M. N. Khatib, "About one-dimensional fractional integrals of classes", Сообщения АН Груз.ССР, т. 139, № 1, стр. 41 – 43, 1990.
18. L. Maligranda, Indices and Interpolation. Dissertationes mathematicual, vol. 220-14, PAN, Warsaw, 1985.

20 марта 1995

Ростовский государственный университет
Россия